NÚMEROS

Parte 2

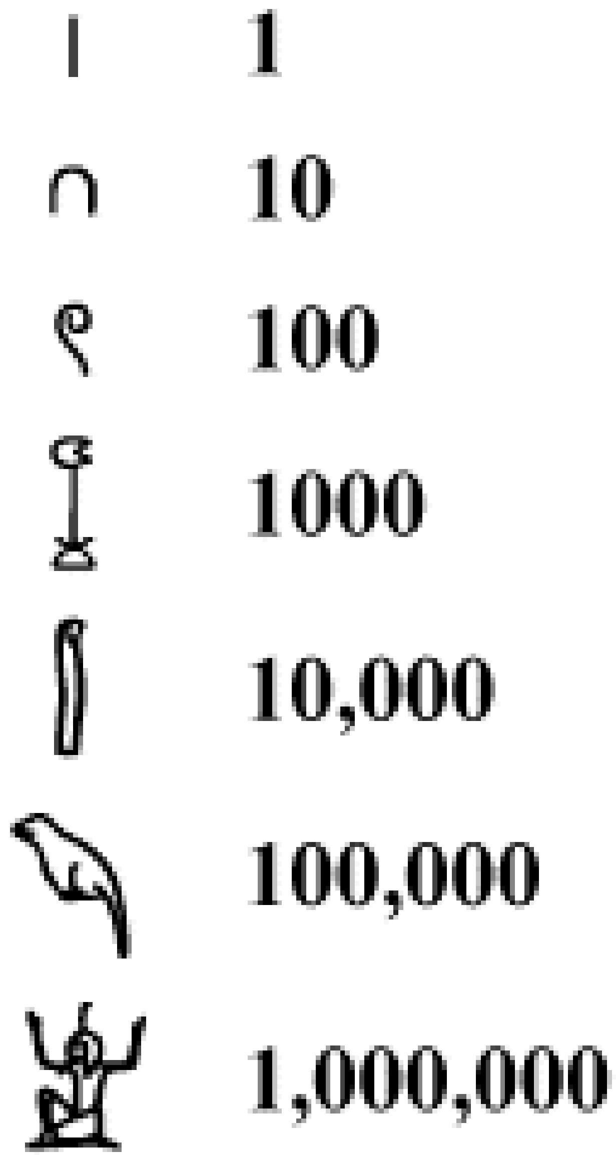
Antonio Carlos Brolezzi

www.ime.usp.br/~brolezzi
brolezzi@usp.br

Os símbolos numéricos

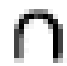
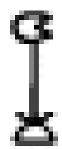
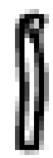
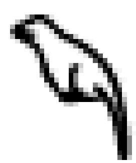
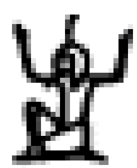
Com o nosso sistema de numeração, usando apenas dez símbolos diferentes, podemos escrever qualquer número, enquanto que, nas numerações egípcia e romana, para se escrever números muito grandes seria preciso criar novos símbolos: um para o dez mil, outro para o dez milhões, outro para o cem milhões etc.

Numerais egípcios



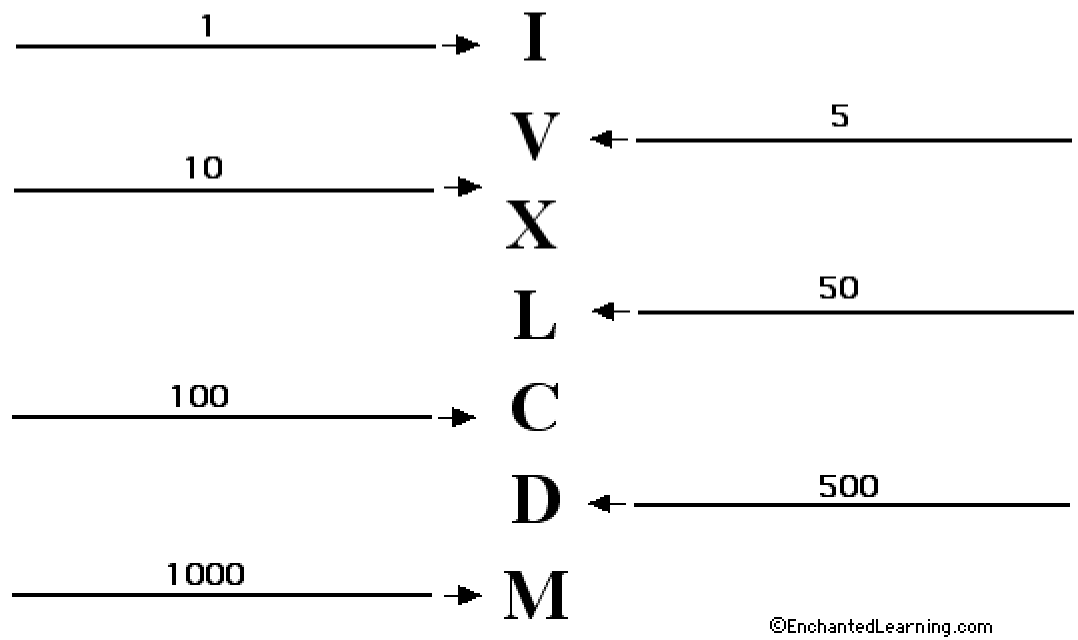
Numerais egípcios

Utilizavam base 10 mas sem valor posicional

	1
	10
	100
	1000
	10,000
	100,000
	1,000,000

Numerais romanos

- Derivados dos numerais etruscos (antigo povo que habitava a Itália), são usados até hoje!
- Utilizavam base 10.
- A posição era importante mas em outro sentido (princípio subtrativo)



I	1
II	2
III	3
IV	4
V	5
VI	6
VII	7
VIII	8
IX	9
X	10
XI	11
XII	12
XIII	13
XIV	14
XV	15
XVI	16
XVII	17
XVIII	18
XIX	19
XX	20

XXI	21
XXII	22
XXIII	23
XXIV	24
XXV	25
XXVI	26
XXVII	27
XXVIII	28
XXIX	29
XXX	30
XXXI	31
XXXII	32
XXXIII	33
XXXIV	34
XXXV	35
XXXVI	36
XXXVII	37
XXXVIII	38
XXXIX	39
XL	40

XLI	41
XLII	42
XLIII	43
XLIV	44
XLV	45
XLVI	46
XLVII	47
XLVIII	48
XLIX	49
L	50
LI	51
LII	52
LIII	53
LIV	54
LV	55
LVI	56
LVII	57
LVIII	58
LIX	59
LX	60

LXI	61
LXII	62
LXIII	63
LXIV	64
LXV	65
LXVI	66
LXVII	67
LXVIII	68
LXIX	69
LXX	70
LXXI	71
LXXII	72
LXXIII	73
LXXIV	74
LXXV	75
LXXVI	76
LXXVII	77
LXXVIII	78
LXXIX	79
LXXX	80

LXXXI	81
LXXXII	82
LXXXIII	83
LXXXIV	84
LXXXV	85
LXXXVI	86
LXXXVII	87
LXXXVIII	88
LXXXIX	89
XC	90
XCI	91
XCII	92
XCIII	93
XCIV	94
XCV	95
XCVI	96
XCVII	97
XCVIII	98
XCIX	99
C	100
D	500
M	1000

Numerais romanos:

observe que o “4” no relógio não segue o princípio subtrativo, para tornar a leitura mais clara.

