

# NÚMEROS

## Parte 2

Antonio Carlos Brolezzi

[www.ime.usp.br/~brolezzi](http://www.ime.usp.br/~brolezzi)  
[brolezzi@usp.br](mailto:brolezzi@usp.br)

# Os símbolos numéricos

**Com o nosso sistema de numeração, usando apenas dez símbolos diferentes, podemos escrever qualquer número, enquanto que, nas numerações egípcia e romana, para se escrever números muito grandes seria preciso criar novos símbolos: um para o dez mil, outro para o dez milhões, outro para o cem milhões etc.**

# Numerais egípcios



1



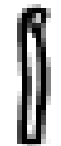
10



100



1000



10,000



100,000



1,000,000

# Numerais egípcios

**Utilizavam  
base 10  
mas sem  
valor  
posicional**



1



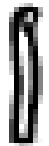
10



100



1000



10,000



100,000



1,000,000

# Numerais romanos

**Derivados dos numerais etruscos (antigo povo que habitava a Itália), são usados até hoje!**

**Utilizavam base 10.**

**A posição era importante mas em outro sentido (princípio subtrativo)**

1	→	I	
10	→	V	← 5
		X	
100	→	L	← 50
		C	
		D	← 500
1000	→	M	

<b>I</b>	<b>1</b>
II	2
III	3
IV	4
<b>V</b>	<b>5</b>
VI	6
VII	7
VIII	8
IX	9
<b>X</b>	<b>10</b>
XI	11
XII	12
XIII	13
XIV	14
XV	15
XVI	16
XVII	17
XVIII	18
XIX	19
XX	20

XXI	21
XXII	22
XXIII	23
XXIV	24
XXV	25
XXVI	26
XXVII	27
XXVIII	28
XXIX	29
XXX	30
XXXI	31
XXXII	32
XXXIII	33
XXXIV	34
XXXV	35
XXXVI	36
XXXVII	37
XXXVIII	38
XXXIX	39
XL	40

XLI	41
XLII	42
XLIII	43
XLIV	44
XLV	45
XLVI	46
XLVII	47
XLVIII	48
XLIX	49
<b>L</b>	<b>50</b>
LI	51
LII	52
LIII	53
LIV	54
LV	55
LVI	56
LVII	57
LVIII	58
LIX	59
LX	60

LXI	61
LXII	62
LXIII	63
LXIV	64
LXV	65
LXVI	66
LXVII	67
LXVIII	68
LXIX	69
LXX	70
LXXI	71
LXXII	72
LXXIII	73
LXXIV	74
LXXV	75
LXXVI	76
LXXVII	77
LXXVIII	78
LXXIX	79
LXXX	80

LXXXI	81
LXXXII	82
LXXXIII	83
LXXXIV	84
LXXXV	85
LXXXVI	86
LXXXVII	87
LXXXVIII	88
LXXXIX	89
XC	90
XCI	91
XCII	92
XCIII	93
XCIV	94
XCV	95
XCVI	96
XCVII	97
XCVIII	98
XCIX	99
<b>C</b>	<b>100</b>
<b>D</b>	<b>500</b>
<b>M</b>	<b>1000</b>

Numerais  
romanos:

observe que o "4"  
no relógio não  
segue o  
princípio  
subtrativo, para  
tornar a leitura  
mais clara.





# Numerais babilônios

Os babilônios usavam base sexagesimal (base 60, como nos minutos e segundos)

Tinham valor posicional, pois sua escrita em tabletas de barro era muito complexa.





Os sistemas de numeração antigos  
apresentavam uma dificuldade  
especial:

era muito trabalhoso efetuar cálculos  
usando esses números.

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cod. Vigilus (976 C.E.)	I	7	3	4	5	6	7	8	9
Vatican MS. lat. 3101 (1077)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
British Mus. Add. 17808 (XII)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XIII	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XIV	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XV	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XVI	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.

*Anciens Caractères Arithmétiques.*

1. <i>Notes de Bocce.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2. <i>De Plume.</i>	{	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3. <i>Caractères d'Alsephadi.</i>	{	1	μ	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4. <i>Chiffres de Sacro Bosco.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
5. <i>De Roger Bacon.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
6. <i>Des Indiens Modernes.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
7. <i>Chiffres Modernes.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
8. <i>Alsephadi.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.



Os hindus souberam reunir três características que já apareciam em outros sistemas numéricos da Antiguidade:

o sistema de numeração hindu é decimal (o egípcio, o romano e o chinês também o eram);

o sistema de numeração hindu é posicional (o babilônio também era);

o sistema de numeração hindu tem o zero, isto é, um símbolo para o nada.



