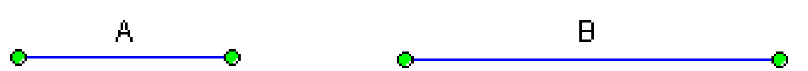
Um pouco da
História dos Números Complexos

Antonio Carlos Brolezzi

Álgebra Geométrica

- Típica da Grécia Antiga
- Assunto do Livro II de Os Elementos de Euclides
- Um número é representado por um segmento de reta



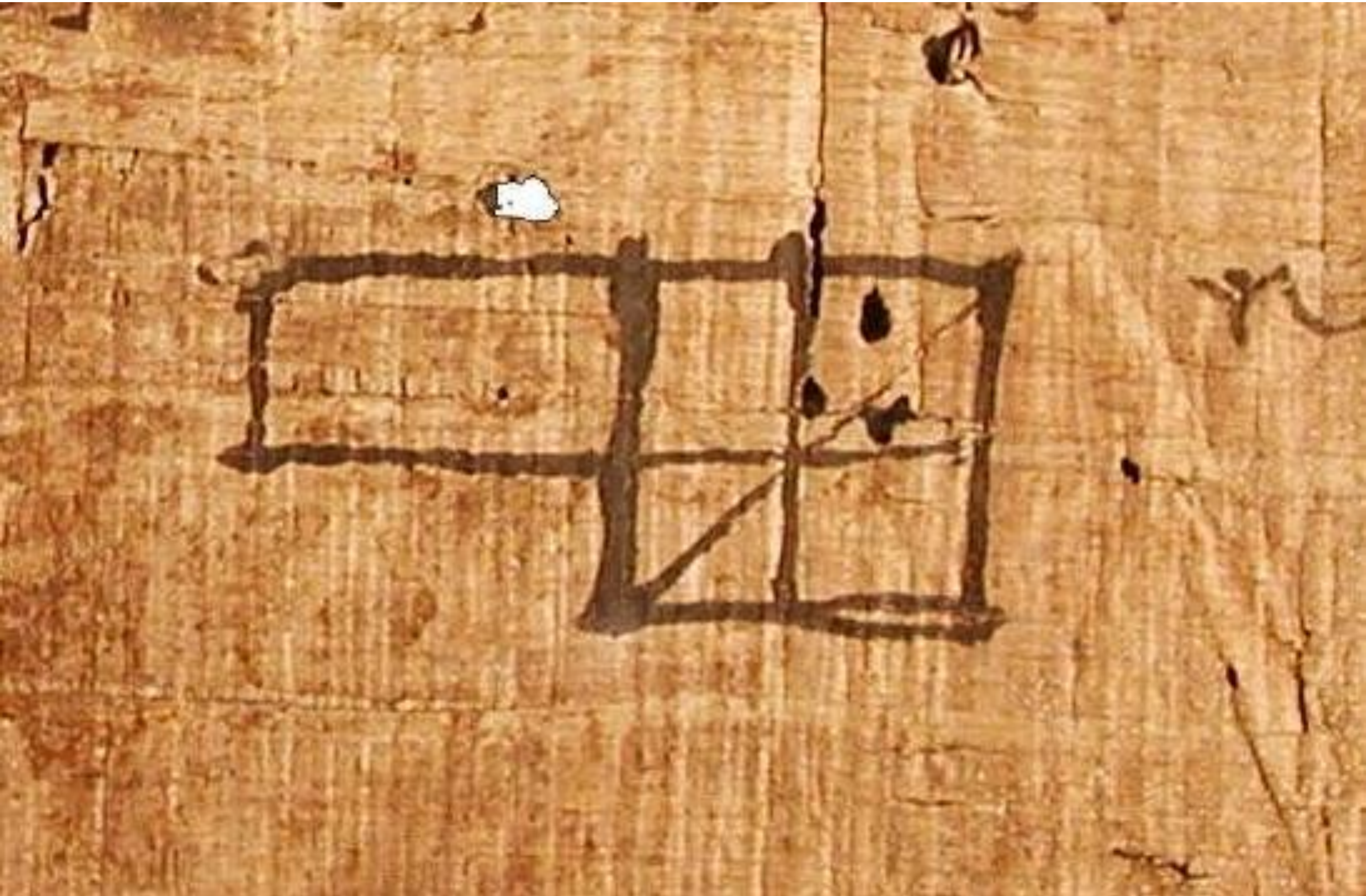
Álgebra Geométrica

Livro II de Os Elementos de Euclides (300

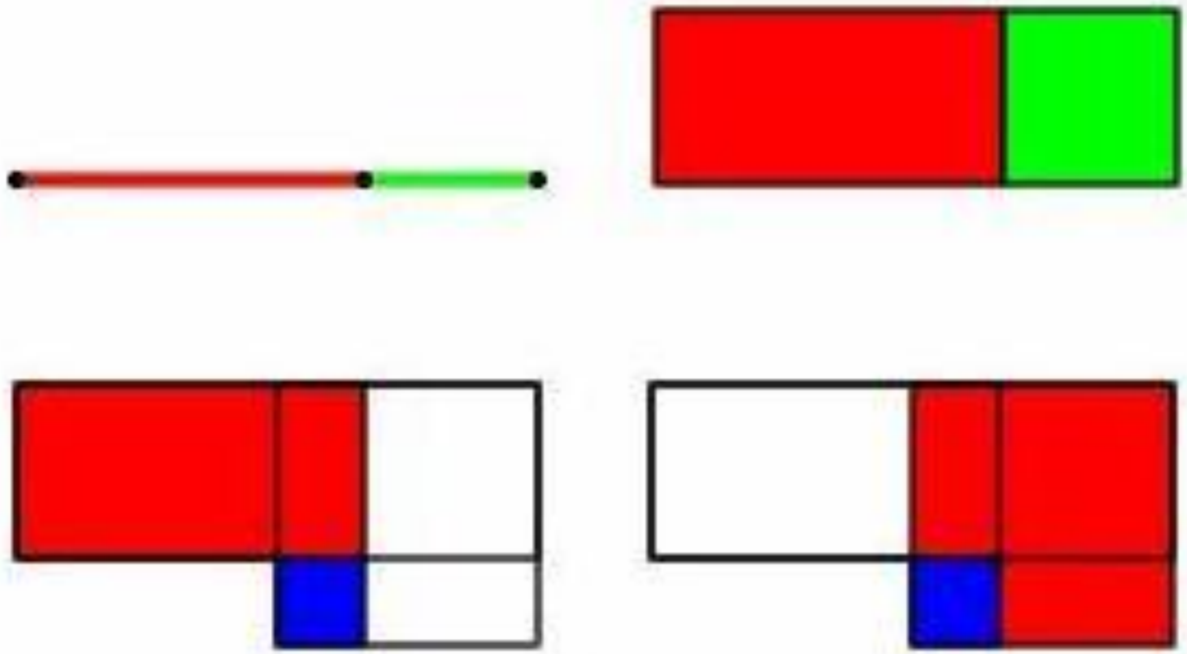
Fragmento da Proposição 5

$\boldsymbol{ab + (a-b)^2/4 = (a+b)^2/4}$

Fragmento da Proposição 5: $\boldsymbol{ab + (a-b)^2/4 = (a+b)^2/4}$



$ab + (a-b)^2/4 = (a+b)^2/4$



Fórmula de Bháskara

Nome dado no Brasil à fórmula da equação do 2º grau em homenagem a

Bháskara (ou Bháskara II ou Bhaskaracharya – Bháskara o Professor)

Astrônomo hindu que viveu entre 1114 e 1185.

Chefe do observatório astronômico de Ujjain, na Índia, local onde já tinham trabalhado os astrônomos e matemáticos
Varahamihira (505 - 587) e
Brahmagupta (598 - 670).

Bháskara I (c. 600 - c. 680)
Primeiro a escrever no sistema decimal
indo-arábico usando um círculo para o zero.

Os hindus desenvolveram os métodos babilonios e Brahmagupta (598-665) usava já abreviações para incógnitas e admitia valores negativos.

Os árabes não lidavam com negativos nem tinha abreviações, mas Al-Khwarizmi (800) classificou os diversos tipos de equações algébricas usando raízes, quadrados e números, em linguagem moderna seriam x, x^2 e constantes.

Al-Khwarizmi

- Escreve o livro *Al-kitab al muhta-sar fy hisab al jabr wa al-muqabalah* (O livro breve para o cálculo da *jabr* e da *muqabalah*)
- No prefácio "enfatiza seu objetivo de escrever um tratado popular que, ao contrário da matemática teórica grega, sirva a fins práticos do povo em seus negócios de heranças e legados, em seus assuntos jurídicos, comerciais, de exploração de terra e de escavação de canais" p. 17
- Álgebra retórica, mas que também usava figuras geométricas nas demonstrações

Jabr e Muqabalah

1) Jabr: Restabelecer, restaurar à “forma adequada” (álgebrista na Espanha, significava ortopedista)

