# Até onde podemos aplicar a epistemologia kuhniana à Matemática ?

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

Eduardo Goldani Altmann*

3 de Dezembro de 2002

## Conteúdo



## 1 Introdução

Apresentamos neste trabalho um resumo dos pontos discutidos no seminário realizado no curso de pós-graduação de Epistemologia da Matemática [1]. A elaboração de um trabalho escrito sobre o tema tem como objetivo a documentação e explicitação da tese defendida em classe. No entanto, devido à intenção original do seminário estar intimamente ligada à dinâmica da sala de aula (como ficará claro a seguir), é de se esperar que este documento se torne incompleto e decontextualizado quando lido isoladamente.

### 1.1 Organização do Texto

O texto organiza-se da seguinte forma: na seção 1.2 apresentamos a motivação e a colocação do problema a ser estudado. Em 2 resumimos e analisamos alguns dos pontos mais importantes da epistemologia de Kuhn. Em 3 buscamos analisar a aplicação dos conceitos discutidos à Matemática.

*altmann@if.usp.br

[1] MAT - 5766 Prof. Iole de Freitas Druck

Figura 1: Thomas S. Kuhn

## 1.2 motivacao

A motivação para o questionamento refletido no título deste trabalho surgiu do estudo da epistemologia da matemática durante o segundo semestre de 2002. O célebre trabalho de Thomas Kuhn [1] foi estudado dentro do programa original da disciplina. Tornou-se claro que o foco do trabalho de Kuhn eram as Ciências Empíricas. No entanto, constatou-se que muitos dos pontos por ele levantados pareciam estar presentes também no desenvolvimento da Matemática. Na medida que o curso foi avançando e exemplos históricos foram tomados no curso o questionamento tornou-se inevitável:

- É correto utilizar o conceito de paradigma na matemática?
- Existem Revoluções ou quebra de paradigmas na história da Matemática?
- Até onde podemos aplicar esse Modelo à Matemática ou teorias que buscam interpretar ou embasar a Matemática ?

O problema a ser abordado pretende esclarecer o clima de **tentação** e **deconforto** presente na sala de aula quando da aplicação de Kuhn à Matemática. Não se trata, portanto, de saber exclusivamente se esta teoria se aplica ou não à Matemática mas até onde podemos aplicar e em quais conceitos a analogia falha. Esperamos ainda que este trabalho possua um caráter didático, uma vez que a partir dessa reflexão e comparação entre a Matemática e as Ciências Naturais, podemos esclarecer muitos dos pontos cruciais tanto da concepção kuhniana como da própria natureza da matemática.

## 1.3 Recomendações e Cuidados

É interessante notar que a tentativa de extrapolação e generalização da teoria de Kuhn foi realizada para diversas áreas, com um grau menor ou maior de elaboração. Já no Postscript de seu livro [1] (p.208 e 209), Kuhn refere-se àqueles que buscam tal extrapolação especialmente para áreas das ciências humanas ou arte. É interessante notar que Kuhn não desestimula essas iniciativa mas ressalva que acha um tanto quanto embaraçoso. Para ele, a novidade de suas idéias não está contida na descrição da evolução histórica a partir de períodos de normalidade interrompidos por rupturas. Essa forma de analisar a história é comum tanto à história da política quanto da arte. Sua originalidade está na aplicação dessa estrutura à uma área que parecia antes imune a essas rupturas, a saber, as ciências empíricas. Outro ponto que ele julga original é o conceito de paradigma que, segundo ele, se aplicável às artes poderia facilitar muito a sua compreensão.

Um segundo comentário que nos mostra o perigo das generalizações simplistas é feito por Paul Feyerabend em [2]. Na página 248 deste livro é mostrado como o conceito de "científico" de Kuhn, baseado na prática da ciência normal, é suficientemente amplo para conter as mais variadas atividades: desde o grupo de filósofos de Oxford até o crime organizado britânico.

É claro que a natureza da Matemática é distinta dos exemplos acima citados. Kuhn exclui ela de seus estudos na medida que aceita o critério de demarcação de Popper [2], ou seja, de que só são consideradas científica as teorias que produzem afirmações passíveis de refutação experimental. Podemos interpretar essas colocações como ressalvas a generalizações e aplicações da teoria kuhniana a outras áreas que não impedem, nem desestimulam, a procura de uma analogia forte entre o sistema exposto às ciências por Kuhn e, por exemplo, uma análise da Matemática.