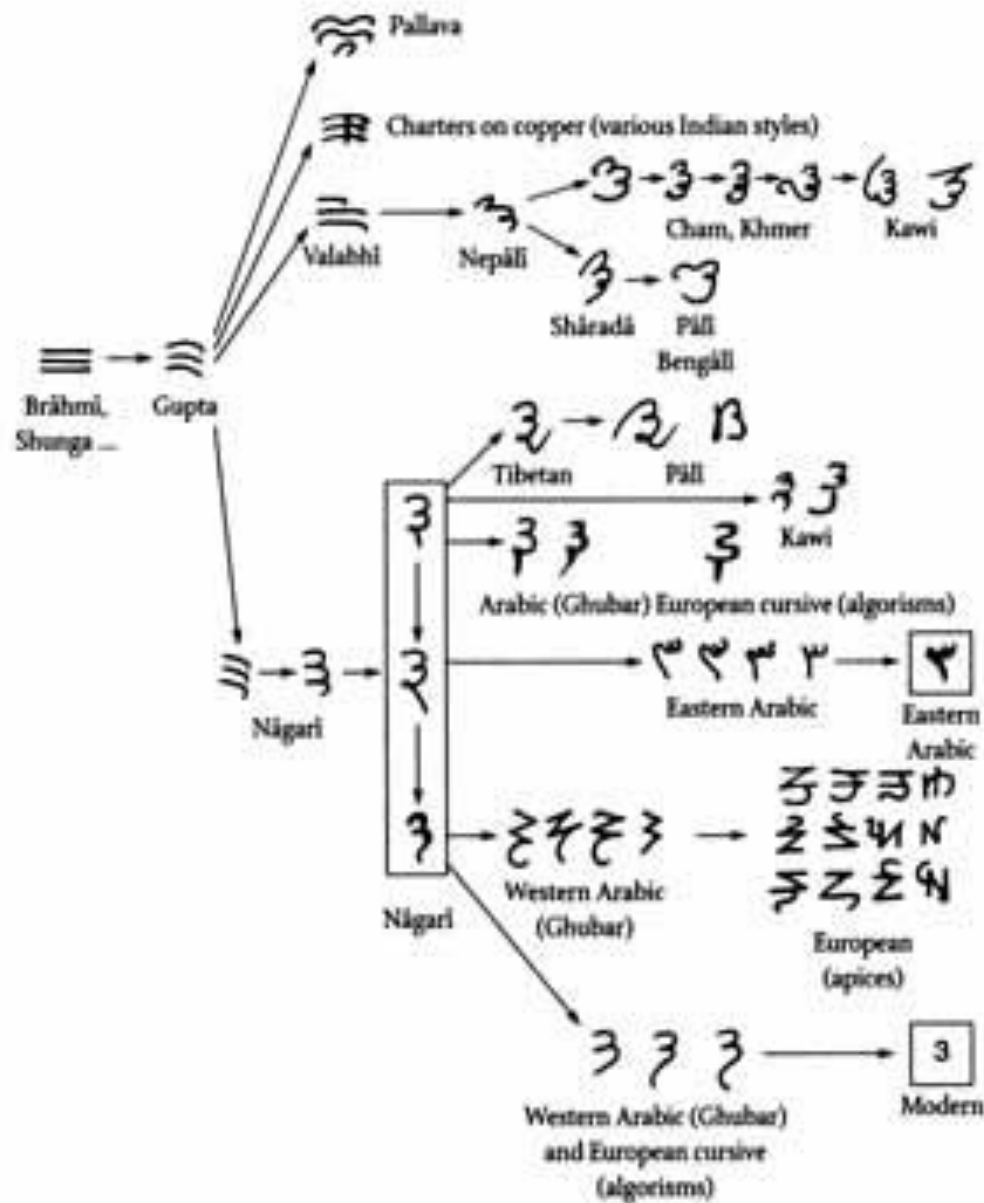


FIG. 24.63. Origin and evolution of the numeral 3. (For Arabic and European numerals, see Chapters 25 and 26.)

Estas três características, reunidas, tornaram o sistema de numeração hindu o mais prático de todos. Não é sem motivo que hoje ele é usado quase no mundo todo

Estamos tão acostumados com sistema de numeração decimal que ele nos parece incrivelmente simples. No entanto, desde os tempos em que os homens fizeram suas primeiras contagens, até o aparecimento do sistema de numeração hindu, decorreram milhares de anos.

É surpreendente que diversas civilizações da Antiguidade, como as dos egípcios, babilônios e gregos, capazes de realizações maravilhosas, não tenham chegado a um sistema de numeração tão funcional quanto o dos hindus.

**Por que tanta dificuldade?**

**Uma possível resposta a esta  
pergunta nos leva ao  
Zero,  
isto é,  
a um símbolo para o nada.**



Estamos tão familiarizados com o zero que não sentimos a menor dificuldade em raciocinar com ele.

As crianças o dominam com facilidade. Entretanto, nem sempre foi assim. Nossos antepassados custaram muito para inventar o zero e, mesmo depois de nascido, o símbolo para o nada demorou a ser aceito.

Depois do zero ter sido inventado para resolver um problema do sistema posicional de numeração, ocorreu uma coisa interessante:

o zero passou a ser tratado como qualquer um dos outros nove símbolos.

O zero passou a ser tão número quanto os outros. O **nada** tornou-se número também, sendo introduzido na seqüência:

0, 1, 2, 3, etc...

Agradecimento especial por essa primeira parte:

Prof. Henrique Guzzo

Na matemática, os números naturais são utilizados para contar.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ....

O conjunto dos números naturais é chamado de enumerável, pois seus elementos podem ser contado um a um .... Embora sejam infinitos.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ....



A infinitude dos números naturais é bastante contra-intuitiva. Uma forma bastante doida de pensar nisso é comparar o conjunto dos naturais com o conjunto dos números pares... Eles são equipotentes! Têm a mesma cardinalidade! Há uma bijeção entre os dois conjuntos! Eles são um a um!

0    1    2    3    4    5    6    7    ....

0    2    4    6    8    10    12    14    ...

Para sentir o infinito natural, vamos olhar a brincadeira inventada por David Hilbert (1862-1943):



*O Hotel de Hilbert*

[https://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy\\_DV](https://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy_DV)

Também tem a mesma cardinalidade o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Basta fazer esta correspondência, por exemplos, entre pares e ímpares:

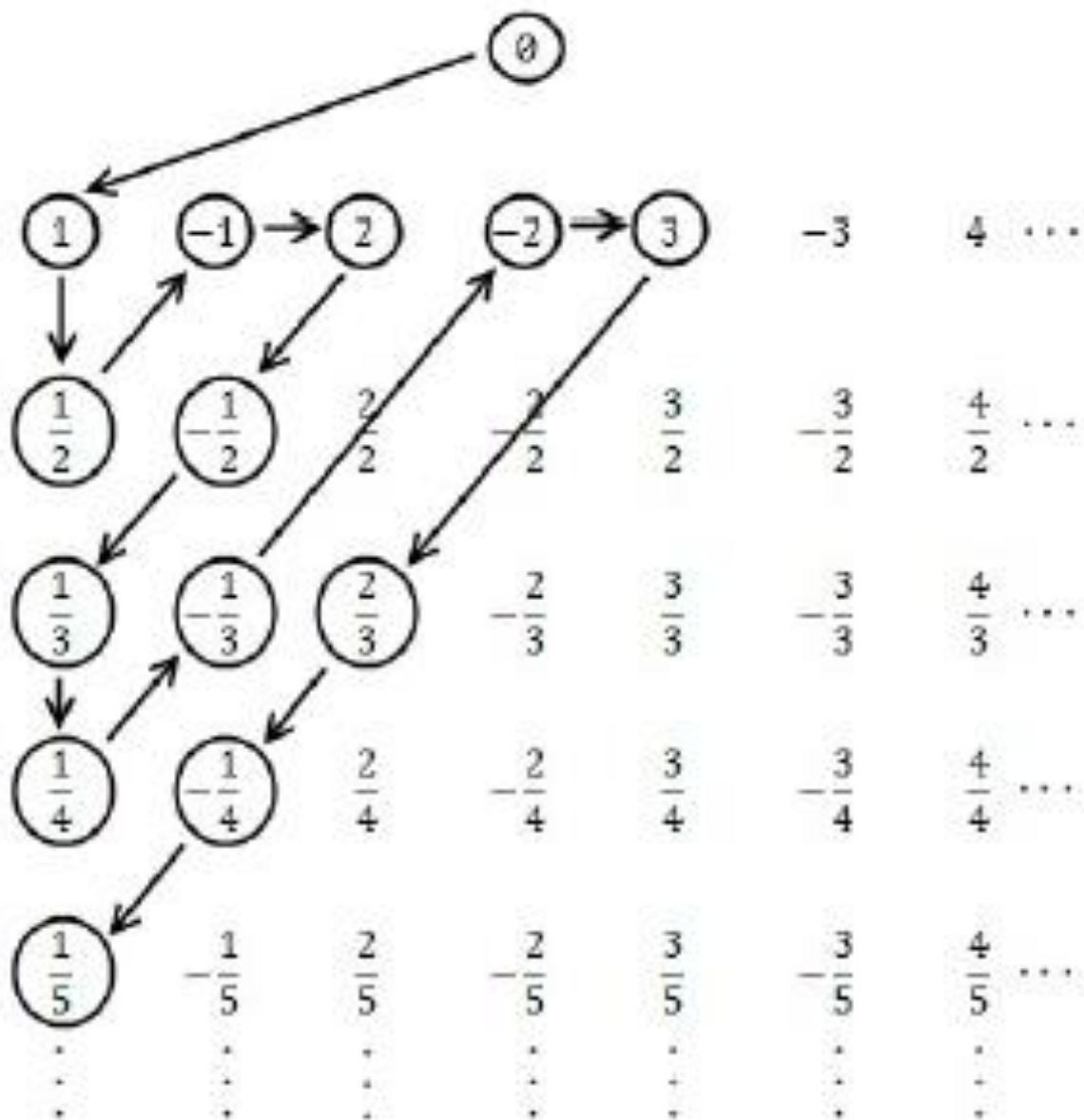
...	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	...
...	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	...
...	5,	3,	1,	0,	2,	4,	6,	...

