Provas e Refutações de Imre Lakatos: texto e relato das discussões *

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

Eduardo Goldani Altmann

27 de Novembro de 2002

1 Introdução

Apresentamos neste trabalho as discussões suscitadas pela leitura do trabalho Provas e Refutações de Imre Lakatos contido no primeiro capítulo de [1][1]. Para auxiliar essa discussão nos utilizamos ainda da análise realisada por I. Koetsier em [2] e da revisão deste texto [3].

Figura 1: Imre Lakatos: [9.11.1922] Hungria, [2.2.1974] Inglaterra.

Para melhor compreensão das discussões resenhamos na seção 2 o texto original de Lakatos, sem a pretensão de substituir o texto original [1] (números e letras entre parentesis representam os itens do texto.). As discussões sobre o texto, bem como do meta-texto [2] e do meta-meta-texto [3] aparecem na seção 3.

2 O trabalho de Lakatos

2.1 Introdução do Autor

Logo no início de seu texto, o autor expressa seu objetivo como sendo o de " enfocar alguns problemas da metodologia da matemática". Por metodologia atribui sentido análogo ao de de "heurística" para Pólya e Bernays, e "lógica do descobrimento" ou "lógica situacional" de Popper, se opondo ao sentido metamatemático do termo atribuido pelos formalistas. Sua oposição à corrente formalista ocorre de maneira absoluta ao considerar o desenvolvimento da história da matemática e de sua lógica do descobrimento. Anuncia por fim que, na construção subsequente, pretende questionar a visão de desenvolvimento da matemática que afirma ser este um monótono acúmulo de teoremas, afirmando, de outra forma, que o progresso se dá através de um constante aperfeiçoamento de opiniões e críticas. Enfim, Lakatos sustenta que o progresso da matemática se dá pela lógica das **Provas e Refutações**, e convida-nos a conhecer sua argumentação.

A forma escolhida pelo autor para ilustrar seu ponto de vista é recriando em uma fabulosa sala de aula o debate histórico sobre o famoso Teorema de Euler. A partir dessa discussão a classe passa a discutir os métodos de desenvolvimento que a

*MAT - 5766 Prof. Iole de Freitas Druck

[1] Concentramonos nos cinco primeiros tópicos deste trabalho.

matemática toma, ou deve tomar.

Objetivando um resumo e simplificação do texto, bem como uma discussão dos seus aspectos epistemológicos, me concentrarei nos seus aspectos que abordam métodos genéricos dentro da metodologia proposta, deixando de lado a precisão e completude das discussões matemáticas sobre o problema. Com exceção do item 2.2 os demais pontos se tornam muito abstratos, mas esperamos servir de resumo para aqueles que já leram o texto original.

2.2 Um problema, uma conjectura e uma proposta de prova (1,2)

Neste primeiro ponto nos é apresentado o problema, demonstrar a conjectura:

Para todos os poliedros, vale a relação entre o número de vertices (V), número de arestas (A) e número de faces (F): V-A+F=2.

A forma de surgimento dessa conjectura é motivada pela discussão de analogias entre poliedros e polígonos e é proposta após diversas experiências de tentativa e erro com poliedros bem conhecidos.

A seguir é proposta uma demonstração que baseia-se nos seguintes três passos, esboçados aqui de forma grosseira uma vez que eles nada têm de definitivo:

1 Removendo uma das faces do poliedro o estendemos e deformamos até formar uma figura plana. Para esta figura mostramos que vale V-A+F=1

2 Traça-se assim diagonais a cada uma das faces desta figura. Aumenta-se V, A e F de 1 mantendo a relação V-A+F=1.

3 Retira-se então um a um todos os triângulos até sobrar um único triângulo. Como a retirada de triângulos não altera V-A+F=1 e para um único triângulo temos V-A+F=1 a conjectura está demonstrada.

Críticas à esses três passos surgem imediatamente o que leva logo à constatação de que, no fundo, houve uma troca de uma conjectura por três novas, todas elas sucetíveis de críticas. O autor sustenta a manutenção da demonstração apesar das críticas, alegando que historicamente é lugar comum que conjecturas precedam às provas e que a justificação plena da desse procedimento, mantendo inclusive o nome histórico de prova, ficará clara mais tarde.