Passaremos portanto a assumir uma posição kuhniana[2] frente a epistemologia das ciências e, a partir de então, buscar averiguar a adequação de sua aplicação à matemática.

# 2 A visão de Kuhn para as Ciências Empíricas

## 2.1 Esboço

De forma geral podemos resumir as principais idéias de Kuhn sobre o desenvolvimento e natureza das ciências empíricas como:

1 As ciências empíricas, uma vez adquirido o primeiro consenso (saída do estado pré-paradigmático), apresentam essencialmente períodos de desenvolvimento normal (onde há acordo quanto aos métodos e resultados) e revoluções (períodos de ruptura).

2 A ciência normal é realizada dentro de um paradigma que envolve a comunidade científica.

3 A mudança de paradigma (revolução) ocorre a partir de anomalias geradas pela ciência normal dentro do paradigma. As anomalias que persistem por muito tempo podem dar origem a novos paradigmas que podem vir a derrubar o paradigma vigente. A competição entre paradigmas envolve aspectos e argumentos incomensuráveis e extracientíficos.

4 A mudança de paradigma provoca uma mudança na visão de mundo.

5 A História da Ciência nem sempre é vista dessa forma devido à reconstrução e ao falseamento típico em livros didáticos.

## 2.2 Especificação:

Especificamos a seguir alguns dos principais pontos e conceitos desta teoria que julgamos serem imprescindíveis para uma compreensão adequada da obra de Kuhn.

### 2.2.1 Prescrição x Descrição

Um ponto nem sempre bem entendido na obra de Thomas Kuhn é no que se refere ao seu objetivo. Alguns afirmam que eles se restringem a uma descrição de como evoluiu a ciência ao longo da história. Não conteria assim nenhum juízo a respeito da natureza da Ciência ou de como a Ciência deveria de fato evoluir. Outros o acusam de não ter feito uma distinção clara entre os aspectos descritivos e prescritivos.

[2]É bem sabido que Thomas Kuhn não manteve todos os seus pontos durante toda a vida, tendo enfraquecido e suavizado algumas posições. Além disso um de seus principais questionamentos era o de ser mal interpretado, sendo célebre uma de suas frases: “Eu não sou kuhniano”. No entanto para os objetivos deste trabalho podemos considerar a sua posição como a expressa em [1] com as ressalvas do Post-Script e do artigo de [2].

Quanto a esse ponto Kuhn é esclarecedor na sétima parte do Postscript de [1]. Kuhn afirma que essa é uma falsa dicotomia e que ele pretende ser descritivo e prescritivo simultaneamente. Sustenta que na medida que descreve como as ciências têm evoluido, a partir de uma nova historiografia da ciência na qual se baseia, é inevitável que faça julgamentos acerca da natureza da ciência e da forma como os cientistas devam proceder. Ou, como afirma o autor

*Meu objetivo também é a compreensão da Ciência, das razões de sua eficácia, do status congnitivo de suas teorias. À diferença, porém, da maioria dos filósofos da ciência, comecei como historiador da ciência, examinando atentamente os fatos da vida científica".* [ Thomas Kuhn, [2] p. 292]

Vemos assim que seu objetivo vai muito além de uma descrição histórica ou sociológica da ciência ou de sua comunidade. Trata-se, portanto, de uma obra que procura apresentar uma nova concepção das ciências e precisa ser assim entendida para a devida compreensão de seus aspectos inovadores e polêmicos.

### 2.2.2 Paradigma

Um dos conceitos mais importantes cunhados por Kuhn, e também mais vulgarizados, é o de paradigma. Certamente um dos responsáveis pela liberalização do uso da palavra paradigma é o próprio Kuhn. Em uma das críticas a esse respeito (texto de Margaret Masterman p.75 de [2]) são apontados nada menos que 21 sentidos distintos da palavra paradigma no texto original de Kuhn [1]. A própria autora, no entanto, classifica em três principais grupos esses sentidos:

- Paradigmas metafísicos
- Paradigmas Sociológicos
- Paradigmas de artefato ou construção

No postscript de [1], Kuhn admite essa imprecisão e passa a tentar esclarecer sua intenção. Inicialmente trata de sair do círculo vicioso de definir paradigma em termos de crenças compartilhadas por uma comunidade científica e comunidade científica em termos da utilização de um paradigma. Para tanto define comunidade científica de forma independente, a partir de observações exclusivamente sociológicas do comportamento dos cientistas. Fica então livre para utilizar esse conceito na definição de paradigma.