Numerais babilônios

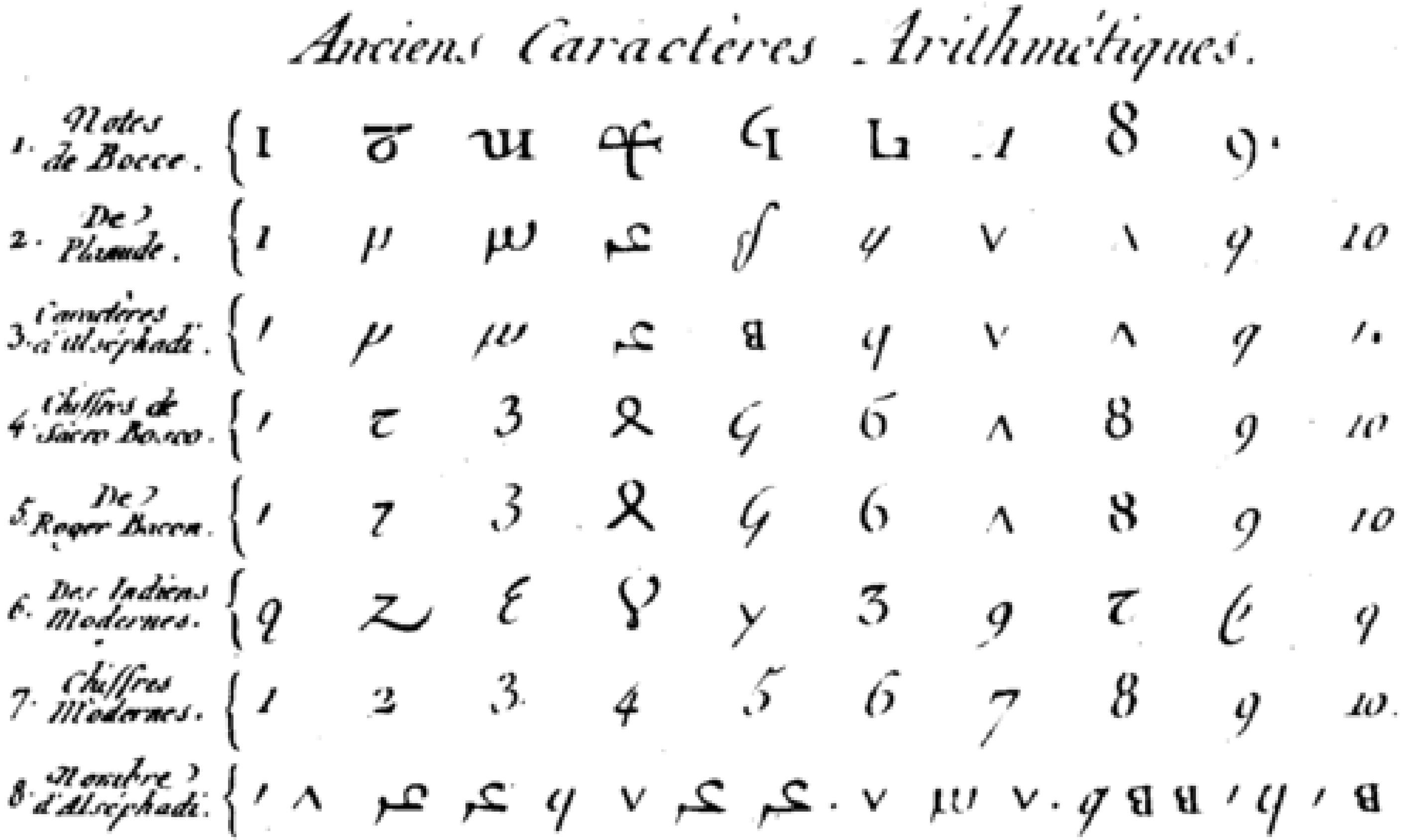
- Os babilônios usavam base sexagesimal (base 60, como nos minutos e segundos)
- Tinham valor posicional, pois sua escrita em tabletas de barro era muito complexa.

Os sistemas de numeração antigos apresentavam uma dificuldade especial:

era muito trabalhoso efetuar cálculos usando esses números.

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.



Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.

Os hindus souberam reunir três características que já apareciam em outros sistemas numéricos da Antiguidade:

o sistema de numeração hindu é decimal (o egípcio, o romano e o chinês também o eram);

o sistema de numeração hindu é posicional (o babilônio também era);

o sistema de numeração hindu tem o zero, isto é, um símbolo para o nada.