Agora vem o passo mais estranho. Os racionais também formam um conjunto enumerável.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

**O argumento de Cantor é fácil de seguir...**

Cantor propõe uma ordenação pela diagonal:



Portanto há uma associação um a um entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos racionais.

E o conjunto dos reais?

Vamos supor que seja possível enumerar os números reais entre 0 e 1.

Vamos supor que seja possível associar um a um os números reais entre 0 e 1 com o conjunto dos naturais (não precisam estar em ordem).

<b>1</b> ↔	<b>0.397204817...</b>
<b>2</b> ↔	<b>0.526613809...</b>
<b>3</b> ↔	<b>0.498310123...</b>
<b>4</b> ↔	<b>0.275418831...</b>
<b>5</b> ↔	<b>0.002200025...</b>
<b>6</b> ↔	<b>0.999904681...</b>
.	
.	
.	

Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um

1	↔	0.	<b>3</b>	9	7	2	0	4	8	1	7	...
2	↔	0.	5	<b>2</b>	6	6	1	3	8	0	9	...
3	↔	0.	4	9	<b>8</b>	3	1	0	1	2	3	...
4	↔	0.	2	7	5	<b>4</b>	1	8	8	3	1	...
5	↔	0.	0	0	2	2	<b>0</b>	0	0	2	5	...
6	↔	0.	9	9	9	9	0	<b>4</b>	6	8	1	...
:												
:												

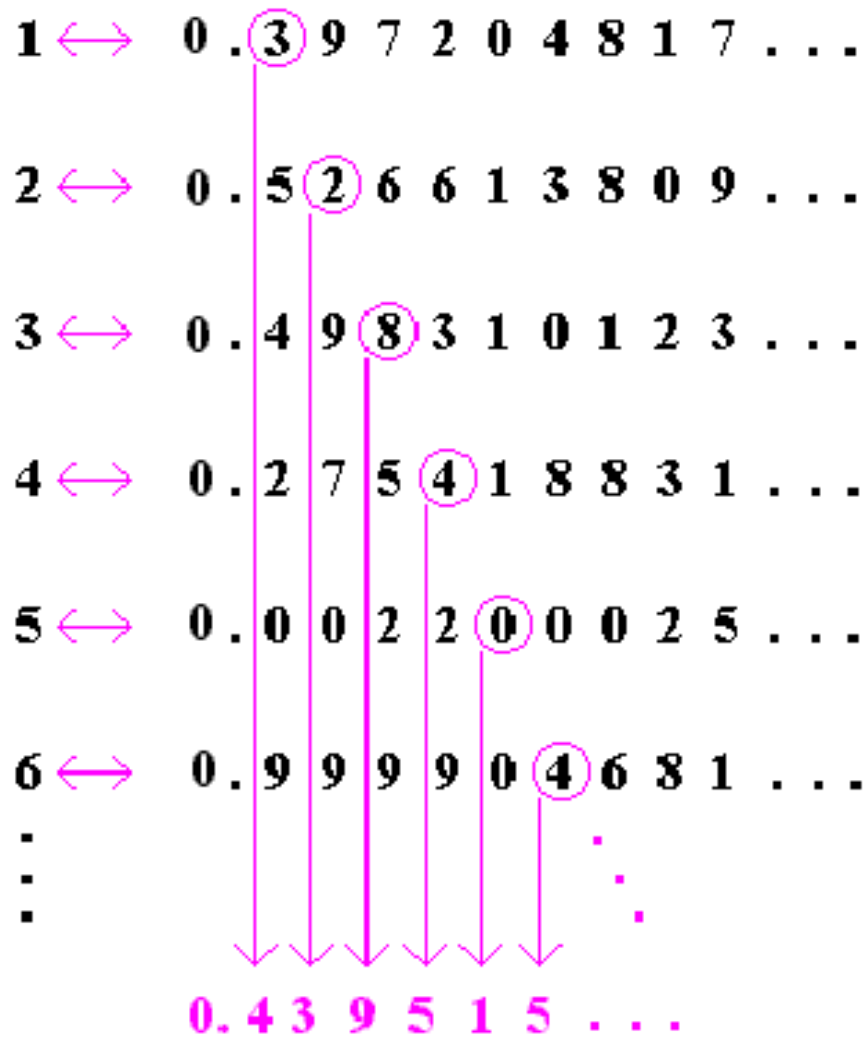
1	↔	0.	<b>3</b>	9	7	2	0	4	8	1	7	...
2	↔	0.	5	<b>2</b>	6	6	1	3	8	0	9	...
3	↔	0.	4	9	<b>8</b>	3	1	0	1	2	3	...
4	↔	0.	2	7	5	<b>4</b>	1	8	8	3	1	...
5	↔	0.	0	0	2	2	<b>0</b>	0	0	2	5	...
6	↔	0.	9	9	9	9	0	<b>4</b>	6	8	1	...
:												
:												