Para Kuhn são dois os principais sentidos atríbuidos a paradigma, que ficarão mais claros quando analisarmos os períodos de troca de paradigmas:

- **Crenças,** valores e técnicas compartilhados por uma comunidade científica.
- **Exemplares,** definido por um exemplar, como a conjugação dos verbos em latim: *amo, amas, amat* é paradigmática e nos permite conjugar *laudo, laudas, laudat.*

### 2.2.3 Ciência Normal

A ciência praticada dentro de um paradigma é chamada ciência normal. Esta é a prática comum da ciência que saiu do estado pré-paradigmático, isto é, uma vez adquirido um primeiro acordo quanto à resultados e métodos. Essa prática assemelha-se à resolução de quebra-cabeças ou enigmas, cuja solução parece natural dentro do paradigma e os questionamentos sobre as bases e princípios do paradigma não ocorrem. São três as principais atividades desse tipo de ciência, nem sempre distintas ou separadas:

1 Empregar o paradigma onde ele funciona para determinar com maior precisão e em situações variadas.

2 Comparações diretas com previsões (raro). Entende-se como diretas, não a comparação com experiências isentas de teorias (o que certamente seria inviável), mas de uma comparação das previsões teóricas com os resultados das experiências interpretados dentro do paradigma.

3 Articulação do paradigma, isto é, procura de esclarecimento sobre ambiguidades e aplicação à áreas onde ele inicialmente não se destinava.

É importante ressaltar que, para Kuhn, o conceito de paradigma, e portanto da prática de ciência normal, é distinto e precede ao de teoria.[3]

### 2.2.4 Revolução

Os momentos de troca de paradigma ocorrem sempre por uma Revolução Científica, isto é, um período de ruptura da prática de ciência normal. A origem dessas trocas de paradigmas são anomalias surgidas na prática da ciência normal que mostram-se persistentes e de difícil resolução dentro do paradigma, mesmo depois que muitos recursos e especialistas se dedicaram a ela. Aos poucos a responsabilidade pelo fracasso das tentativas de resolução do enigma deixam de ser atribuidos exclusivamente aos cientistas e passa-se a questionar a validade do paradigma. Nesses momentos pode ocorrer o surgimento de um novo paradigma que solucione este enigma e que passe a competir e, eventualmente, derrubar o paradigma anterior.

Quando Kuhn refere-se a uma mudança de paradigma como uma mudança de visão de mundo não está aqui utilizando-se de uma figura de linguagem ou expressão. Afirma que observações e sensações recebidas após a troca de paradigma seriam impossíveis antes dela. Um de seus exemplos clássicos, retirado de [3], é o do surgimento e novas estrelas no céu. Apesar do incrível desenvolvimento da Astronomia ocidental este fenômeno jamais foi relatado enquanto predominava a visão geocêntrica e ptolomaica do mundo. Nesta concepção as esferas superiores à terrestre eram imutáveis e tal fenômeno seria inconcebível. O mais impressionante é que astronômos chineses do mesmo período relatam o surgimento de estrelas extremamente brilhantes, fenômeno que aparentemente seria impossível de não ser notado[4].

Uma das tentativas de caracterizar a mudança de paradigma é tentar associá-la a uma mudança de Gestalt. Isto é, muda-se radicalmente a forma como vemos e interpretamos um mesmo objeto. É importante ressaltar que a relação entre estímulos e sensações não é, comprovadamente, biunívoca. Sabendo que somente as sensações podem ser racionalizadas e registradas notamos a importância do paradigma com o qual observamos os fenômenos naturais.

[3] Nesse ponto é possível traçar um paralelo com o estudo de Lakatos realizado em classe e baseado em [4] onde o enunciado do teorema precede sua demonstração rigorosa.

[4] Sob o ponto de vista da ciência moderna compreendemos o surgimento de estrelas brilhantes como a explosão em super nova que faz com que determinada estrela, antes invísivel, tenha um brilho muito intenso durante alguns dias.

Figura 2: Mulher Velha e Mulher Nova, exemplo de mudança de gestalt.

Nesse sentido é interessante notar a distinção entre o concretismo A e B feita por Margaret Mastermann à página 94/95 de [2]. No primeiro caso trata-se da imagem levada inevitável e impliscitamente do objeto à teoria matemática enquanto o segundo caso seria a imagem que a teoria matematizada leva ao objeto. No caso da visão hipotético dedutiva, defendida brilhantemente por Karl Popper [5], somente o tipo B de concretismo é contemplado.