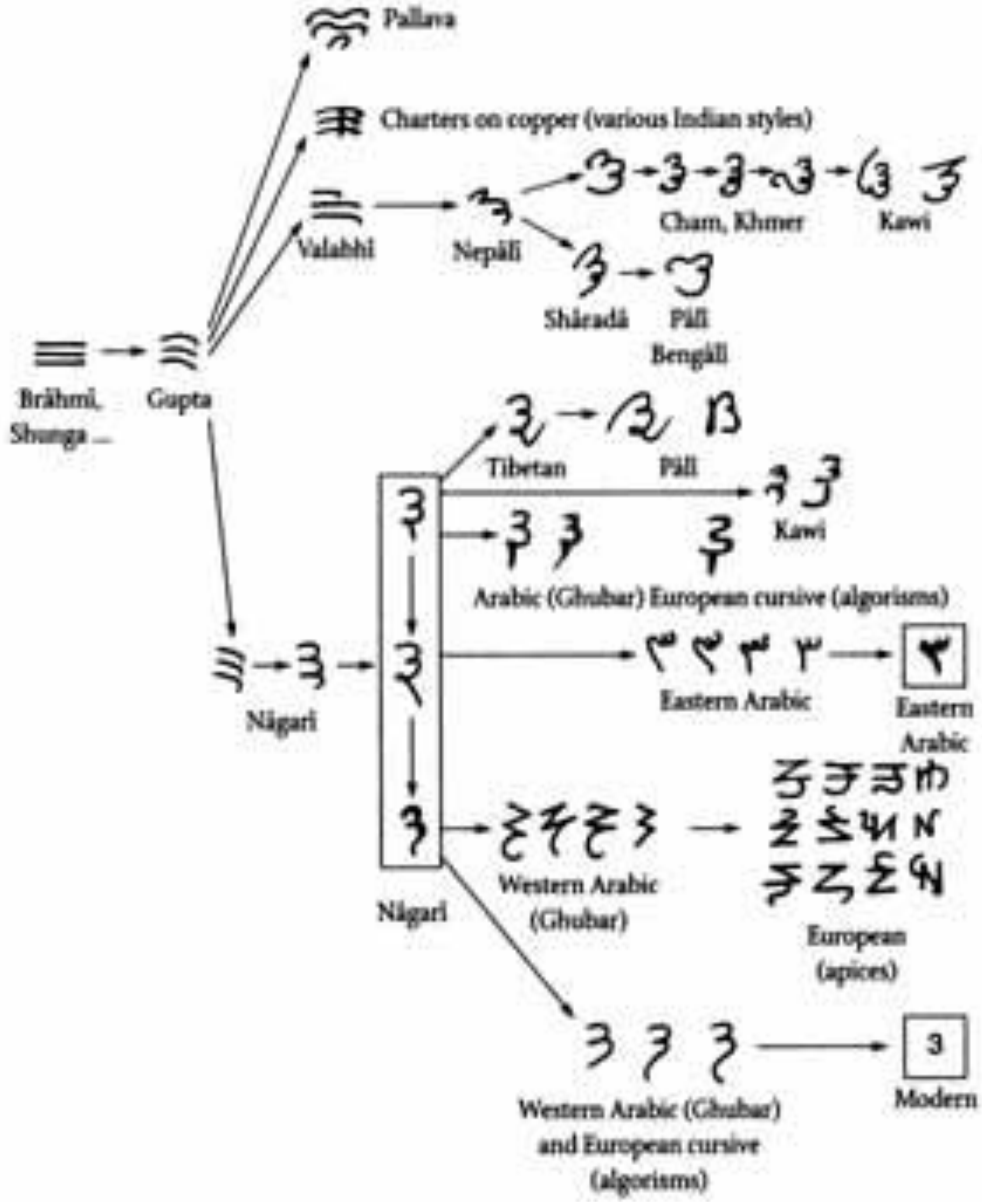


FIG. 24.63. *Origin and evolution of the numeral 3. (For Arabic and European numerals, see Chapters 25 and 26.)*

Estas três características, reunidas, tornaram o sistema de numeração hindu o mais prático de todos. Não é sem motivo que hoje ele é usado quase no mundo todo

Estamos tão acostumados com sistema de numeração decimal que ele nos parece incrivelmente simples. No entanto, desde os tempos em que os homens fizeram suas primeiras contagens, até o aparecimento do sistema de numeração hindu, decorreram milhares de anos.

É surpreendente que diversas civilizações da Antiguidade, como as dos egípcios, babilônios e gregos, capazes de realizações maravilhosas, não tenham chegado a um sistema de numeração tão funcional quanto o dos hindus.

Por que tanta dificuldade?

Uma possível resposta a esta pergunta nos leva ao
Zero,
isto é,
a um símbolo para o nada.

Estamos tão familiarizados com o zero que não sentimos a menor dificuldade em raciocinar com ele. As crianças o dominam com facilidade. Entretanto, nem sempre foi assim. Nossos antepassados custaram muito para inventar o zero e, mesmo depois de nascido, o símbolo para o nada demorou a ser aceito.

Depois do zero ter sido inventado para resolver um problema do sistema posicional de numeração, ocorreu uma coisa interessante:

o zero passou a ser tratado como qualquer um dos outros nove símbolos. O zero passou a ser tão número quanto os outros. O **nada** tornou-se número também, sendo introduzido na seqüência:

0, 1, 2, 3, etc...

Agradecimento especial por essa primeira parte:

Prof. Henrique Guzzo

Na matemática, os números naturais são utilizados para contar.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ....

O conjunto dos números naturais é chamado de enumerável, pois seus elementos podem ser contado um a um .... Embora sejam infinitos.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ....

A infinitude dos números naturais é bastante contra-intuitiva. Uma forma bastante doida de pensar nisso é comparar o conjunto dos naturais com o conjunto dos números pares... Eles são equipotentes! Têm a mesma cardinalidade! Há uma bijeção entre os dois conjuntos! Eles são um a um!

0	1	2	3	4	5	6	7 ....
0	2	4	6	8	10	12	14 ...

Para sentir o infinito natural, vamos olhar a brincadeira inventada por David Hilbert (1862-1943):

O Hotel de Hilbert

https://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy_DVU

Também tem a mesma cardinalidade o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots -3, -2, -1, 0\ , 1\ , 2\ , 3\ , \ldots \}$$

Basta fazer esta correspondência, por exemplos, entre pares e ímpares:

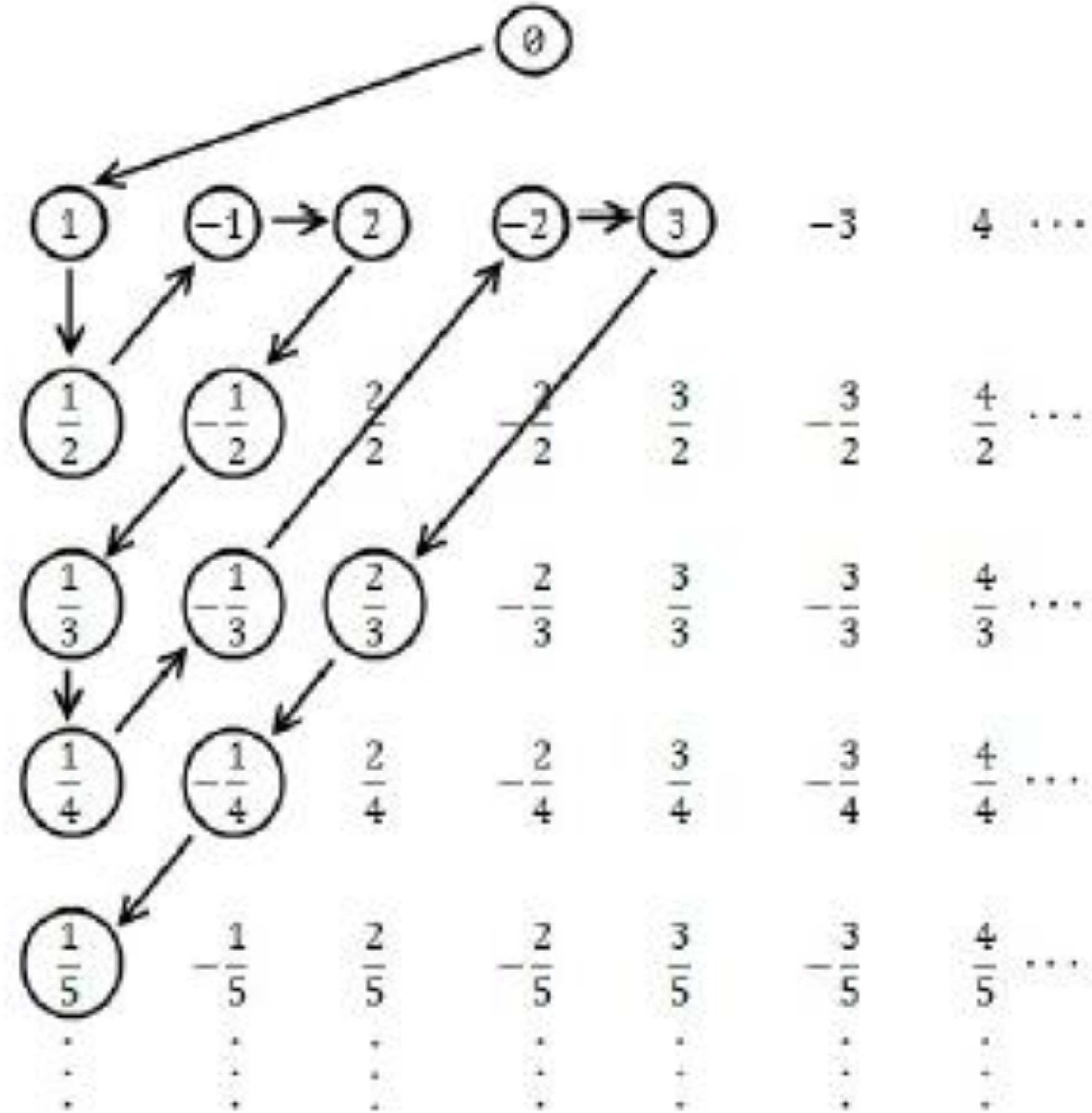
$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \text{-}3, & \text{-}2, & \text{-}1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots \\
\ldots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\
\ldots & 5, & 3, & 1, & 0, & 2, & 4, & 6, & \ldots
\end{array}$$

Agora vem o passo mais estranho. Os racionais também formam um conjunto enumerável.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \; ; \; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z} \; , \; q \neq 0 \right\}$$

O argumento de Cantor é fácil de seguir...