2.3 Crítica mediante contra-exemplos (3,4)

Uma vez decomposto o problema, surge uma frente mais ampla para a crítica. A principal forma de crítica proposta pelo autor, e desenvolvida durante todo o texto, é a apresentação de contra-exemplos, chamados *locais* quando se opõe a um dos três passos realizados em nossa prova ou *globais* quando se opõe diretamente à conjectura.

Inicialmente são tratados alguns **contra-exemplos locais** que são habilmente evitados aperfeiçoando os passoas acima propostos. Afinal, contra-exemplos exclusivamente locais são críticas da prova e não da conjectura sendo possível modificar a primeira e manter a última. Esse procedimento certamente complica as definições e os passos propostos mas é defendida, uma vez que "proposições plausíveis ou mesmo trivialemnte verdadeiras, em geral são prontamente refutadas: conjecturas complicadas, implausíveis, amadurecidas na crítica, podem atingir a verdade."

É claro que **contra-exemplos globais** causam maior impacto na tentativa de demonstração da conjectura. A apresentação deles é abordada por diferentes métodos que são apresentados em uma ordem crescente de sofisticação, que culmina no "método de prova e refutações".

Método da rendição

O procedimento mais imediato (a) diante de um contra-exemplo é manifesto como *método da rendição* ou *rejeição da conjectura*. Apesar de não mais sustentar a conjectura original mantêm-se o valor da demonstração uma vez que é possível demonstrar pontos distintos, mas próximos ao inicial. contra-exemplos globais são, portanto, críticas da conjectura mas não da prova.

Método Antimonstro

Um segundo procedimento alternativo (b) para lidar com contra-exemplos globais é o de alterar as definições subentendidas na formulação da conjectura mantendo-a igual. Trata-se do *método anti-monstro* ou *rejeição do contra exemplo* que é viável uma vez que claramente contra-exemplos dependem da definição dos termos em questão. Nesse tópico Lakatos coleciona uma série de contra-exemplos globais que foram propostos ao longo da história junto com uma possível redefinição dos conceitos básicos (poliedro, aresta, etc...) capazes de excluir o "poliedro" mencionado da lista de contra-exemplos válidos, mantendo assim a validade da relação V-A+F=2. Esse procedimento é justificado pela aversão a exemplos estranhos, monstruosos, evitando assim o caos e mantendo a ordem na matemática. A crítica apresentada a esse tipo de procedimento é o fato de tratarem-se de hipóteses *ad hoc* e recursos linguísticos que surgem após as críticas e sempre podem solucionar o contra-exemplo encontrado. Nessa abordagem o papel dos contra-exemplos deixa de ser essencial uma vez que modificações são sempre possíveis. O resultado aproxima-se, portanto, de um convenção. Lakatos manifesta sua crítica a esse método dogmático através da voz do professor e permite antever a proposição de um método eficaz, mas que evite a utilização de alterações *ad hoc*.

Métodos de antiexceção

Antes disso, no entanto, o autor se propõe a criticar, admitindo avanços, ainda um outro método (c) que surge naturalmente das críticas feitas ao método antimonstro. Trata-se dos *métodos de antiexceção* ou *retirada estratégica*. Neste método procura-se classificar as proposições entre verdadeiras, irremediavelmente falsas e remediavelmente falsas. Esta última categoria seria passível de se tornar verdadeira mediante alterações do tipo do método antimonstro. Um atitude possível seria então, retroceder até um campo de validade seguro, onde não pairam dúvidas quanto à validade da afirmação e que as excessões estão todas excluídas, e tentar aumentar o seu campo de validade. O método anti monstro seria válido então somente como demarcador do domínio de validade da conjectura. As críticas a esse método se baseiam em dois pontos: na dificuldade de ter certeza de se ter evitado todas as excessões, ou seja, na incerteza de se ter alcançado uma região segura; e pelo fato de o método de ampliação do domínio e de análise não levar em conta, nem alterar, a prova em questão.