O ponto fundamental provocado por essa descrição da quebra de paradigmas é a mudança radical de um dos pontos mais importantes da epistemologia, a saber, a forma como se dá a escolha entre duas teorias ou paradigmas. Segundo Kuhn a comparação entre duas teorias nunca é completa uma vez que estas são Incomensuráveis, ponto que tratamos a seguir.

#### 2.2.5 Incomensurabilidade

A incomensurabilidade é reflexo da inexistência de uma linguagem neutra (matemática, lógica,...) capaz de permitir uma comparação entre os paradigmas. A mudança de paradigma implica uma mudança da semântica que liga as observações experimentais à teoria. O rompimento dessa semântica, que muitas vezes utiliza-se dos mesmos termos em sentidos bastante distintos, torna impossível a comunicação plena entre membros de paradigmas distintos. Uma analogia simplificada é a dificuldade de tradução completa entre duas linguas.

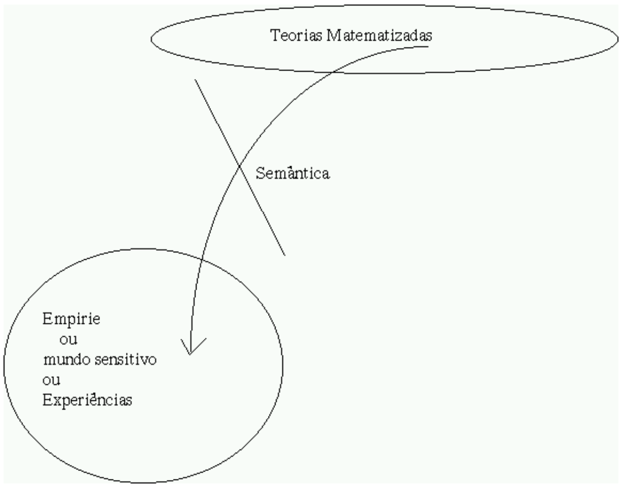


Figura 3: Ilustração da ruptura da semântica em uma Revolução Científica.

No item (9) de seu texto em [2] Paul Feyerabend ilustra um exemplo histórico de incomensurabilidade: a mudança da mecância celeste (CM) para a relatividade especial (SR).

*“ ...a extensão dos conceitos de uma nova teoria T a todas as suas consequências, incluindo os relatórios observacionais, pode mudar tanto a interpretação das consequências que elas desaparecem das classes de consequência de teorias anteriores. Essas teorias anteriores serão, então, incomensuráveis com T. A relação entre SR e CM é um caso ilustrativo. O conceito de comprimento usado em SR e o conceito de comprimento pressuposto em CM são diferentes. São ambos relacionais, e*

*muito complexos...*" [Paul Feyerabend, (9) de [2]]

### 2.2.6 Consequências

É interessante ressaltar o impacto dessa nova epistemologia da ciência quando comparada à concepção científica anterior. O critério de Popper para escolha entre duas teorias era o de reter aquela que possuía um conjunto maior de deduções de enunciados empiricamente verdadeiros sem possuir um único enunciado empiricamente falso. Como vimos, sob o ponto de vista de Kuhn essa comparação é impossível e a escolha entre teorias passa a depender de outras questões.

Kuhn admite um certo relativismo no seu processo de desenvolvimento da Ciência, mas destaca que sempre é possível distinguir entre duas teorias qual é aquela que sucedeu a anterior. Faz nesse ponto[5] uma analogia com a evolução biológica proposta por Darwin para os seres vivos.

Quanto às acusações de irracionalismo, Kuhn trata de rebatê-las. Segundo ele, sua teoria não afirma que é impossível a comunicação entre cientistas de dois paradigmas distintos. Ressalta que o debate ocorre e que sempre é possível encontrar bons motivos e argumentos para o convencimento. O que está impossibilitado é uma comparação total e unânime.

Outro ponto fundamental é a inclusão da ruptura no desenvolvimento histórico da Ciência que passa a não ser cumulativo.

# 3 Aplicação à Matemática

Como bem mostraram as discussões em sala de aula, a tentativa de enquadrar as teorias matemáticas envolvem diferentes visões da matemática. Procurarei organizar a comparação através da divisão entre as **teorias matemáticas** e as teorias que procuram embasar e interpretar a matemática que chamarei aqui de **teorias metamatemáticas**. O termo usado para caracterizar esta segunda área a ser abordada não deve ser confundido com o termo metamatemática cunhado por Hilbert e pela escola formalista. Nesse caso refiro-me às tentativas de compreensão e fundamentação da matemática tais como o Logicismo, Intuicionismo e o Formalismo. Apesar da relação intrínseca entre os dois conjuntos sustento a manutenção da divisão para fins didáticos pois parece existir uma distinção suficientemente clara daquilo que é considerado matemática daquelas afirmações sobre a matemática.