Cantor propõe uma ordenação pela diagonal:



Portanto há uma associação um a um entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos racionais.

E o conjunto dos reais?

Vamos supor que seja possível enumerar os números reais entre 0 e 1.

Vamos supor que seja possível associar um a um os números reais entre 0 e 1 com o conjunto dos naturais (não precisam estar em ordem).

$1 \leftrightarrow 0.3972048 17\ldots$

$2 \leftrightarrow 0.5266138 09\ldots$

$3 \leftrightarrow 0.4983101 23\ldots$

$4 \leftrightarrow 0.2754188 31\ldots$

$5 \leftrightarrow 0.0022000 25\ldots$

$6 \leftrightarrow 0.9999046 81\ldots$

$\vdots$

Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um.

$1 \leftrightarrow 0.3972048 17\ldots$

$2 \leftrightarrow 0.5266138 09\ldots$

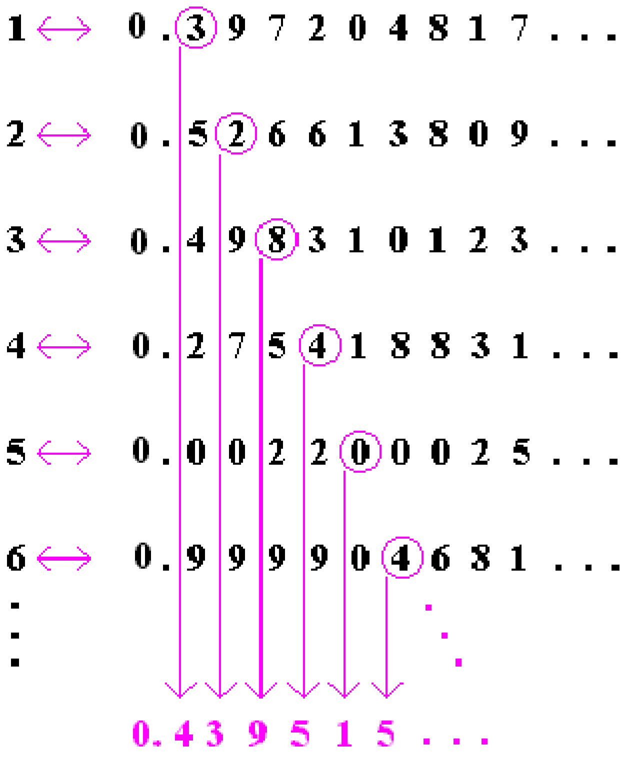
$3 \leftrightarrow 0.4983101 23\ldots$

$4 \leftrightarrow 0.2754188 31\ldots$

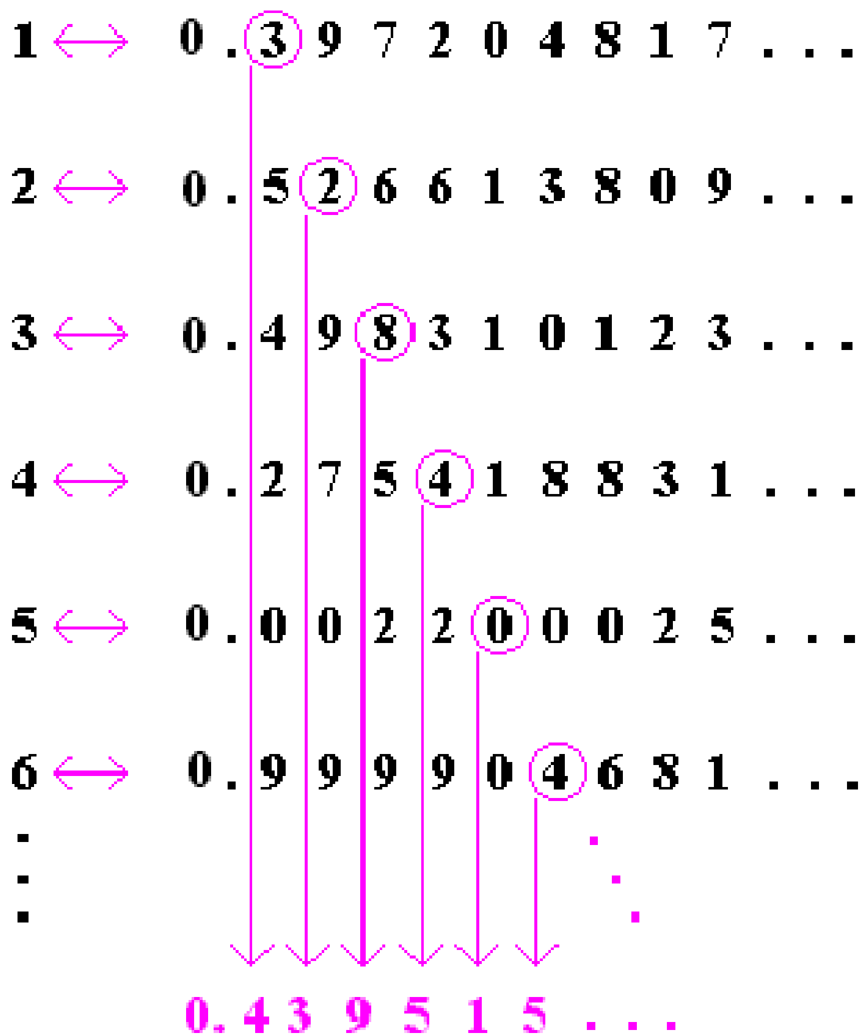
$5 \leftrightarrow 0.0022000 25\ldots$

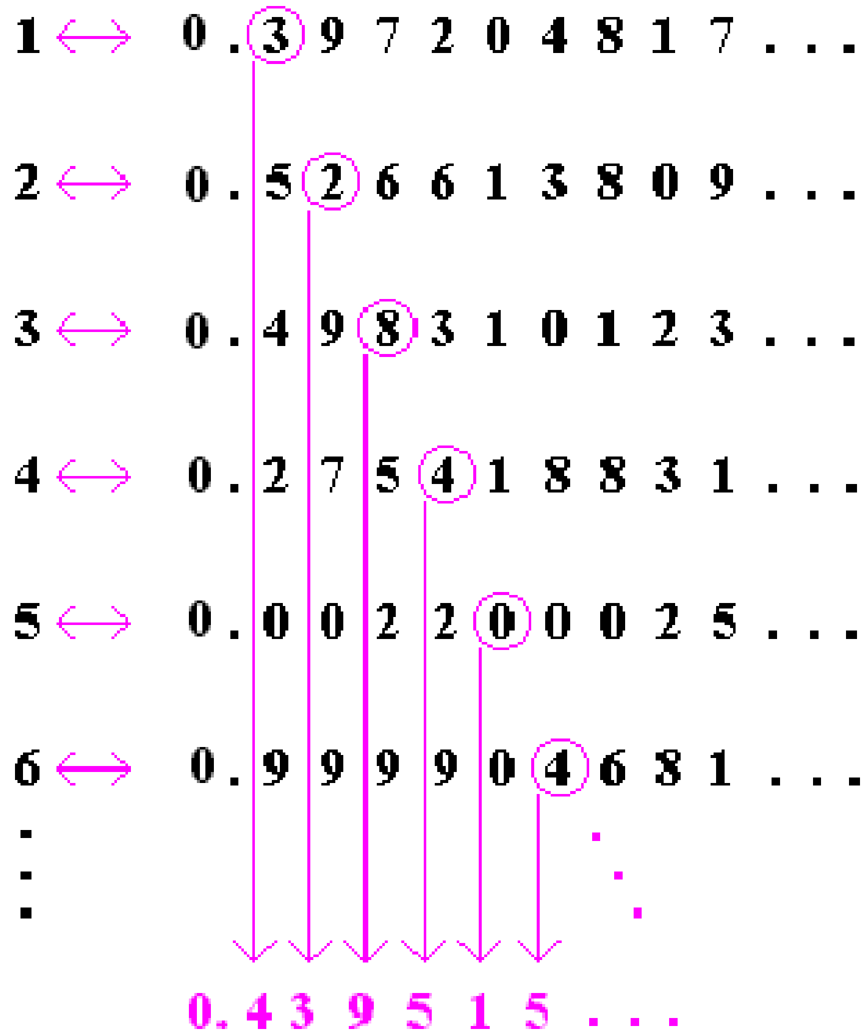
$6 \leftrightarrow 0.9999046 81\ldots$

$\vdots$



Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um.

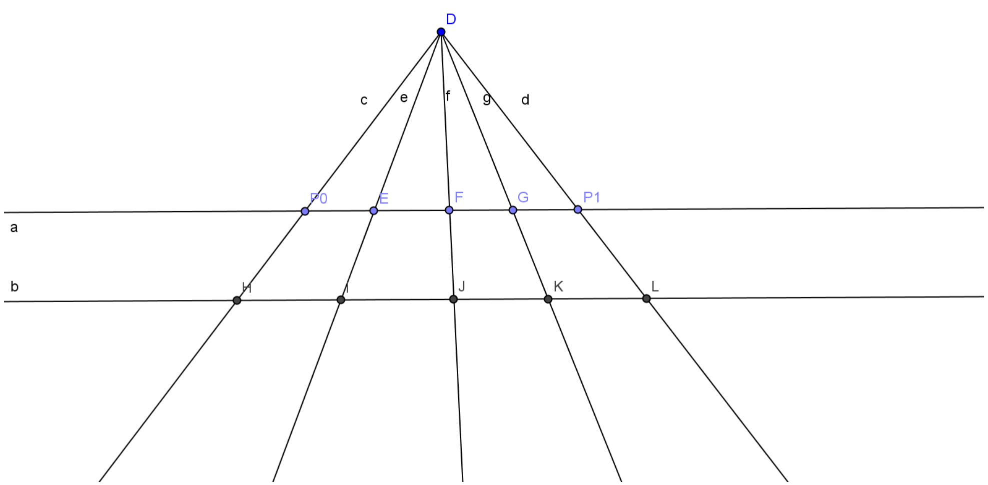




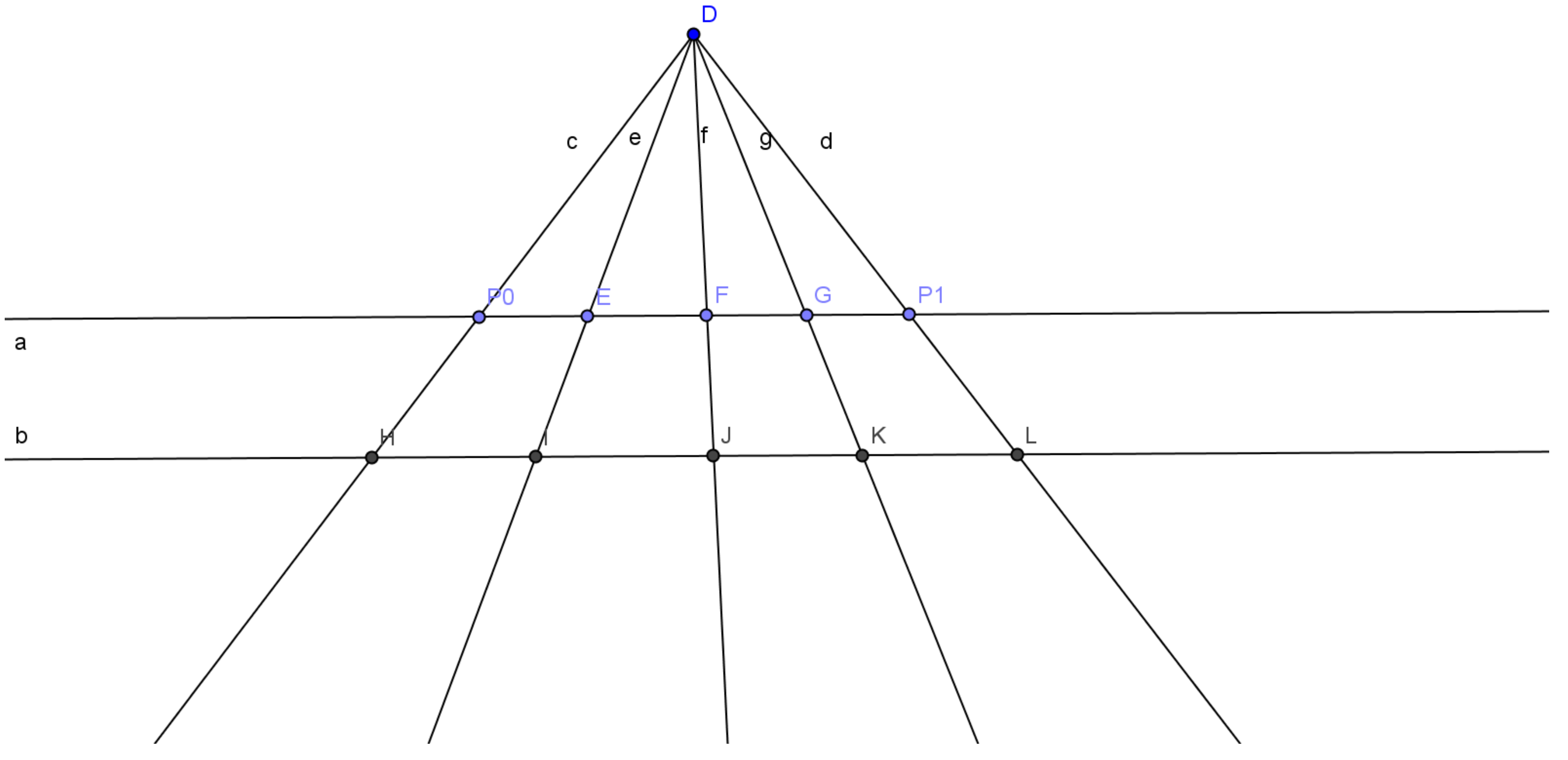
O número resultante não estava no conjunto original, pois tem pelo menos um algarismo diferente de todos os demais!