Método de ajuste do Monstro

Um último método analisado (d) é o *o método de ajuste do monstro*. Nesse método pretende-se mostrar que em um exame mais apurado as exceções tornam-se apenas aparentes. Busca-se dessa forma reinterpretar ou modificar os contra exemplos de forma a que se enquadrem em padrões anteriormente estabelecidos e passem a ser mais um exemplo. A principal crítica se refere à dificuldade em determinar, de forma objetiva, qual a melhor interpretação do contra-exemplo sem apelar para argumentos *ad hoc*.

Provas e Refutações

Repassando e criticando cada um desses métodos propostos na figura de seus alunos Lakatos finalmente manifesta, pela voz da autoridade máxima na sala de aula (o professor), o seu método. Baseia-se na relação dialética entre provas e refutações, incorporando parcialmente instrumentos descritos anteriormente, procura compreender como se dá a evolução das áreas da matemática.

A refutação de uma conjectura, exemplificada através da apresentação de contra exemplos, assume um papel fundamental para Lakatos e não deve ser evitada ou desqualificada. No entanto uma refutação não deve fazer-nos abandonar o projeto de demonstração da conjectura. Lakatos propõe, diante de um contra-exemplo, sustentar a prova, porém restringir o domínio do lema afetado pelo contra-exemplo e, consequentemente, reduzir o domínio da conjectura. Distingue-se do método antiexceção por não reduzir simultaneamente o domínio da conjectura e do lema a um campo seguro aceitando assim a falsificação da prova. Argumenta que através desse tipo de procedimento se faz necessário uma análise e elaboração detalhadas da prova que, uma vez modificada, permite a continuação do processo de evolução da matemática.

Ressalva, no entanto, que teorias matemáticas mais maduras podem não apresentar esse tipo de estrutura uma vez que os aspectos inesperados, que levam à modificação da teoria, são mais raros que em teorias mais jovens.

2.4 Análise da Prova (5)

Uma vez colocado o papel preponderante dos contra-exemplos faz se necessário classificá-los e analisar suas implicações. A partir da estrutura de demonstração proposta, dizemos que o contra-exemplo é **local** quando refuta pelo menos um dos lemas utilizados na demonstração, e **global** quando o contra exemplo falseia o teorema como um todo. Podemos então divisar três tipos de contra-exemplos, com suas respectivas implicações:

1 *Locais mas não globais.* Nesse caso, conforme tratado anteriormente, trata-se de um ataque à prova e não ao teorema. Uma reelaboração da demonstração pode levar-nos à correção.

2 *Locais e globais.* Através do enfoque exposto no método das provas e refutações esse tipo de contra-exemplo é perfeitamente contornável através de uma readaptação do lema e da conjectura. Esse exemplo, “ longe de refutar, confirma-o” [1].

3 *Globais mas não locais.* Neste caso a refutação de fato ocorre.

Vemos portanto que, sob o ponto de vista do método proposto por Lakatos, somente o terceiro tipo de contra-exemplo consiste em real ameaça ao teorema. No entanto o autor adverte para a estratégia, que comumente é utilizada, de procurar encaixar contra-exemplos do terceiro no segundo tipo. Supostamente quando realizássemos uma análise rigorosa de todos os lemas e pressupostos utilizados revelar-se-ia a existência de de *lemas ocultos* ou *suposições ocultas*, que estavam sendo inconscientemente utilizados mas não explicitados, e que fazem com que o contra-exemplo refute também um lema e seja portanto também local.

Lakatos, no entanto, adverte para o perigo desse método tornar-se dogmático e, novamente, *ad hoc*. O autor mostra-se cético quanto à possibilidade de, através de uma análise rigorosa da prova, detectar todos os pressupostos necessários e ocultos. Uma vez colocada essa impossibilidade torna-se claro que é necessário também, na análise da prova, rejeitar esse tipo de método bem como outros do tipo *antimosntro*.