## 3.1 Teorias Matemáticas

O primeiro ponto que constatamos ao pensarmos no desenvolvimento das teorias matemáticas é seu inegável progresso ao longo dos últimos milênios. Considerando que uma das preocupações de Kuhn é justamente entender como e por que certas áreas do conhecimento progridem, é natural pensar que a matemática não se encontra em um estado pré-paradigmático onde o acordo e o progresso são bastante mais reduzidos.

Como um todo, o esquema geral para as ciências mais desenvolvidas certamente não se aplica à Matemática uma vez que, conforme notado, o ponto chave para a compreensão da revolução científica é a incomensurabilidade. Esta, por sua vez, ocorre para Kuhn, no relacionamento entre a teoria e o empírico. Uma vez que a matemática não relaciona-se com o

[5] Página 325 de [2].

empírico fica comprometido o cerne das rupturas no desenvolvimento histórico das ciências sendo possível determinar racionalmente e com perfeito acordo a disputa entre duas propostas distintas. Na citação a seguir Kuhn deixa clara a distinção entre essa disputa em uma ciência empírica e na matemática

> *"Num debate sobre a escolha de teorias, nenhuma das partes tem acesso a um argumento que se assememlhe a uma prova da lógica ou da matemática formal. Nesta última, tanto as premissas quanto as regras de inferência são estipuladas de antemão. Em havendo divergência no tocante às conclusões, as partes que figuraram no debate podem reconstituir os passos dados, um por um, conferindo cada passo com a estipulação anterior. No fim do processo, um ou outro terá de admitir que, num ponto isolado da discussão, se enganou, infringiu ou aplicou mal uma regra anteriormente aceita. Depois dessa admissão, não lhe resta nenhum outro recurso e a prova do adversário é irrecusável"* [Thomas Kuhn, [2] p. 3222].

É claro que historicamente é possível que em eventos isolados essa imparcialidade pode não ocorrer[6]. No entanto é preciso notar que isso não se deve a impossibilidades intrínsicas mas a questões sociais, políticas e até mesmo metafísicas. O que ocorre são reinterpretações, movimentos de rigorização (mudança do conceito de rigor) ou a revisão de teorias anteriores. No entanto, a descontinuidade no desenvolvimento das teorias matemáticas em seu nível corriqueiro e elementar está comprometida, a menos que se busque, assim como o fez Kuhn para as ciências empíricas, uma nova historiografia da matemática capaz de exemplificar na história da matemática um processo de ruptura.

É exemplar notar aqui a própria motivação manifesta de Kuhn para tecer sua tese expressa em [1]. Kuhn afirma que percebeu o quanto a ciência diferia da "concepção usual", estudando a física aristotélica e percebendo o quanto ela era desenvolvida, complexa e explicativa. No entanto, até mesmo os conceitos mais básicos de Aristóteles foram abandonados, e uma teoria vigorosa que durou séculos passou a ser ridicularizada e chamada de ingênua[7]. A matemática grega, por exemplo, é estudada e tomada como exemplo até hoje apesar de eventuais "lemas ocultos", demonstrações incompletas ou falta de rigor apontados e plenamente justificados pelo estágio de desenvolvimento da área.

Quanto aos conceitos individualmente, é possível encontrar alguma semelhança na matemática. Listamos a seguir a aplicação dos itens especificados na seção 2.2.

- **Paradigma:** dos dois sentidos de paradigma ilustrados na seção 2.2.2, notamos claramente uma semelhança no sentido de exemplares. Assim como nas ciências naturais a forma de realizar matemática envolve regras e exemplos paradigmáticos para resolução de problemas. Já o sentido de crenças e valores é parcialmente encontrado, distinguindo-se do caso das ciências empíricas uma vez que neste último caso a mistura do objeto de

[6]Por exemplo a traumática descoberta das grandezas incomensuráveis (os números irracionais) pelos gregos antigos.

[7]Outro exemplo de teoria que teve seus conceitos abandonados é a do flogístico. Esta teoria, que considerava o calor como sendo um fluído indestrutível, foi completamente abandonada o surgimento da Termodinâmica no século XVIII que reinterpretava o calor como uma forma de energia.

trabalho com a visão do cientista sobre o mundo exterior é muito maior.