- A “forma adequada” é aquela que não contém números negativos

2) Muqabalah: estar frente-a-frente

- Eliminar termos iguais de ambos os lados da equação

Fórmula de Bháskara: vem da relação entre quadrados

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

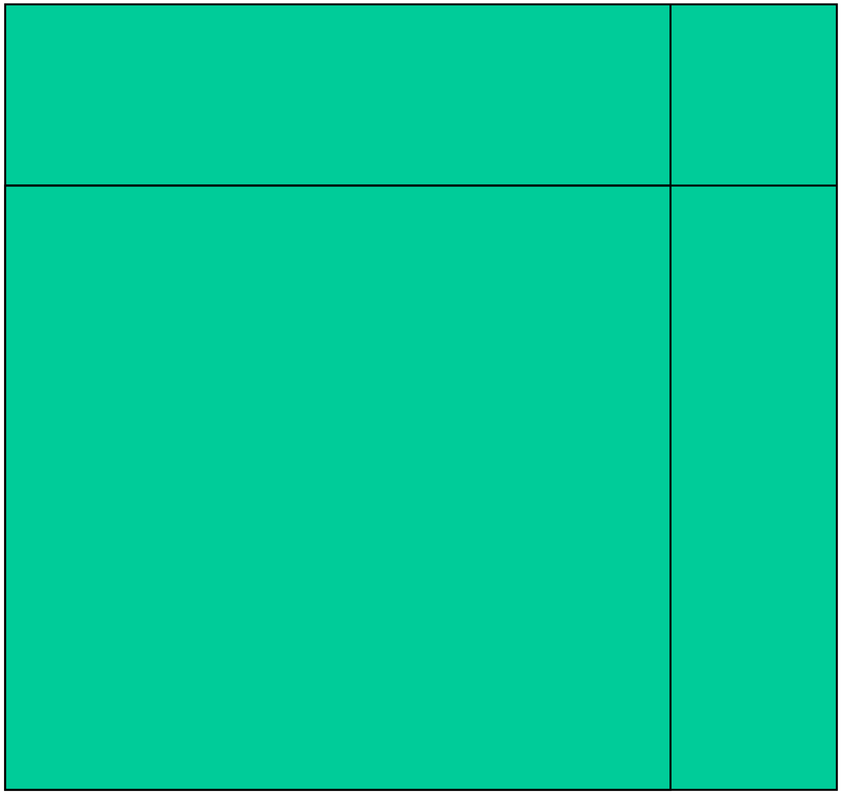
Fórmula de Bháskara: uma aplicação de quadrados perfeitos