No método de teoria e refutação o surgimento de um contra-exemplo do tipo três deve levar ao abandono da conjectura inicial, à adoção de um novo lema que o contra-exemplo refute e, então, uma nova conjectura deve ser proposta. Vemos aqui novamente como nesse método ocorre o diálogo entre as conjecturas e refutações.

Para finalizar e sintetizar o método de prova e refutações transcrevo de [1] as três normas propostas:

Norma 1 *Se tivermos uma conjectura, disponhamonos a comprová-la e a refutá-la. Inspecionemos a prova cuidadosamente para elaborar um rol de lemas não triviais (análise da* *prova); encontremos contra-exemplos tanto para a conjectura (contra-exemplos globais) como para os lemas suspeitos (contra-exemplos locais).*

Norma 2 *Se tivermos um contra-exemplo global, desfaçamo-nos de nossa conjectura acrescentemos à nossa análise de prova um lema apropriado que venha a ser refutado pelo contra-exemplo, e substituamos a conjectura desprezada por outra melhorada que incorpore o lema como uma condição. Não permitamos que uma refutação seja destituída como um monstro. Esforcemo-nos por tornar explícitos todos os "lemas implícitos".*

Norma 3 *Se tivermos um contra-exemplo local, confiramos para verificar se ele não é também contra-exemplo global. Se for, podemos facilmente aplicar a Regra 2.*

Por fim Lakatos apresenta-nos ainda uma discussão entre seus alunos onde retrata a posição históricas de diferentes correntes matemáticas sobre o tema proposto. Fica claro a ausência de consenso inclusive sobre a relevância de se estabelecer uma metodologia da matemática. No entanto o desenvolvimento de pesquisas em matemática independe de um posicionamento pessoal sobre os pontos discutidos.

3 Discussões

Serão tratadas nesta seção as discussões em sala de aula sobre o trabalho de Lakatos. Dois textos auxiliares [2, 3] subsidiaram a discussão.

De forma geral podemos dizer que a proposta de Lakatos é que a Matemática se desenvolve dialeticamente entre provas e refutações. Sob esse ponto de vista o fazer matemática baseia-se na crítica e na discussão e não na aceitação e busca de demonstrações rigorosas.

Tornou-se claro que para compreendermos o projeto de Lakatos é necessário **situá-lo historicamente**. Notando a data de publicação do trabalho (1976) observou-se que seu enquadramento nas três escolas estudadas (Logicismo, Intuicionismo e Formalismo) não é simples uma vez que estas se desenvolveram no início do século XX. A menção de Lakatos aos formalistas se deve, provavelmente, por esta ser a escola com maior número de adeptos entre os matemáticos praticantes de seus dias assim como ocorre nos dias de hoje (essa polêmica será descrita mais adiante). A classificação desse trabalho como ligado à escola intuicionista também pareceu precipitada dada a distância temporal entre eles.

Por outro lado pudemos ressaltar a relação estreita da obra de Lakatos com os **trabalhos de Popper** (por exemplo [4]). Tendo em vista que o critério de demarcação de Popper para as ciências é a possibilidade de falseamento de uma teoria, podemos entender o método de Lakatos como uma tentativa de enquadrar a matemática dentro do esquema popperiano. Por outro lado, relacionando o texto estudado com o trabalho de Lakatos que estabelece os programas de pesquisa científica (mais voltado às ciências empíricas), podemos notar uma concessão à certas críticas de caráter kuhnianas. Isso torna-se claro uma vez que o falseamento em Lakatos não possui um caráter irrevolgável e definitivo como em Popper.

Essa concepção onde enquadramos o trabalho de Lakatos se torna explícita em sua distinção entre **matemática Euclideana e semi-empírica**. No primeiro caso o fluxo de verdade flui de cima para baixo, isto é, dos axiomas para os teoremas e daí aos enunciados particulares. Na matemática semi-empírica ocorre o inverso. Vemos aqui claramente a tentativa de aproximar a matemática do esquema popperiano para as ciências empíricas, ainda que neste último caso as refutações sejam de caráter empírico e, portanto, distinto do caso da matemática onde a refutação se dá por meio de contra-exemplos. Aventou-se a possibilidade de que a interpretação Euclideana da matemática se daria em uma etapa mais madura enquanto inicialmente a matemática seria melhor entendida como sendo semi-empírica. Concluimos, no entanto, que esta não é a posição de Lakatos que parece defender que a natureza de toda a matemática é semi-empírica.

