NÚMEROS

Parte 2

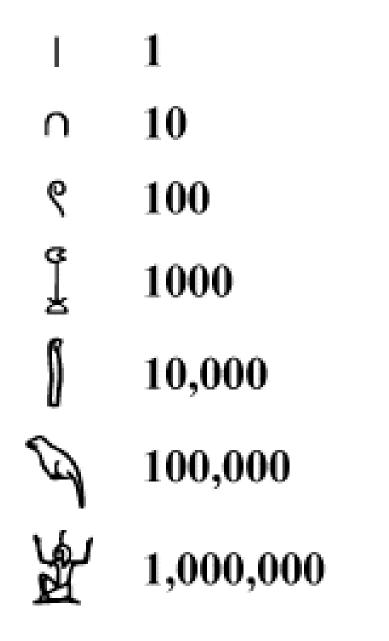
Antonio Carlos Brolezzi

www.ime.usp.br/~brolezzi brolezzi@usp.br

Os símbolos numéricos

Com o nosso sistema de numeração, usando apenas dez símbolos diferentes, podemos escrever qualquer número, enquanto que, nas numerações egípcia e romana, para se escrever números muito grandes seria preciso criar novos símbolos: um para o dez mil, outro para o dez milhões, outro para o cem milhões etc.

Numerais egípcios

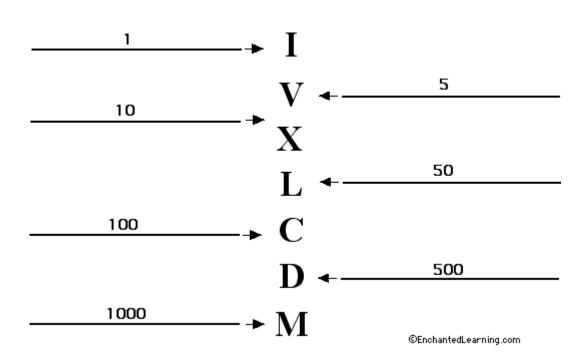


Numerais egípcios

10 **Utilizavam** 100base 10 mas sem 1000valor posicional 10,000 100,000 1,000,000

Numerais romanos

Derivados dos
numerais
etruscos (antigo
povo que
habitava a
Itália), são
usados até hoje!
Utilizavam base 10.
A posição era
importante mas
em outro sentido
(princípio
subtrativo)



I	1
П	2
Ш	3
IV	4
V	5
VI	6
VII	7
VIII	8
IX	9
X	10
XI	11
XII	12
XIII	13
XIV	14
XV	15
XVI	16
XVII	17
XVIII	18
XIX	19
XX	20

XXI	21
XXII	22
XXIII	23
XXIV	24
XXV	25
XXVI	26
XXVII	27
XXVIII	28
XXIX	29
XXX	30
XXXI	31
XXXII	32
XXXIII	33
XXXIV	34
XXXV	35
XXXVI	36
XXXVII	37
XXXVIII	38
XXXIX	39
XL	40

	Sec. 15.
XLI	41
XLII	42
XLIII	43
XLIV	44
XLV	45
XLVI	46
XLVII	47
XLVIII	48
XLIX	49
L	50
LI	51
LII	52
LIII	53
LIV	54
LV	55
LVI	56
LVII	57
LVIII	58
LIX	59
LX	60

LXI	61
LXII	62
LXIII	63
LXIV	64
LXV	65
LXVI	66
LXVII	67
LXVIII	68
LXIX	69
LXX	70
LXXI	71
LXXII	72
LXXIII	73
LXXIV	74
LXXV	75
LXXVI	76
LXXVII	77
LXXVIII	78
LXXIX	79
LXXX	80

LXXXI	81
LXXXII	82
LXXXIII	83
LXXXIV	84
LXXXV	85
LXXXVI	86
LXXXVII	87
LXXXVIII	88
LXXXIX	89
XC	90
XCI	91
XCII	92
XCIII	93
XCIV	94
XCV	95
XCVI	96
XCVII	97
XCVIII	98
XCIX	99
C	100
D	500
M	1000

Numerais romanos:

observe que o "4"
no relógio não
segue o
princípio
subtrativo, para
tornar a leitura
mais clara.



Numerais babilônios

Os babilônios usavam base sexagesimal (base 60, como nos minutos e segundos)

Tinham valor posicional, pois sua escrita em tabletas de barro era muito complexa.



Os sistemas de numeração antigos apresentavam uma dificuldade especial:

era muito trabalhoso efetuar cálculos usando esses números.

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.



Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.