Fórmula de Bháskara

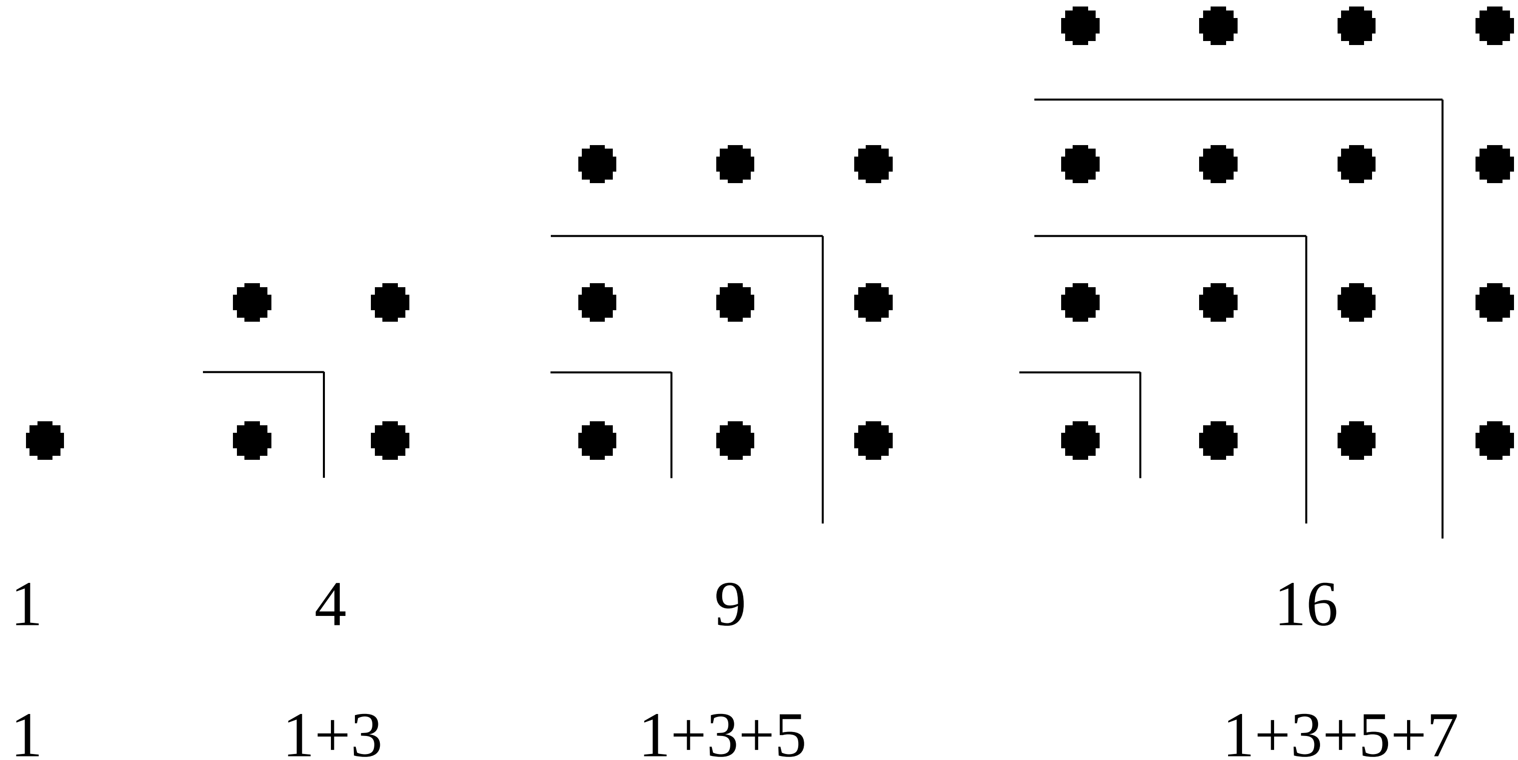
$$ax^2 + bx + c = 0$$

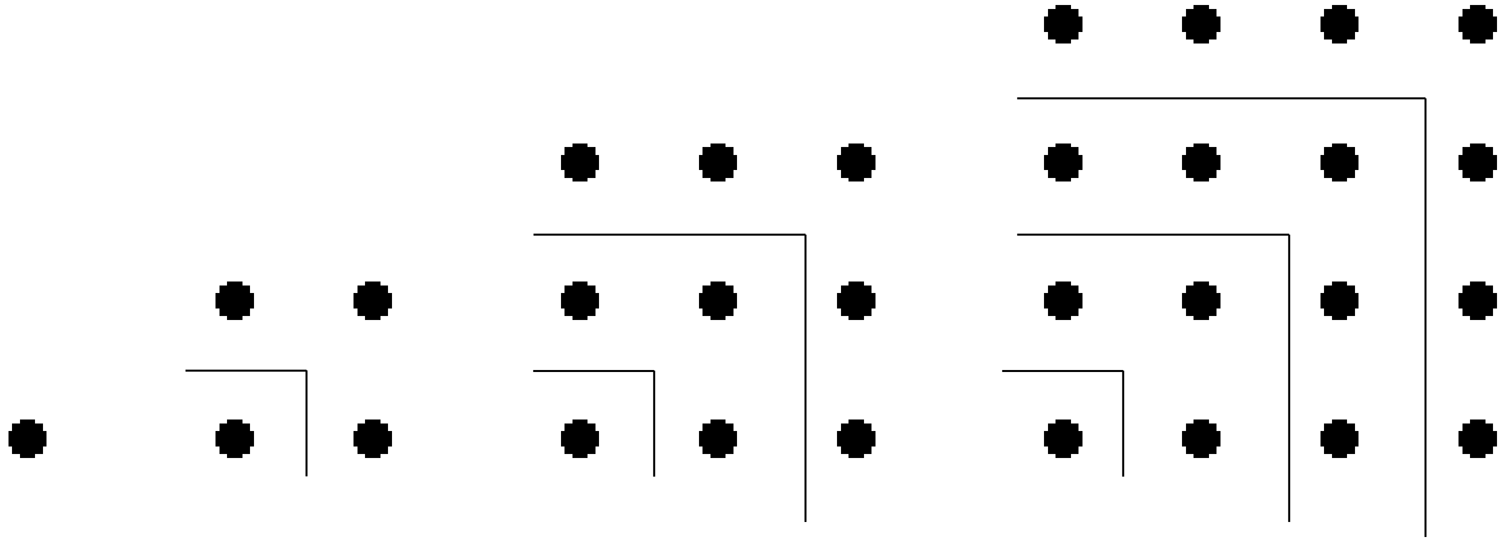
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O quadrado da soma: uma relação conhecida há muitos milênios



$$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$


1
4
9
16
1
1+3
1+3+5
1+3+5+7



1	4	9	16
1	1+3	1+3+5	1+3+5+7

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se $2n + 1 = m^2$,

então $n = (m^2 – 1)/2$

e $n + 1 = (m^2 + 1)/2$

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se $2n + 1 = m^2$, então $n = (m^2 – 1)/2$ e $n + 1 = (m^2 + 1)/2$,

isto é, a fórmula acima se escreve como

$$(m^2 – 1)^2/4 + m^2 = (m^2 + 1)^2/4$$

m	$(m^2 – 1)/2$	$(m^2 + 1)/2$
3	4	5

Em 1494 surgiu na Europa a primeira edição de *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, de Luca Pacioli.