- **Ciência Normal:** novamente, dos três sentidos apresentados na seção 2.2.3, certamente podemos encontrar na matemática traços muito similares (especialmente do primeiro e terceiro casos).
- **Revolução:** no sentido expresso por Kuhn, o termo parece não se aplicar à história da Matemática em si. É importante notar que a utilização do termo revolução visa distinguir a troca de paradigma nas ciências normais de momentos de revisão, reforma ou rigorização, termos aparentemente mais adequados à matemática.
- **Incomensurabilidade:** Não está presente.

Vemos assim que alguns dos aspectos sociológicos descritos por Kuhn podem estar presentes no desenvolvimento das teorias matemáticas. Este fato não é surpreendente uma vez que a comunidade de matemáticos se assemelha e muito à comunidade de cientistas de outras ciências duras. No entanto a maioria dos pontos centrais listados em 2.2.6 está ausente da evolução da história da matemática, que parece nunca abandonar seus trabalhos anteriores, sempre incorporando-os e reinterpretando seus conceitos nas teorias subsequentes.

## 3.2 Teorias Metamatemáticas

Se aparentemente no nível mais elementar da matemática pareceu-nos fácil concluir que o modelo de Kuhn falha em pontos essenciais, o mesmo não ocorre quando lidamos com as concepções <u>sobre</u> a matemática, sem esquecer o desenvolvimento e a produção da matemática propriamente dita. Para notar isso basta continuarmos a citação de Kuhn expressa acima (na seção 3.1), onde após ressaltar o acordo entre dois matemáticos competidores quanto a eventuais erros na dedução de uma asserção, ressalva:

> *Só quando os dois descobrem, em vez disso, que diferem a propósito do significado ou da aplicabilidade de uma regra estipulada, que seu consenso anterior não fornece uma base suficiente de prova, é que o debate se parece com o que ocorre inevitavelmente na ciência."* [Thomas Kuhn, [2] p. 322.]

O processo de conflito é explícito quanto aos métodos e regras de se fazer matemática. A discussão sobre a forma de fazer matemática e seu embasamento é tratada nessa seção sobre as teorias metamatemáticas. Inicialmente, buscamos entender como evoluiram as teorias metamatemáticas em si aplicando para tanto a teoria kuhniana. A seguir, e certamente é o ponto mais difícil e delicado deste trabalho, procuramos supor que as teorias metamatemáticas funcionariam como paradigma para a realização da própria matemática.

Sobre a citação acima, é importante notar ainda que uma diferença essencial é que o debate é eventual na matemática enquanto inevitável na ciência. Além disso Kuhn ressalta um "acordo quanto à divergência" enquanto que na Ciência Empírica não há sequer acordo quanto ao que se está divergindo uma vez que a própria linguagem completa e neutra inexiste, o que provoca a incomensurabilidade.

### 3.2.1 Em si

O desenvolvimento de teorias elaboradas sobre a metamatemática é um fenômeno recente (do final do século XIX e início do século XX), quando surgiram as correntes logicista, formalista e intuicionista [6]. Sem dúvida uma certa concepção sobre a natureza da matemática sempre esteve presente muitas vezes misturada à concepções metafísicas e vagas. Outro aspecto interessante é a ausência de progresso e consenso sobre pontos básico. Se pretendemos estudar como se deu a evolução da área do conhecimento que busca interpretar a matemática somos levados a pensar que a evolução das teorias metamatemáticas se encontrariam, dentro de uma visão kuhniana, em um estágio pré-paradigmático (ou multi-paradigmático para utilizar um termo alternativo proposto[8]).

Este quadro assemelha-se muito ao quadro geral da psicologia, onde as diferentes escolas estariam competindo entre si (Behavioristas, Freudianos, Jungianos, etc...). No entanto algumas distinções marcantes precisam ser ressaltadas. De certa forma todas as escolas mais fortes de interpretação da matemática (Logicista, Formalista e Intuicionista) parecem estar seriamente e, até certo ponto, irremediavelmente abaladas. Esta é uma situação pouco comum no estágio pré-paradigmático.