Assim, o conjunto dos reais entre 0 e 1 é não-enumerável. O infinito real é “maior” que o infinito natural, é de outra natureza!

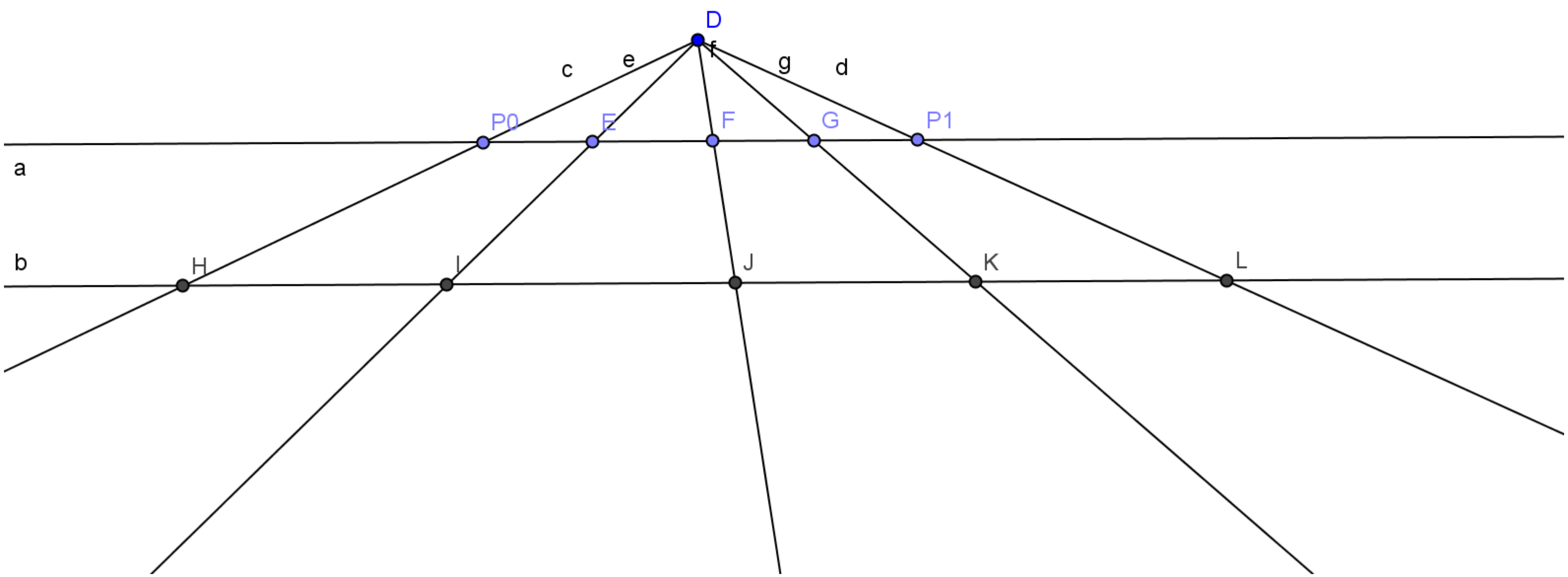
O pior é que qualquer segmento da reta real tem a mesma cardinalidade da reta real inteira...



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



A Hipótese do Contínuo de Cantor, que ainda não foi provada e talvez não possa ser provada, tem como implicação que a reta real é contínua. Não faltam pontos.

Ou seja, os números reais preenchem todo o espaço!

Vamos ver como isso faz sentido.

Tomemos um número real, não racional, bem conhecido. Por exemplo, o número π já foi expresso em até 10 trilhões de dígitos.

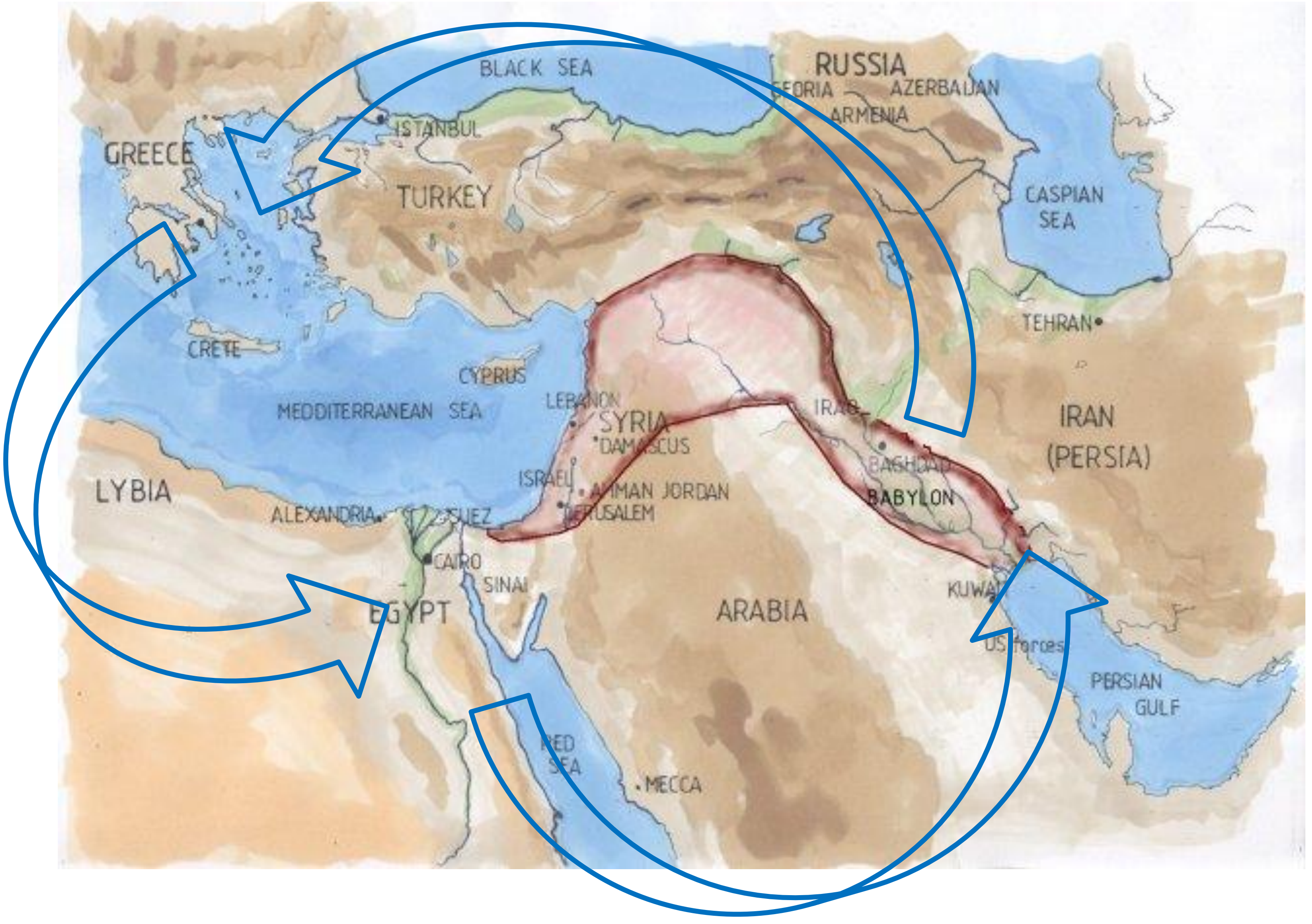
3.141592653589793238462643
3832795028841971693993751
0582097494459230781640628
6208998628034825342117067
9821480865132823066470938
4460955058223172535940812
8481117450284102701938521
1055596446229489549303819
6442881097566593344612847

O problema é que, tomando apenas um algarismo e alterando-o, para mais ou para menos, tomamos um vizinho de $\boldsymbol{\pi}$ e não é um vizinho próximo, pois se alterarmos qualquer dígito seguinte, o vizinho é mais próximo ainda! .