Já resolvia alguns tipos de equações de grau 4.

Frei Luca Pacioli (1445-1517)

Scipione del Ferro (1465-1526) era professor da Universidade de Bologna e conheceu Pacioli quando este visitou Bologna nos anos 1501-2.

Del Ferro conseguia resolver a cúbica da forma $x^3 + mx = n$.

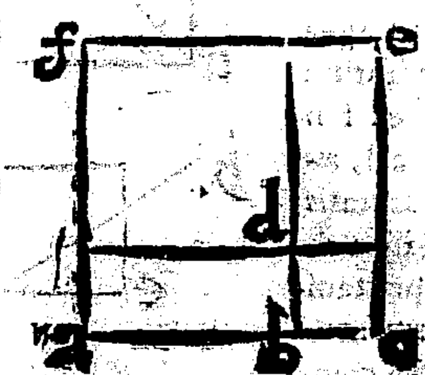
Como ele teria chegado à fórmula?

CAPUT XII.

De Cubo æquali rebus & numero.

DEMONSTRATIO.

SIT etiam cubus æqualis rebus & numero, & ſint duo cubi d c & d e, quorum latera a b & b c, producant tertiam partem numeri rerum, inuicem ducta, & ipſi cubi iuncti æquales illi numero, dico a c eſſe rei quæſitæ æſtimationem, cùm enim ex a b in b c fiat tertia pars numeri rerum, ex a b in b c ter, fiet numerus rerum, & ex a c in productum ex a b in b c ter, fient res ipſæ, poſita a c re, at ex a c in produ-



ctum a b in b c ter, fiunt ſex corpora, quorum tria ſunt ex a b in quadratum b c, alia tria ex b c in quadratum a b, hæc igitur ſex

cubicam 20. p̃. ℞. 392 p̃. ℞. v. cubica 20. m̃. ℞. 392. Aliud, cubus æquatur 6. rebus p̃. 6. tertiam partem numeri rerum, quæ eſt 2. ad cubũ ducito, fit 8. detrahe ex 9. quadrato dimidij 6 numeri æquationis, relinquitur 1. cuius ℞. eſt 1. hanc adde & minue à 3. dimidio numeri, fiunt partes, 4. & 2. quarum ℞. cubicæ iunctæ, faciunt ℞. cubicam 4. p̃. ℞. cubica 2. æſtimationem rei.

At vbi cubus tertiæ partis numeri rerum, excedat quadratum dimidij numeri, æquationis, quod accidit quandocunque numerus æquationis eſt minor $\frac{3}{4}$ cubi illius, vel vbi ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum, producitur in ℞. $\frac{1}{3}$ eiuſdem numeri maior numerus numero æquationis, tunc conſules librum Alizæ hîc adiectum.

CAPUT XIII.

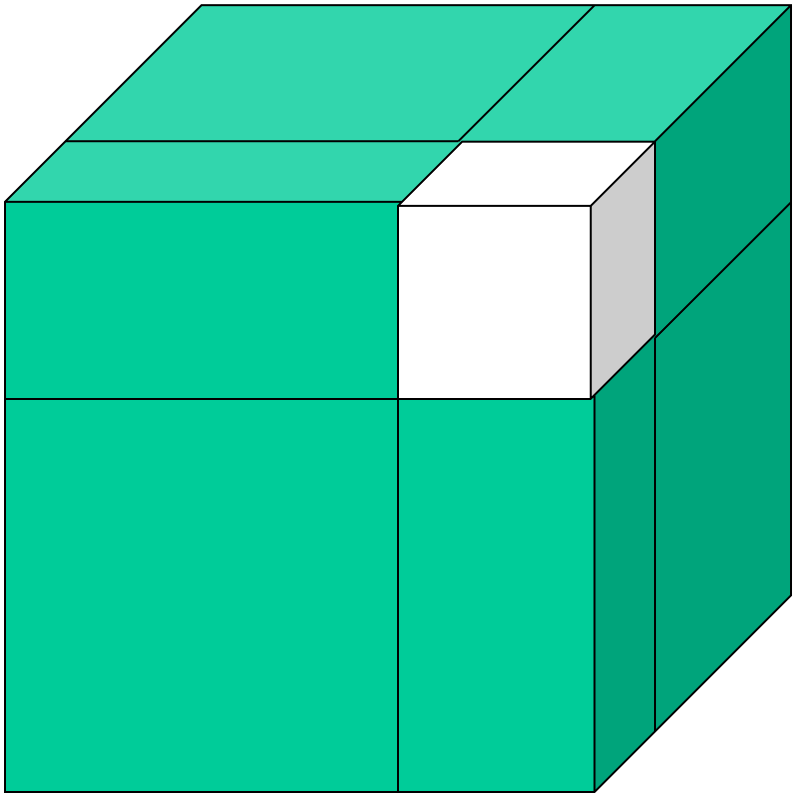
De Cubo & numero æqualibus rebus.