### 3.2.2 Como Paradigma das Teorias Matemáticas

Quando procuramos relacionar mais intimamente as teorias metamatemáticas com as teorias matemáticas em sí é que a evolução e a prática da matemática parece incorporar características mais típicas de áreas das ciências empíricas. Até certo ponto, nesse caso, as teorias metamatemáticas assumem o papel de paradigma que pareceu-nos mais ausente ao analisarmos as teorias matemáticas na seção 3.1. Por exemplo, adotando uma concepção Intuicionista, o que envolve a adoção de valores e crenças próprios, toda a realização da matemática é afetada. Por outro lado, a disputa entre essas diferentes correntes, apesar de ser inegável e marcante, não ocorre da forma expressa por Kuhn uma vez que e Incomensurabilidade advém de uma semântica ausente nesse caso.

Uma possibilidade de reconstruir essa incomensurabilidade seria a de, tomando como base a figura 3, realizar a seguinte substituição:

**teoria matematizada $\leftrightarrow$ metamatemática**

**mundo sensível $\leftrightarrow$ matemática**

A Incomensurabilidade poderia surgir, então, das diferentes interpretações que cada uma das metamatemáticas daria aos termos da matemática. Descobertas matemáticas[9], por sua vez, poderiam servir de argumentos na disputa entre esses paradigmas.

Uma abordagem que daria conta da aparente continuidade na história da matemática, quando vista em larga escala, seria levar em conta o fato da disputa e surgimento de teorias metamatemáticas ser muito recente. Assim, interpretaríamos que somente a partir do século XX a matemática e a metamatemática teriam adquirido uma maturidade suficiente, capaz de provocar disputas indecidíveis. Doravante a história da matemática poderia apresentar revoluções. Nesse caso, certamente a matemática não se enquadraria no esquema kuhniano para a passagem ao estado de ciência maduro uma vez que passou longo tempo havendo acordo e progresso. Além disso, é importante ressaltar que a teoria Kuhniana baseia-se, segundo suas próprias palavras, no estudo da história

[8]Margaret Mastermann em [2]

[9]O teorema de Gödel seria um bom exemplo.

das ciências. Procurar projetar seu esquema obriga-nos a estudar e interpretar a história recente da matemática o que eventualmente não é possível de ser feito dado o pouco distanciamento histórico.

No entanto, apesar das diferentes concepções que cada uma das escolas metamatemáticas possui parece que o ponto central da divergência é quanto ao valor atribuido a cada um dos conceitos. O conceito básico na aritmética é, para o intuicionista o de base, para o formalista o de conjunto, para o Logicista os conceitos da Lógica e para um categorista a noção de categoria. Apesar de tratar-se de uma discordância fundamental e anterior às próprias teorias, e nesse sentido similar às discordâncias entre paradigmas de Kuhn, ela leva à produção de resultados que são publicados nas mesmas revista e aceitos pela comunidade independente da posição pessoal do autor sobre os fundamentos da matemática.

Se procurássemos teorias metamatemáticas, ou a influência de concepções metamatemáticas anteriores ao século XIX parece ser bastante mais difícil encontrar polêmicas legítimas, que envolvessem argumentos metamatemáticos além daqueles metafísicos, e que implicaram em uma escolha e abandono de uma teoria antes aceita como válida. O que vemos é que, se certa vez um caminho foi escolhido em detrimento de outro, como por exemplo no caso do abandono da utilização de infinitésimos quando da invenção do Cálculo, mantêm-se os resultados anteriores por completo e em pouco tempo reinterpreta-se de forma completa e satisfatória o conceito antes abandonado. Essa situação aparentemente se repete nas ciências empíricas, como por exemplo no caso da suposta generalização da relatividade em relação à mecânica clássica, mas é refutada por Kuhn e outros. Kuhn aponta eventos históricos[10] onde fica evidente que há perdas de poder explicativo em revoluções científicas e que a generalização não ocorre de forma geral se olharmos do ponto de vista da teoria anterior.

Nessa interpretação teríamos que considerar o surgimento das correntes mais elaboradas de metamatemática como uma revolução. No entanto, historicamente, a disputa entre essas escolas também não mostrou ter evoluído para um paradigma único uma vez que o projeto Formalista, que aparentemente congrega o maior número de adeptos na comunidade de matemáticos, fracassou após o Teorema da Incompletude de Gödel. Ilustramos aí uma espécie de *experiência-crucis* para a escolha entre paradigmas ou teorias, algo que aparentemente existe e é sustentado por muitos filósofos das ciências empíricas, mas que Kuhn ardorosamente trata de desmistificar.