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

**0.439515...**



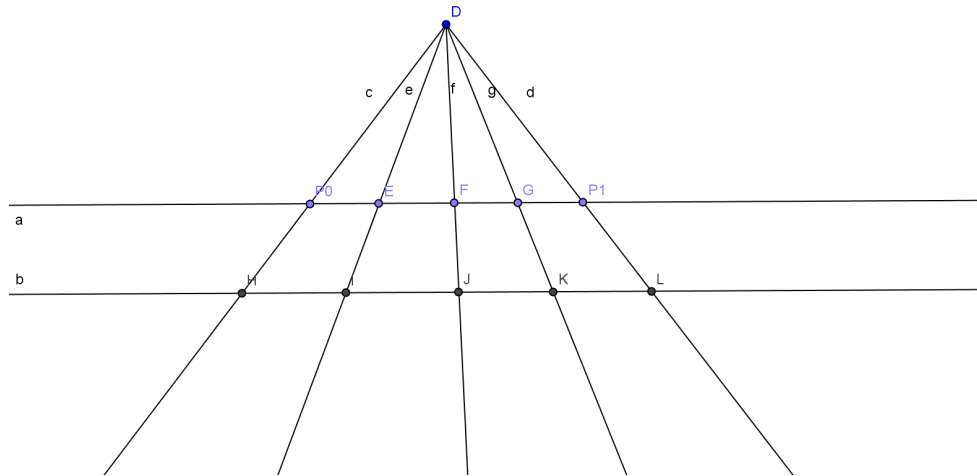




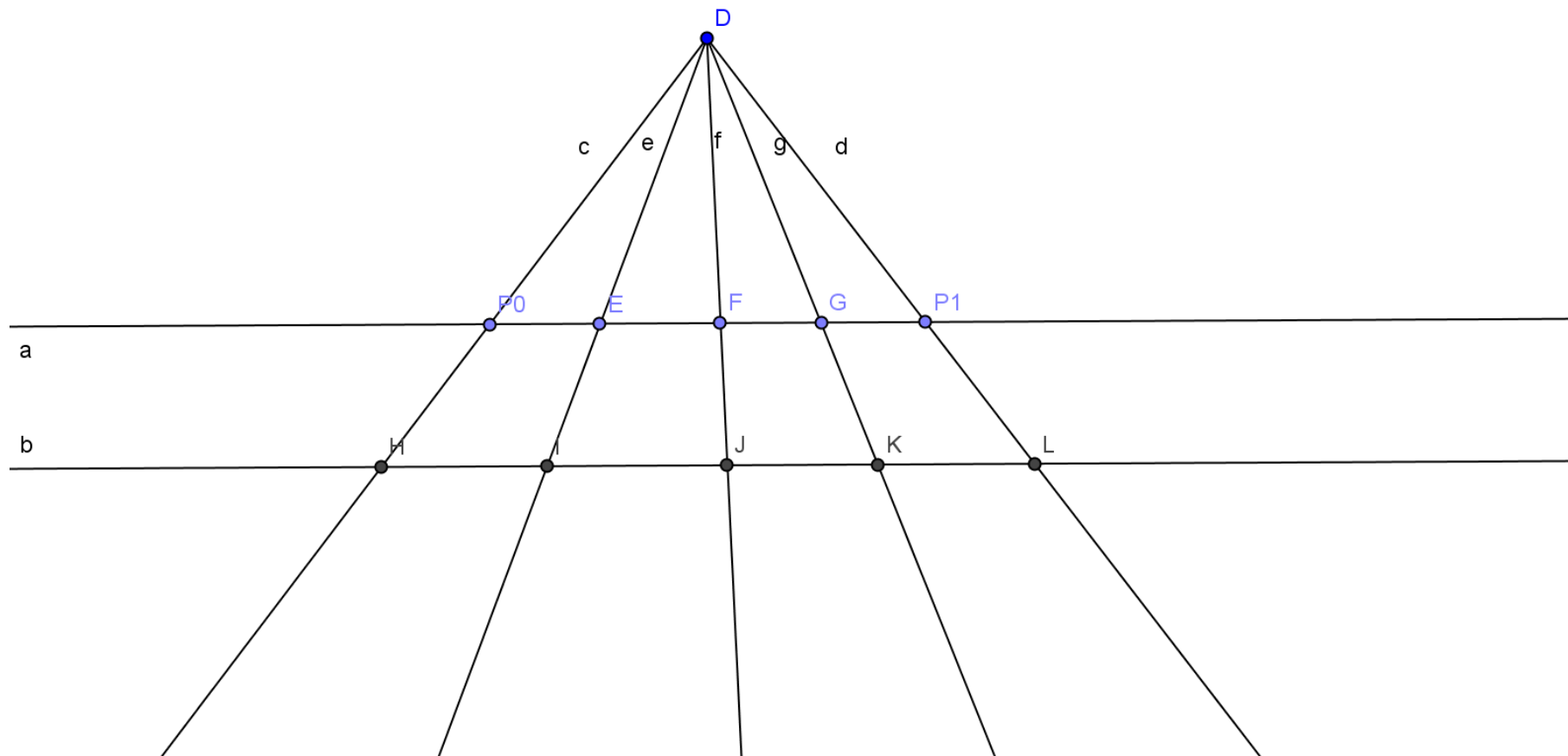
O número resultante não estava no conjunto original, pois tem pelo menos um algarismo diferente de todos os demais!

Assim, o conjunto dos reais entre 0 e 1 é não-enumerável. O infinito real é “maior” que o infinito natural, é de outra natureza!

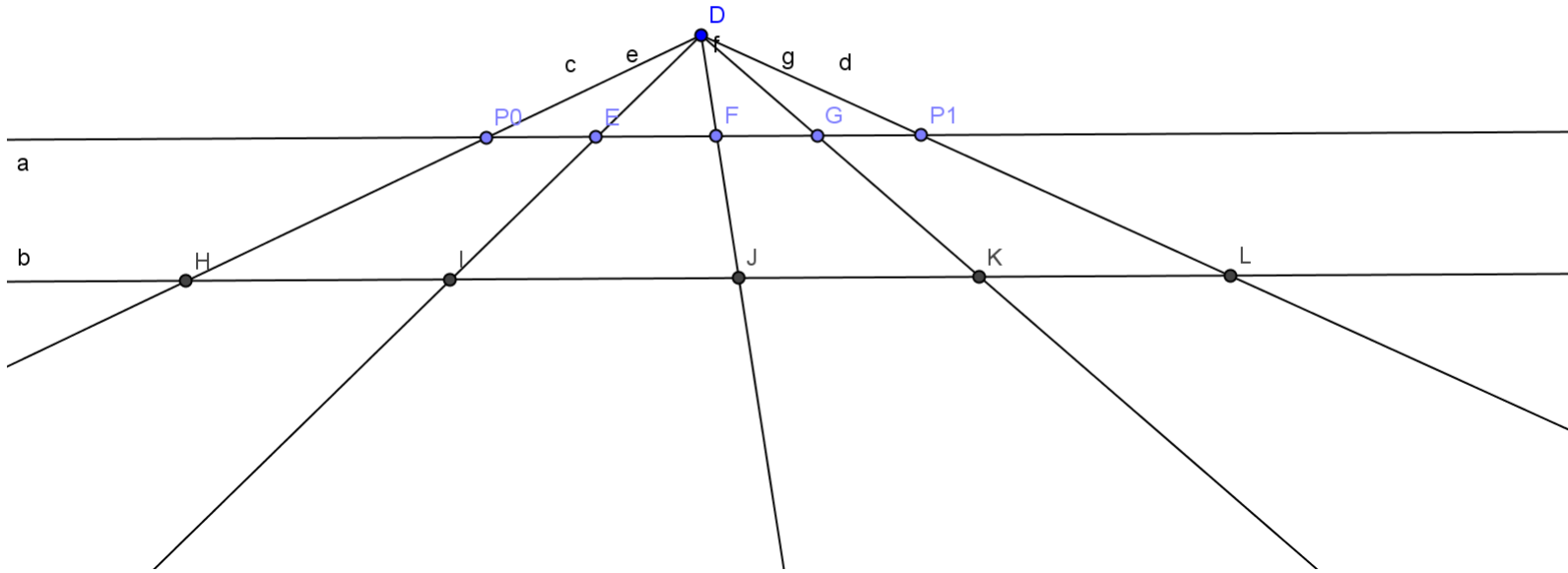
O pior é que qualquer segmento da reta real tem a mesma cardinalidade da reta real inteira...