DEMONSTRATIO.

HOc capitulum ex præcedenti trahitur, ſit igitur cubus g h, æqualis rebus a b, quæ deſcribuntur quadrata ſuperficie & numero f, & ſit baſis cubi g h, quadratum g k, cuius pars quarta ſit h l reſi-

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$



Livro 10 de “Os Elementos” de Euclides (300 aC)

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3$$

$$x^3 + mx = n$$

Onde:

$x = a - b$
$m = 3ab$
$n = a^3 - b^3$

$$b = \frac{m}{3a} \Rightarrow n = a^3 - \left(\frac{m}{3a}\right)^3$$

$$a^3 n = a^6 - \frac{m^3}{27}$$

$$a^6 - na^3 - \frac{m^3}{27} = 0$$

$$\left(a^3\right)^2 - n\left(a^3\right) - \frac{m^3}{27} = 0$$

$$a^3 = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4\frac{m^3}{27}}}{2}$$

$$a^3 = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

$$\therefore b^3 = a^3 - n = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2}$$

Temos:

$$a^3 = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} + \frac{n}{2} \qquad b^3 = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2}$$

Como $x = a - b$ então

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} + \frac{n}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2}}$$

Fórmula de Cardano para $x^3 + mx = n$

Tartaglia (1499-1557)

Pouco antes de morrer em 1526, Scipione revelou seu método para seu aluno Antonio Fior.

Fior espalhou a notícia e logo Nicolo de Brescia, conhecido como Tartaglia conseguiu resolver equações da forma $x^3 + mx^2 = n$ e também espalhou a notícia

Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública e cada um podia dar ao outro 30 problemas com 40 ou 50 dias para resolvê-los.

Girolamo Cardano (1501-1576)

Tartaglia resolveu todos os problemas de Fior em 2 horas, pois todos eram do tipo
$x^3 + mx = n$.
Mas 8 dias antes do fim do prazo, Tartaglia encontrou um método geral para todos os tipos de cúbicas.

Essa notícia chegou a Girolamo Cardano em Milão onde ele se preparava para publicar sua *Practica Arithmeticae* (1539).
Cardano convidou Tartaglia para visitá-lo.

Cardano convenceu Tartaglia a contar para ele seu segredo, promentendo aguardar até que Tartaglia o tivesse pulicado, mas em 1545 Cardano publicou o segredo de Tartaglia em seu *Ars Magna*.
Nessa obra, Cardano resolve $x^3 + mx = n$.

Cardano percebeu algo estranho quando aplicava o método a $x^3 = 15x + 4$, obtendo uma expressão envolvendo a raíz quadrada de -121.

Girolamo Cardano (1501-1576)

credat. Huius æmulatione Nicolaus Tartalea Brixellensis, amicus noster, cum in certamen cum illius discipulo Antonio Maria Florido venisset, capitulum idem, ne vinceretur, inuenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit. Deceptus enim ego verbis Lucæ Paccioli, qui ultra sua capitula, generale ullum aliud esse posse negat (quanquam tot iam antea rebus à me inuentis, sub manibus esset) desperabam ta-

Cardano sabia que x = 4 era uma solução da equação. Então escreveu para Tartaglia em 4
de agosto de 1539 para tirar sua dúvida. Tartaglia não soube explicar, então Cardano publicou sua solução que envolvia “números complexos” sem entendê-los, dizendo que isso era “tão sutil quanto inútil”.