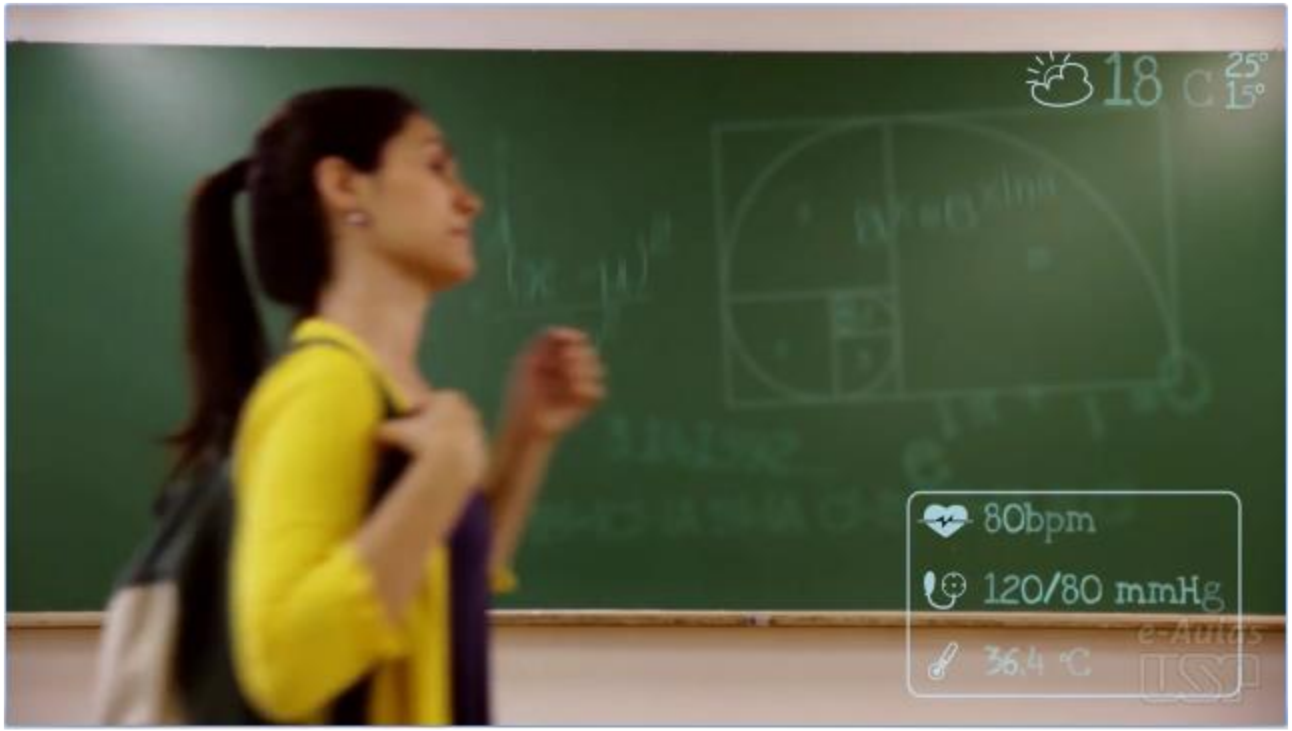
E como isso vale para qualquer número real...

Os gregos eram navegadores, comerciantes e viajantes e se relacionavam com todos os povos conhecidos.

Pitágoras teria viajado para o Egito e a Babilônia.

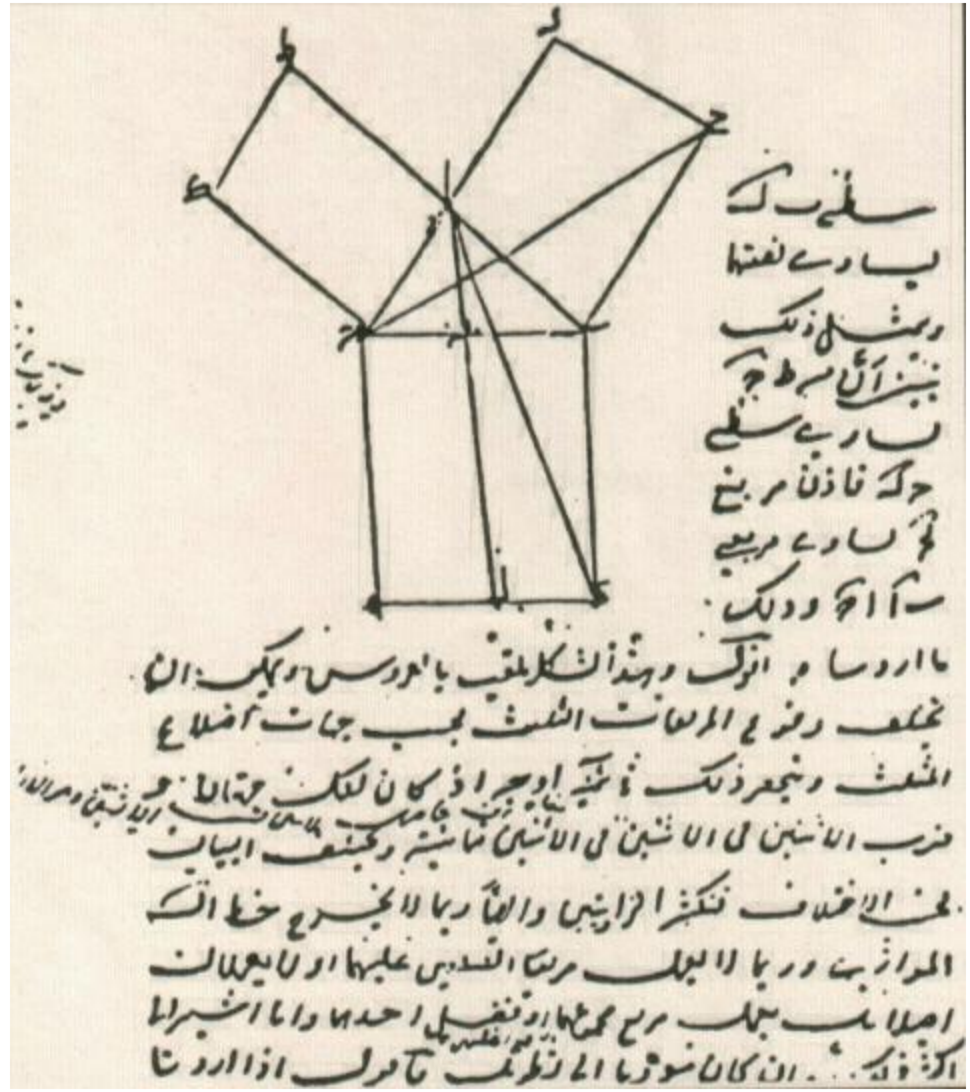


O chamado Teorema de Pitágoras era certamente conhecido na antiga Babilônia (tableta de 1700 aC)