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



A Hipótese do Contínuo de Cantor, que ainda não foi provada e talvez não possa ser provada, tem como implicação que a reta real é contínua. Não faltam pontos.

Ou seja, os números reais preenchem todo o espaço!

Vamos ver como isso faz sentido.

Tomemos um número real, não racional, bem conhecido. Por exemplo, o número  $\pi$  já foi expresso em até 10 trilhões de dígitos.

3.141592653589793238462643  
3832795028841971693993751  
0582097494459230781640628  
6208998628034825342117067  
9821480865132823066470938  
4460955058223172535940812  
8481117450284102701938521  
1055596446229489549303819  
6442881097566593344612847





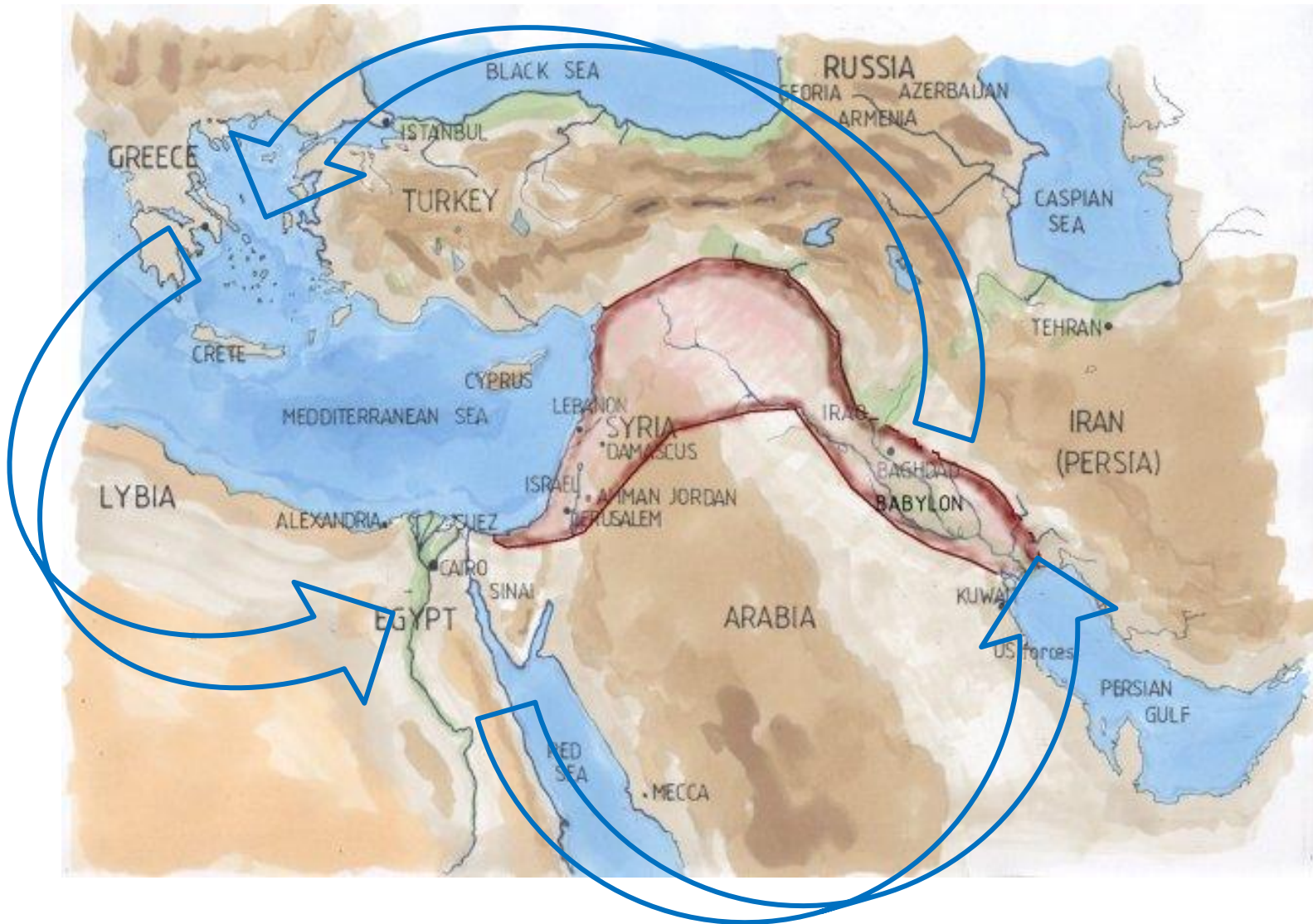
# E como isso vale para qualquer número real...