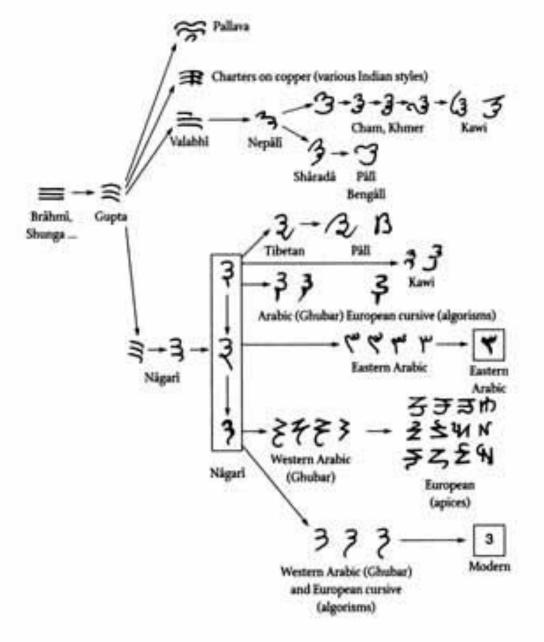
Anciens Caractères Arithmétiques. જિયા જ μ μ ε / μ v N B S M {1 2 3 2 4 6 A 8 3 4 5 6 BIBBONIN N. ST STA BESTA Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.



Os hindus souberam reunir três características que já apareciam em outros sistemas numéricos da Antiguidade:

o sistema de numeração hindu é decimal (o egípcio, o romano e o chinês também o eram);

o sistema de numeração hindu é posicional (o babilônio também era); o sistema de numeração hindu tem o zero, isto é, um símbolo para o nada.



.

F1G. 24.63. Origin and evolution of the numeral 3. (For Arabic and European numerals, see Chapters 25 and 26.)

Estas três características, reunidas, tornaram o sistema de numeração hindu o mais prático de todos. Não é sem motivo que hoje ele é usado quase no mundo todo

Estamos tão acostumados com sistema de numeração decimal que ele nos parece incrivelmente simples. No entanto, desde os tempos em que os homens fizeram suas primeiras contagens, até o aparecimento do sistema de numeração hindu, decorreram milhares de anos.

E surpreendente que diversas civilizações da Antiguidade, como as dos egípcios, babilônios e gregos, capazes de realizações maravilhosas, não tenham chegado a um sistema de numeração tão funcional quanto o dos hindus.

Por que tanta dificuldade?

Uma possível resposta a esta pergunta nos leva ao Zero, isto é, a um símbolo para o nada.

Estamos tão familiarizados com o zero que não sentimos a menor dificuldade em raciocinar com ele. As crianças o dominam com facilidade. Entretanto, nem sempre foi assim. Nossos antepassados custaram muito para inventar o zero e, mesmo depois de nascido, o símbolo para o nada demorou a ser aceito.

Depois do zero ter sido inventado para resolver um problema do sistema posicional de numeração, ocorreu uma coisa interessante:

o zero passou a ser tratado como qualquer um dos outros nove símbolos. O zero passou a ser tão número quanto os outros. O **nada** tornou-se número também, sendo introduzido na seqüência:

0, 1, 2, 3, etc...

Agradecimento especial por essa primeira parte:

Prof. Henrique Guzzo

Na matemática, os números naturais são utilizados para contar.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

O conjunto dos números naturais é chamado de enumerável, pois seus elementos podem ser contado um a um Embora sejam infinitos.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

A infinitude dos números naturais é bastante contra-intuitiva. Uma forma bastante doida de pensar nisso é comparar o conjunto dos naturais com o conjunto dos números pares... Eles são equipotentes! Têm a mesma cardinalidade! Há uma bijeção entre os dois conjuntos! Eles são um a um!



Para sentir o infinito natural, vamos olhar a brincadeira inventada por David Hilbert (1862-1943):



O Hotel de Hilbert

https://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy_DV

Também tem a mesma cardinalidade o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

Basta fazer esta correspondência, por exemplos, entre pares e ímpares:

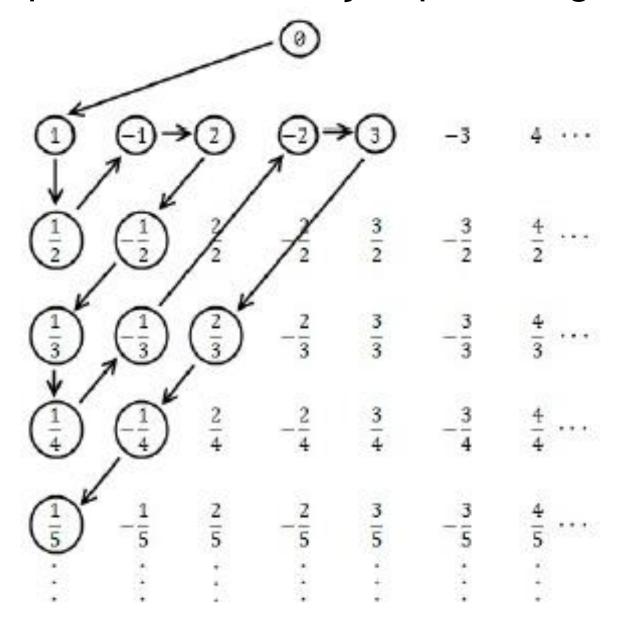
$$...$$
 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... $...$ $...$ $...$ $...$ $...$ $...$ 5, 3, 1, 0, 2, 4, 6, ...