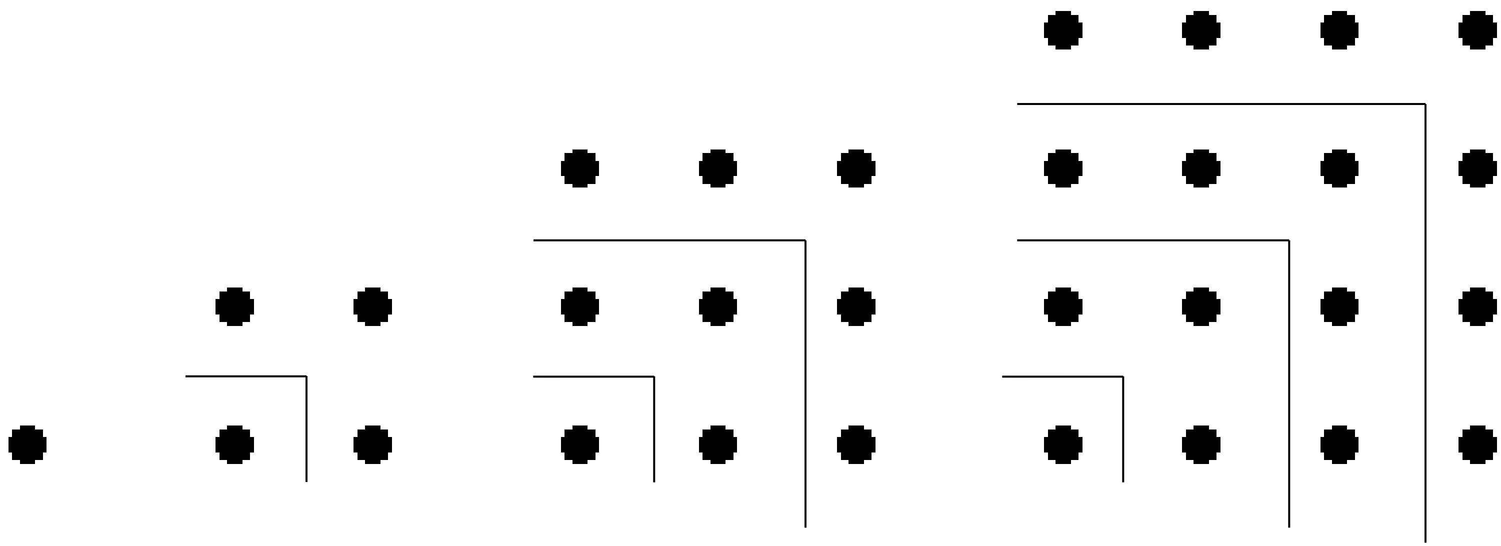


Irracionalidade no mundo pitagórico
Experiências de pensamento
http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=6876

“Os Elementos” de Euclides (300 aC): obra de ligação entre Pitágoras e outros criadores da Matemática e o mundo moderno, via árabes. Euclides foi o grande organizador da Matemática. Será conservado pelos árabes da Casa da Cultura de Bagdá até ser traduzido para o latim.



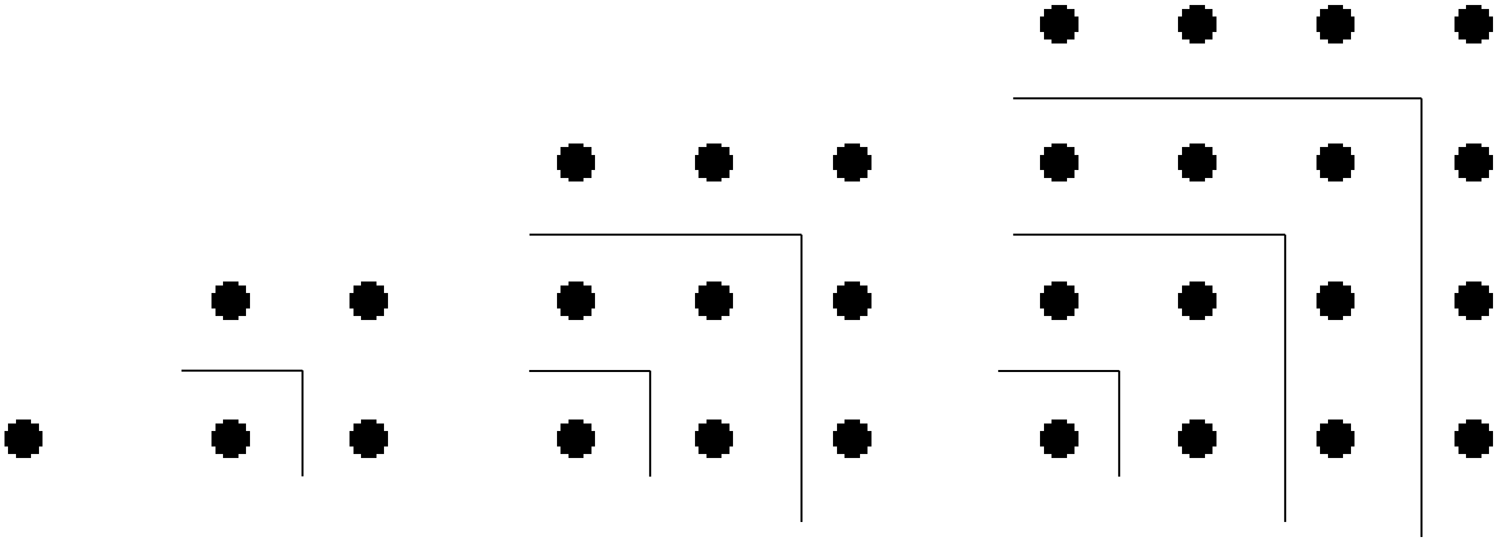
Teorema de Pitágoras em *Os Elementos* de Euclides (manuscrito árabe)



1 4 9 16

1 1+3 1+3+5 1+3+5+7

Pitágoras dizia: “Tudo é Número”. Estudava os números figurados.



1 4 9 16

1 1+3 1+3+5 1+3+5+7

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se $2n + 1 = m^2$,

então $n = (m^2 - 1)/2$

e $n + 1 = (m^2 + 1)/2$

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se $2n + 1 = m^2$, então $n = (m^2 – 1)/2$ e $n + 1 = (m^2 + 1)/2$,

isto é, a fórmula acima se escreve como

$$(m^2 – 1)^2/4 + m^2 = (m^2 + 1)^2/4$$

m	$(m^2 – 1)/2$	$(m^2 + 1)/2$
3	4	5