3.415 9265 35 979323 4626433 32795 02 41971693 99375105 209744445 92307 164061 620 99 62 034 25 34211067 24 0 65132 2306647093 4460955 05 2231725 35940 12 4 4 11745 02 410270193 5210  
555 964462294 95 49303 196442 10975665 9334462 475 64 2337 67 3165 27120190945 64 6692346034 8045 432664 213393607260249412 737245 7006606385 174 1520920962 2925 409175 364367 9259  
0360013305 305 4 204665 213 44695 1945160943305 7270365 75 95 9195 302 6173 193261179305 1 5 074462379962 7495 6735 752724 9122793 30119492 9 3367336244065 66430 6021394946395 22473719  
0702179 609437027705 3921717629317675 23 4674 4676694051320005 6 12745 2635 60 277 5 77134275 77 960917363717 7246 44090122495 3430465 495 537105 07922796 925 92354201995 61219021960 64  
03444 15 136297747713099605 7072134999999 37297 04995105 9731732 160963 5 5 02445 945 53469 3026425 2230 25 33446 5 03526931 171010003137 3 752 65 753320 3 120617176694730359  
9 25349042 75546 7315 95 62 63 23537 759375195 77 05 32171226 0663001927 766119590921642019 93 09525 7201065 4 6327 659365 33 2796 2303095 2035 30 296 995 7736225 99413 91  
249721775 2 347913515 74 5 724245 45 0695 95 0 295 316 6727 5 5 9075 09 3 175 46374649393925 506040092770167113900 9 4 2402 5 386035 63707660104710 1942955 5969 946767 3744944 25537  
977472 471040475 346462 0466 42 9069492933367702 9 9 15210475 2162 05 676602405 03 05 0935125 33 24300355 76402474947326394192726042699227967 23547 16360093417264219245 635 0302  
6 8 297455 706749 3 5 054945 6 692695 6909272107975 09302955 32165 3449 71202755 9602364 0665 49919 3479775 3566369 074265 42527 6255 4175 74672 90977772793 000 64710600164524  
1921732172477235 0414497735 6 5 4 183615 735 25 2133475 74 4946 43 5 23323907394433345 47762416 62 5 9 35694 5 62099219222 42725 025 425 6 76717904946065 3466 049 6272327917 60 5 7 43  
3 279679766 145 410095 3 37 636095 06 0064225125205 173929 4 960 412 4 626945 604241965 2 5 022210661 630674427 622039194945 0471237137 696095 63643719172 7467716465 757962413 90 65 3264  
5995 1339047 2 75 90099465 76407 95126946 39 3 265 95 109 25 226205 224 9 42072671947 2 6 4 260476990702640136394437455 305 06 20349625 245117493996514342 9 0919065 925 0937226964685 709 5  
6 3 7405 97 8 5 959972975 49 9306175 392 4 46 13 2 6 6 9427745 5 99 15 245 95 395 94310499725 246 0 45 9 7273644695 4 65 3 367362226260992460 051243 4 43904512441365 497627 0 977715 6914  
3599770029660 944694 6 5 5 4 0635 3422072225 2 4 4 6 84 5 6 2 8 5 0806 4273945 226746767 9 5 25325 225 4995 466627 2 239 645 65 168635 4 6 62305 7745 649 0355 936345 6 17432412515 076069  
4794510965 96094025 22 8 79710 9345 669136 6722 74 9405 60105 0330 8 6792 6 0920 74760917 2493 5 900974909675 9 5 26365 5497 93297 4 216 299 94 72265 0 4 5 75 64042 704775 513237994  
4515 23746233465 42 5 444795 265 67 210514135 4735 7395 231342716602135 9695 362344295 24 4937 711045 765 4035 902799344037420073105 7 5 3906219 3 7447 0 47 4 96 3321445 713 6 7519435 0643  
02 45 39104 4 1005 3710646 06749927 1919793995 20649166342 754440643745 1237 1921799 3910 9195 6 4675 426923974 940907 649423965 67945 20 095 465 022523603 193042093762137 5 95663 9  
377 70 303096972077346722 25 625 99665 042 0306 03 4477345 49202605 44665 925 210497442 5 07325 6 6660021324340 19107104 633173464965 145 3905 79626 5 6005 5 0 10665 7969 6 1635 747363 40  
525 745 9102 9706440109712062 043903975 9575 67715 7710020337 6 699360072305 5 76317635 942 7325 1471205 3292 19 26 62 5 67325 799 44 4 291644706095 75270695 72209175 671167229109 1690915 2 0  
735 0671274 3 222 7 35220935 3965 725120 35 7915369 209444210675103346710342671136990 65 51639 35 01970165 176 51743765 76 35 5 65 0 49099 9 5 99 23 734552 331635 5 76479 8 5 35 932  
26 5 4 96321329330 9 5 7064204675 25 9070915 4 1465 49 5 94663 7 02709 19943099244 9 5 75712 2 905 92323326097297120 44335 73265 4 93 23911325 97463667305 3604142 13 3 303203 24903 75 5  
9 5 243744710291327165 6 093773344403070746721201913020330 8 5 0197621010044929325 160 42444 5 9637669 3 9522 6 47 3235 265 2134495 76 5 726243344 930396 642624541077322697 0 0 73 95  
441010446 2325 271621015 265 272116602936665 573092547105 5 7 3 763466 2065 3109 965 269 6205 64769325 705 635 6620 5 5 10072936065 9 764 61791045 334 5 03461365 76 675 32494466 0396265 797 771  
5 5 60 45 25965 44665 205 30643344434 5 676975 145 66406 00700237 7765 33440171 94974005 622305 3 7325 61340712 700040 5 47332699390 145 4664645 5 0797270 266 3064332 5 7 5 69 30523  
5 8 933065 7706795 45 7163775 24021495 5 785 4 10025 0262 25 941032164715 079795 309910 7965 4737625 51765 675135 75712 2966845 47197719 021994 90 30463994713296210734043 75 9 5 735 9645 0 90139  
9713117904297 2 8 5 6475 0320319 6915402 70 0 5 9904 0109424722131794764777262244425 4 5 45 4033215 7 306422 8 1375 5 043063321715 2979 6623711725 916071766925 474 73 9 665 494945 01465 4062  
43366393790039789265 672463 5 3067360965 71209 0763 3276646274 5 007 6925 6029022 47210403172 60 2049100042296617963719213375 751495 5 056604963 62947265 4736425230 17703675 706  
735 0235 072 35405 670403 6743513622247715 9 95 0495 309 444 9333096340 7 0769235 99397 05 4934444737744 426329 60 099 6 6 74132604725 6951623965 645 73021635 9 1939516735 3 8 129741677  
2947 67242292465 4366 009 067692 23 2 0 6 9964004 2435 4037041664965 979409243237 69070697794223625 0 226 9 5 73 379 623005 9377647165 12 935 7 605 6 16975 7 297375 233446042 152  
6272037343465 3197777416031990665 54 76397929334495 25 4134 994 5 4447345 673 362499349136 4 0927777103 63 773431772075 45 65 45 322077709210905660962 04909263601975 9 5 2 8 1613323666365 2  
6992366 6336062 735 6763035 4477162 035 045 07772355 47105 5 95 4 70279 0 1435 624045 171 06246436267945 6275 3 13407 33033625 4232 7 3944975 3 2437205 3 5314771926063 13346776 79695 97030  
9 33913077109 7040 5 91337464442 227726346 94704745 7 4 71 720927715 2 073167910770715 7213444730605 7007334924369313 35 0493632 40425 1925 65179 0694135 2 01347013047 1643 7 5 5 1 5  
2902 5 4521065 3 3244965 6213494345 95 62 5 65 5 705 526904965 209 5 033 5 07224264 293972 5 47 36305 77775 606 8 7644624 246 5 79260395 3527734 0304 029005 76075 251047491096439  
6362676044725 627420420 320 5 66190625 45 43721235 35 95 4 5 06 77246029106 766795 240663425 225 77195 42902919930645 3779941037340432 15 262 4 9 963 99 79475 729174642635 745 2540710945135 774  
36941091939325 191076020 25202 8 79 5 3 8 7705 429725 7677 13496990090121661713 727 4 476 4726 60 49003377024242965 13005 00516 32336435 03 95 751102 9 939223345 212018 2 0 0 06965 017 4 40 7 4  
51960212 2 5 9937162310171444 4640903 9064495 4440089 69075 4 5 1602632 75 05 29 349 740 7 66 0 8 3 3 5 1022 3345 0 5 04 60 25 039302133219715 5 430635 45 5 00766 2 2949304137765 5279397517  
546395 3 9 4 6 339363 30474619665 3 5 5 15 3 4205 6 5 33 6 2 6725 233402 3 0 712 32 27 9225 077126294632295 63 9 9 935 216745 6270102 35 64622013496715 7 19097303 19 00497340723761036 5 40  
664319395 0799106996395 5245 3005 045 0 06 5 0195 6730229219139339 5 6 03449039 2 005 95 510022635 35 3619404994745 5 3 5 93 10234395 5 4495 977 377902374216712711273643435 34947 22 1 5 2 6240 4  
51400666043325 5 5 69 6705 435 4706965 74745 5 5 033233342107305 45 9405165 537906 66273337995 5 15 62 7 43229 2 7372319 9 7 5 7145 95 7 116335 33005 940 7306 12602 764962 674460477464  
95 995 0549737425 6269104090377 19 6 35 93 3 465 74126 04925 64 79 5 5 645 372347 67333039046 3 343633465 537949 64927105 63 7293174 723320 3760230299136793 6270 943 79936206295 413371  
424 92 30722102690475 466 4765 35 786477379465 20049075 715 5 27 1965 36213239264086013635 15 5 907422020203 7277605 277219005 5 64 425 5 5 7925 303435 139 4425 322345 76233606425 063904975