Girolamo Cardano (1501-1576)

Na equação $x^3 = 15x+4$

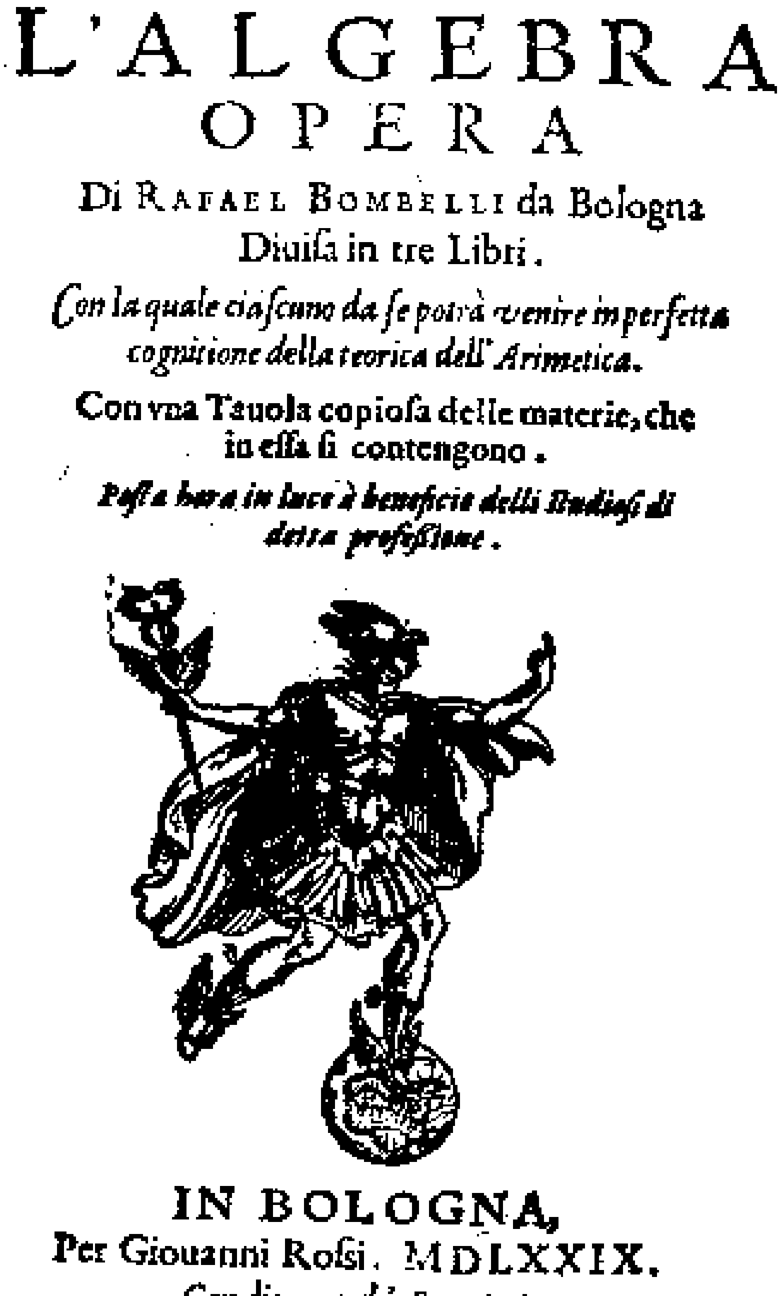
$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3} + \frac{4}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3} - \frac{4}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{4-125}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{4-125}-2}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}$$

Mas sabemos que x = 4 é solução da equação, pois 64=15x4+4.

Como é possível?



L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Esse caso irredutível da cúbica, em que a fórmula de Cardano leva a uma raiz quadrada de número negativo, foi resolvido por Rafael Bombelli em 1572.

Bombelli dá pela primeira vez forma às operações com números complexos (sem saber bem o que eles eram).

Bombelli e seu “pensamento rude”. Ele pensou que:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = p+\sqrt{-q}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = p-\sqrt{-q}$$

Então

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = (p+\sqrt{-q})(p-\sqrt{-q})$$

$$\sqrt[3]{4+121} = p^2+q$$

Ou seja $\quad 5 = p^2+q \quad$ (I)

Além disso, $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = p+\sqrt{-q}$

$$2+\sqrt{-121} = p^3 + 3p^2\sqrt{-q} + 3p(-q) + \left(\sqrt{-q}\right)^3$$

$$2+\sqrt{-121} = \left(p^3 - 3pq\right) + (3p^2 - q)\sqrt{-q}$$

$$2 = p^3 - 3pq \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), $p^3 - 3(5 - p^2)p = 2$

$$p^3 - 15p + 3p^3 = 2$$

$$4p^3 - 15p = 2$$

$$4p^3 - 15p = 2$$

Dessa equação cúbica, temos que p = 2 e q = 1.
Portanto Bombelli obteve a chave do seu enigma:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