Duas críticas às posições de Lakatos foram formuladas, uma no ponto em que ele ataca os **formalistas** e outra na possibilidade de generalização de seu esquema a outros campos mais abstratos da matemática. Nesse segundo ponto é visível que o problema escolhido possibilita uma intuição muito maior sobre a conjectura, o que faz com que surjam mais facilmente contra-exemplos que não poderiam ser trivialmente encontrados em outras áreas da matemática. No que se refere à divergência com os formalistas, o nível de crítica à posição de Lakatos não foi unânime em nossas discussões. Os mais enfáticos afirmaram que Lakatos desvirtuou a verdadeira intenção do grupo formalista e atacou-o de forma pouco elaborada e precisa uma vez que os resultados deste grupo possuem um alto nível de rigor. Uma justificativa levantada para essa imprecisão foi o fato de Lakatos estar se concentrando somente na metodologia e na heurística da matemática, pontos marginais dentro de uma concepção formalista. A crítica ao formalismo não seria o ponto mais relevante de seu trabalho que, no entanto, requer uma ruptura com os formalistas uma vez que, segundo o autor, a história da matemática não é possível dentro da concepção formalista. Além disso o autor associa os formalistas à uma posição dogmática, a qual ele pretende combater.

A partir dessa discussão levantou-se a questão sobre a existência de um conflito irreconciliável do trabalho de Lakatos e da escola formalista. Sob um ponto de vista podemos interpretar que estes trabalhos situam-se em ramos distintos da epistemologia da matemática, sendo que o primeiro envolveria mais os aspectos ligados à história e ao desenvolvimento da matemática e o segundo estaria interessado em um embasamento da matemática. Concluimos, no entanto, que tanto a visão formalista como o trabalho de Lakatos não se resumem exclusivamente a estes campos, mas envolvem de forma direta ou indireta uma concepção mais ampla da matemática. Torna-se claro, por exemplo, a incompatibilidade de uma visão formalista do trabalho de Lakatos quando notamos que este defende a aceitação e manutenção de um prova ainda que ela não esteja rigorosamente demonstrada ou livre de problemas. Concluimos portanto que uma determinada metodologia (por exemplo a de Lakatos) envolve uma concepção de matemática específica e não é independente desta. Pareceu-nos ainda que, apesar do inegável valor didático e interpretativo da história da matemática presente nesse trabalho de Lakatos, ele ambiciona mais do que uma mera descrição de como evolui a matemática. Trata-se de uma interpretação da própria natureza da matemática.

Ficou em aberto ainda até que ponto este trabalho altera, ou pretende alterar, a forma de trabalho do pesquisador em matemática. Outra questão que não pareceu clara foi sobre a adequação desta descrição à história da matemática, sendo que alguns dos presentes duvidaram da compatibilidade.

Como visto, **o valor deste trabalho de Lakatos parece indiscutível**, seja como inspiração para trabalhos voltados ao ensino de matemática, à compreensão da sua evolução histórica ou sobre uma reinterpretação da natureza da matemática. As discussões entre os alunos da fantástica sala de aula criada por Lakatos representam ainda posições históricas de matemático e permitem compreender de forma didática o embate existente dentro da epistemologia da matemática que parece estar ainda hoje longe de um fim.

Referências

[1] Imre Lakatos, *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações* Zahar Editores, Rio de Janeiro (1976).

[2] T. Koetsier, *Lakatos Philosophy of Mathematics - A Historical Approach*, North Holland

(1991).

[3] John Shosky, *Review*, Historia Mathematica 22, p. 203 (1995).

[4] Karl Rudolf Popper, *Lógica da pesquisa científica* Editora Cultrix, São Paulo (1975).