Os gregos eram navegadores, comerciantes e viajantes e se relacionavam com todos os povos conhecidos.



Pitágoras teria viajado para o Egito e a Babilônia.





O chamado Teorema de Pitágoras era certamente conhecido na antiga Babilônia (tableta de 1700 aC)

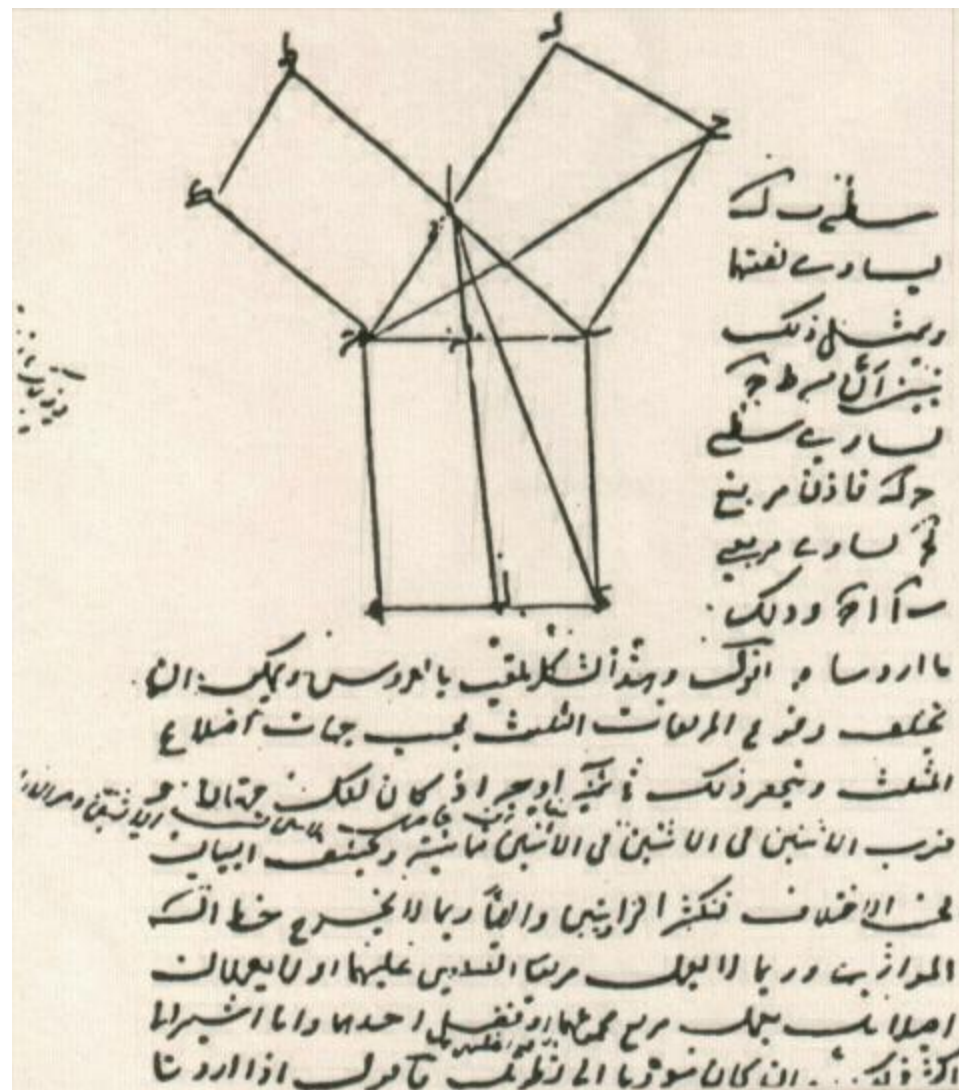


Irrracionalidade no mundo pitagórico  
Experiências de pensamento

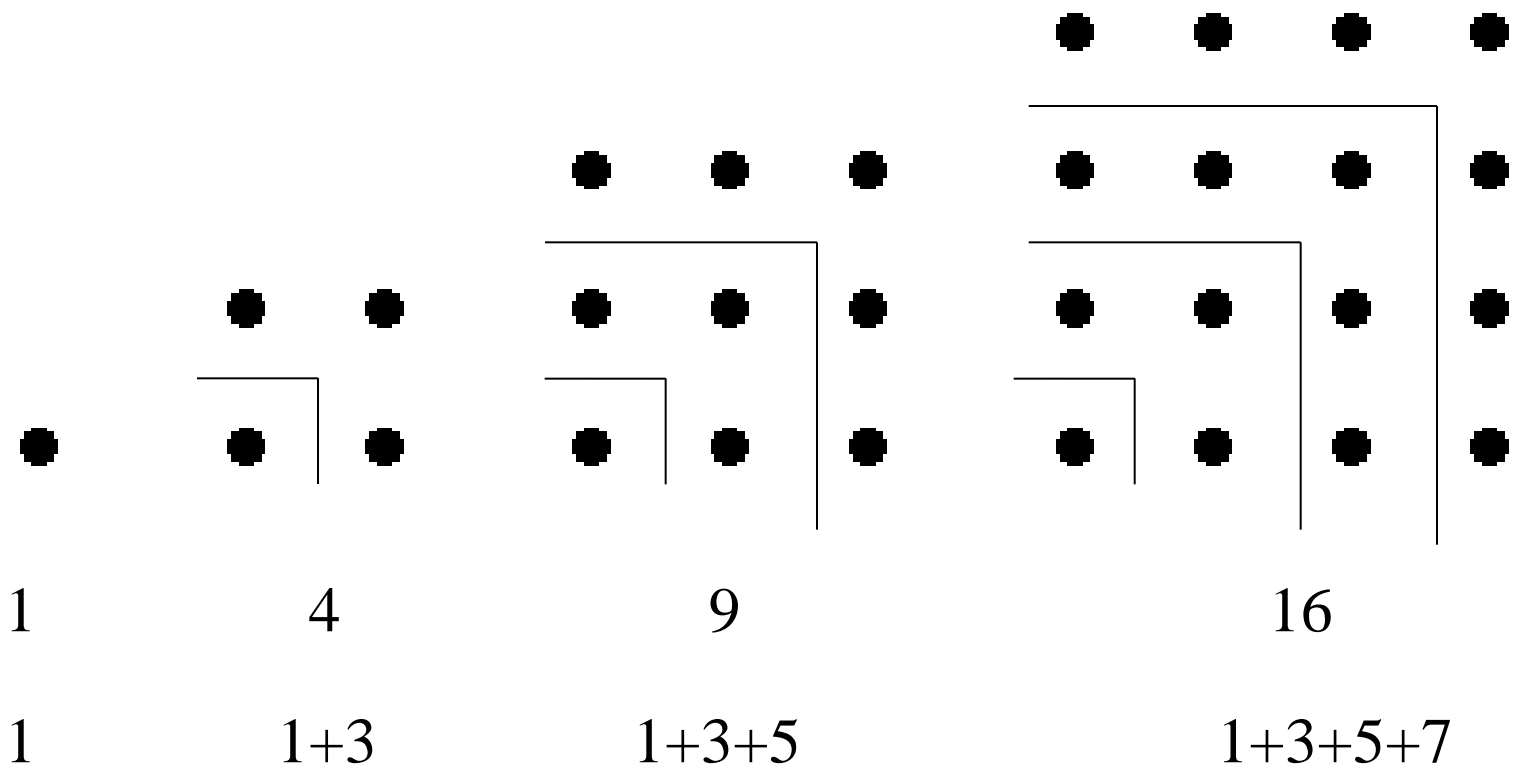
<http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=6876>



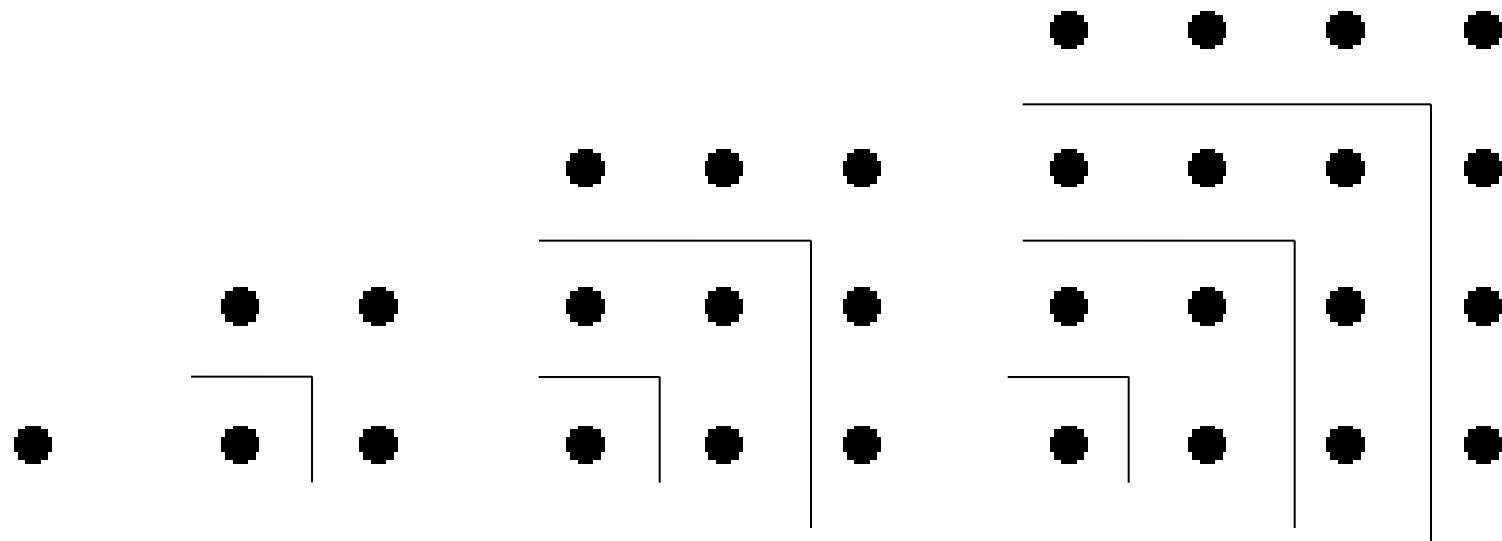
“Os Elementos” de Euclides (300 aC): obra de ligação entre Pitágoras e outros criadores da Matemática e o mundo moderno, via árabes. Euclides foi o grande organizador da Matemática. Será conservado pelos árabes da Casa da Cultura de Bagdá até ser traduzido para o latim.



Teorema de Pitágoras em Os *Elementos* de Euclides (manuscrito árabe)



Pitágoras dizia: “Tudo é Número”. Estudava os números figurados.



1

4

9

16

1

1+3

1+3+5

1+3+5+7

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

$$\text{Se } 2n + 1 = m^2,$$

$$\text{então } n = (m^2 - 1)/2$$

$$\text{e } n + 1 = (m^2 + 1)/2$$



$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se  $2n + 1 = m^2$ , então  $n = (m^2 - 1)/2$  e  $n + 1 = (m^2 + 1)/2$ ,

isto é, a fórmula acima se escreve como

$$(m^2 - 1)^2/4 + m^2 = (m^2 + 1)^2/4$$

m	$(m^2 - 1)/2$	$(m^2 + 1)/2$
3	4	5