Portanto, a raiz pode ser obtida por

$$x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$$

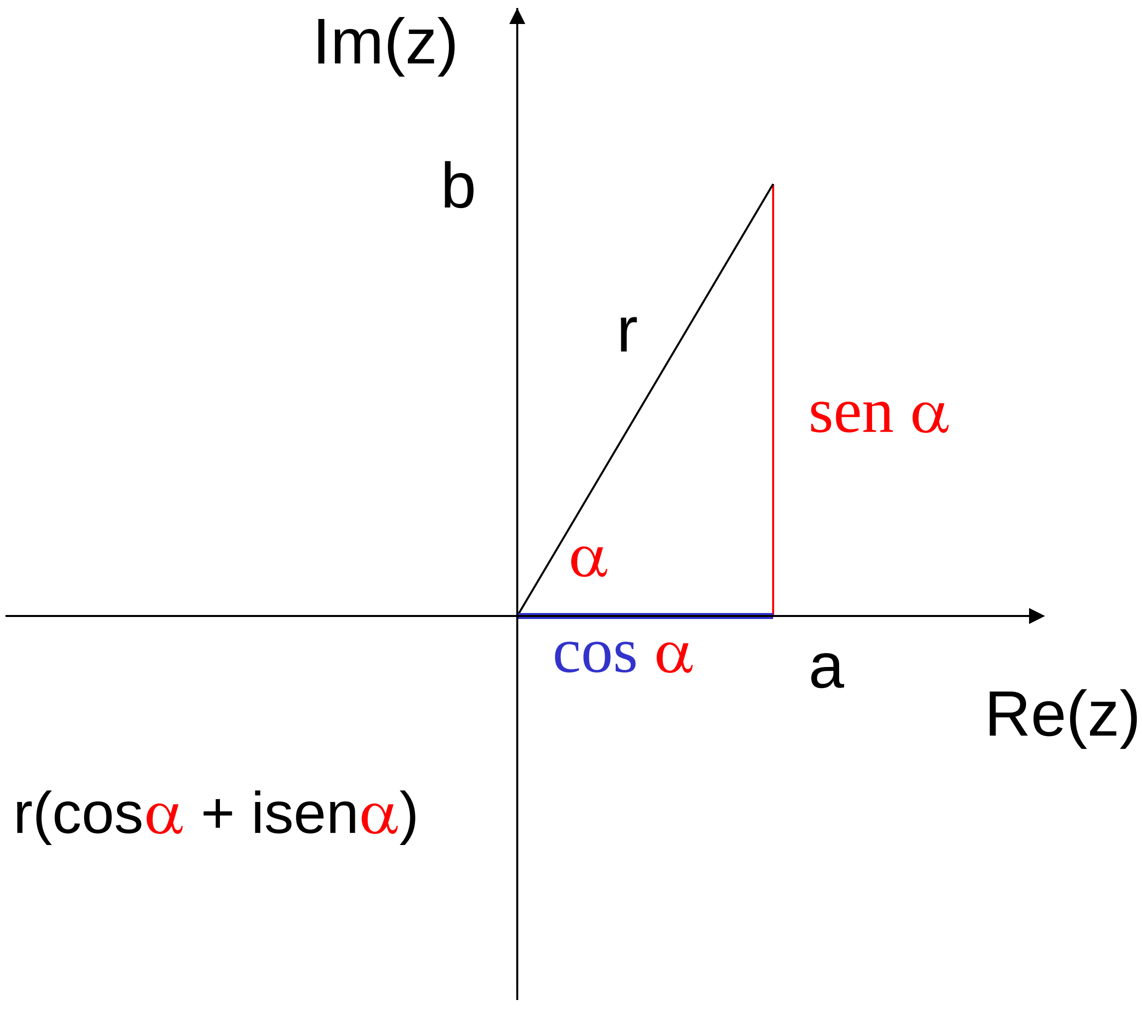
A Álgebra lida com coisas desconhecidas como se fossem conhecidas.

Essa é uma das definições do pensamento matemático criativo:

Lidar com o conhecido como se fosse desconhecido, e com o desconhecido como se fosse conhecido.

Fazer do familiar, estranho; e do estranho, familiar.

Os Números Complexos passarão a ser representados no plano que virá a ser conhecido como Plano de Argand-Gauss.



$z = a + bi = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$

O alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi o primeiro a utilizar seriamente a notação do plano trigonométrico para representar os Números Complexos, divulgando a representação criada pelo suiço Jean-Robert Argand (1768-1822). A representação geométrica dos complexos foi chamada por Gauss de “a verdadeira metafísica das quantidades imaginárias”.

Carl Friedrich Gauss, O retrato de corpo inteiro, de R. Wimmer no Deutsches Museum, Munich, RFA (1925).