Apesar das elocubrações e tentativas de aplicar o esquema kuhniano tendo a metamatemática como paradigma para a matemática, diversas críticas permanecem. A principal é a de que, nas ciências empíricas, não existe uma distinção tão clara entre o paradigma da ciência e o fazer ciência. A visão que o paradigma traz do mundo sensível e que impregna a teoria em questão são parte inseperável da atividade diária do cientista. Não é possível distinguir tão claramente como na matemática essas atividadese a ponto de haver acordo entre os participantes [11]. Por exemplo, um dos

[10] Em [3] aponta como explicações naturais no modelo ptolomaico, como o fato de todos planetas girarem na mesma direção, estão ausentes no modelo copernicano.

[11] É verdade que essa distinção foi acentuada pela forma escolhida de organização deste trabalho. Acredito, no entanto, que ela persiste a uma análise unificada

argumentos contra os intuicionistas é o fato de sua maneira de produzir matemática restringir drásticamente a possibilidade de obter muitos resultados importantes que a matemática c;ássoca obteve. Admite-se portanto a existência de uma matemática fora do paradigma (clássico), o que é impossível para Kuhn. Por outro lado o Intuicionismo foi formalisado percebendo-se que poderia ser interpretado como uma nova Lógica aplicada à matemática. Desse ponto de vista volta a haver um acordo quanto aos métodos e instrumentos utilizados: há acordo em apontar os pontos em que se discorda. Há também acordo em considerar como matemáticas, teorias axiomáticas embasadas em lógicas distintas, desde que formalisadas.

# 4 Conclusões

Devido a muitas semelhanças entre as comunidades científicas das ciências empíricas e da matemática, muitos dos pontos sociológicos descritos por Kuhn podem ser encotrados na Matemática. No entanto os aspectos centrais e inovadores da teoria kuhniana parecem falhar uma vez que teorias matemáticas são comensuráveis, isto é, podem ser comparadas e escolhidas a partir de uma linguagem neutra. A incomensurabilidade é apontada em Kuhn como um reflexo da quebra da semântica que liga as teorias ao "mundo empírico" que, uma vez ausente da matemática, limita a aplicação desse esquema epistemológico.

É importante ressaltar aqui que a epistemologia de Thomas Kuhn não limita-se a uma descrição histórica ou sociológica. A utilização da teoria de Kuhn limitada ao seu caráter descritivo certamente gera muitas ambiguidades e despreza a essência e inovação de seu trabalho.

Ao procurarmos incorporar as concepções metamatemáticas, tanto em sua evolução isolada como em sua relação com a matemática, podemos notar semelhanças e possibilidades de conexão com a teoria de Kuhn. No entanto aparentemente uma analogia mais sólida e completa parece falhar sistematicamente.

A analogia mais completa deve surgir necessariamente de uma revisão das concepções da história da matemática que têm sido feitas até hoje. Somente através desse estudo meticuloso e da apresentação de períodos de ruptura na história da matemática é que podemos procurar uma analogia mais profunda com a teoria Kuhniana.

Colocadas essas ressalvas que podem vir a alterar a interpretação epistemológica da matemática, podemos concluir que a evolução da matemática difere substancialmente da evolução das ciências empíricas, o que reflete as diferentes naturezas dessas áreas do conhecimento. Não se mostrou possível uma analogia suficientemente sólida entre os conceitos utilizados por Kuhn, ligados diretamente às ciências naturais, e as teorias matemáticas. O estudo da epistemologia da matemática deve, portanto, buscar um embasamento distinto, ainda que eventualmente inspirado no modelo Kuhniano. A tomada de termos particulares, abandonando o modelo como um todo e sem apresentar um novo modelo coerente, não será suficiente para dar conta das peculiaridades e contradições que, apesar de muitas vezes pouco aparentes, permeiam as a Matemática.

# Referências

[1] Thomas Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago University Press, 2nd Edition (1970).

[2] Imre Lakatos e Alan Musgrave (Orgs.), *A crítica e o desenvolvimento do conhecimento* Editora Cultrix/Editora da USP, São Paulo (1979).

[3] Thomas Kuhn, *The Copernican revolution; planetary astronomy in the development of Western thought*, Harvard University Press, Cambridge (1957).

[4] Imre Lakatos, *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações* Zahar Editores, Rio de Janeiro (1976).

[5] Karl Rudolf Popper, *Lógica da pesquisa científica* Editora Cultrix, São Paulo (1975).

[6] Newton C. A. da Costa, *Introdução aos fundamentos da matemática.* Hucitec, São Paulo (1977).