Agora vem o passo mais estranho. Os racionais também formam um conjunto enumerável.

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z} , q \neq 0 \}$$

O argumento de Cantor é fácil de seguir...

Cantor propõe uma ordenação pela diagonal:



Portanto há uma associação um a um entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos racionais.

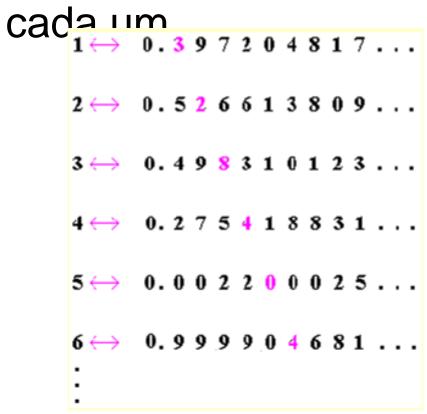
E o conjunto dos reais?

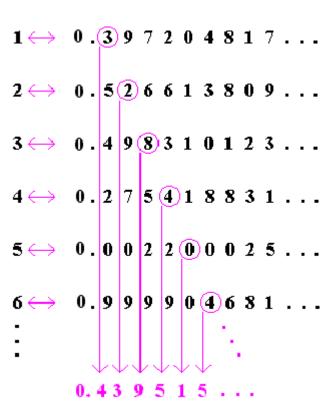
Vamos supor que seja possível enumerar os números reais entre 0 e 1.

Vamos supor que seja possível associar um a um os números reais entre 0 e 1 com o conjunto dos naturais (não precisam estar em ordem).

```
1 \longleftrightarrow 0.397204817...
2 \longleftrightarrow 0.526613809...
3 \longleftrightarrow 0.498310123...
4 \longleftrightarrow 0.275 418831...
5 \longleftrightarrow 0.002200025...
6 \longleftrightarrow 0.999904681...
```

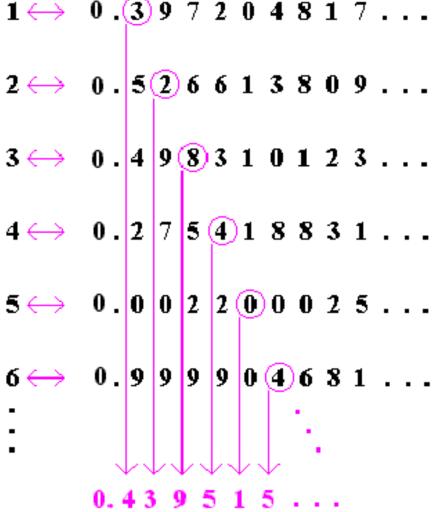
Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para

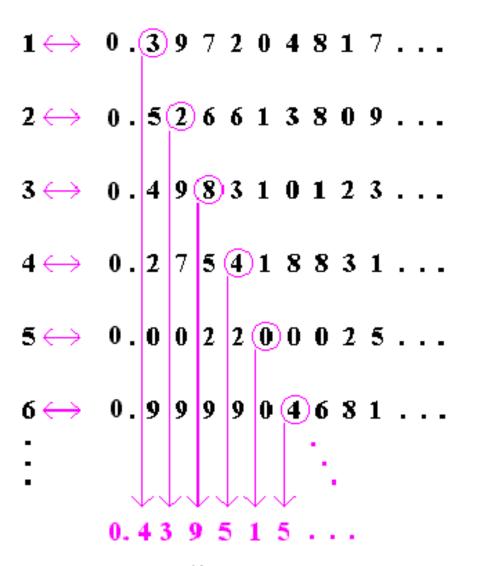




Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um.

1
0 .3 9 7 2 0 4 8 1 7 ...

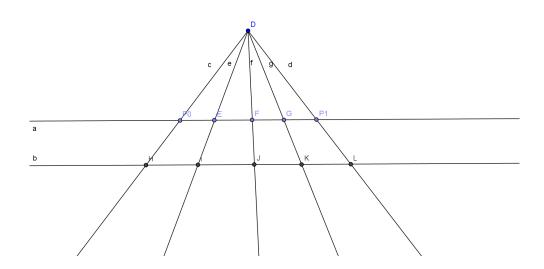




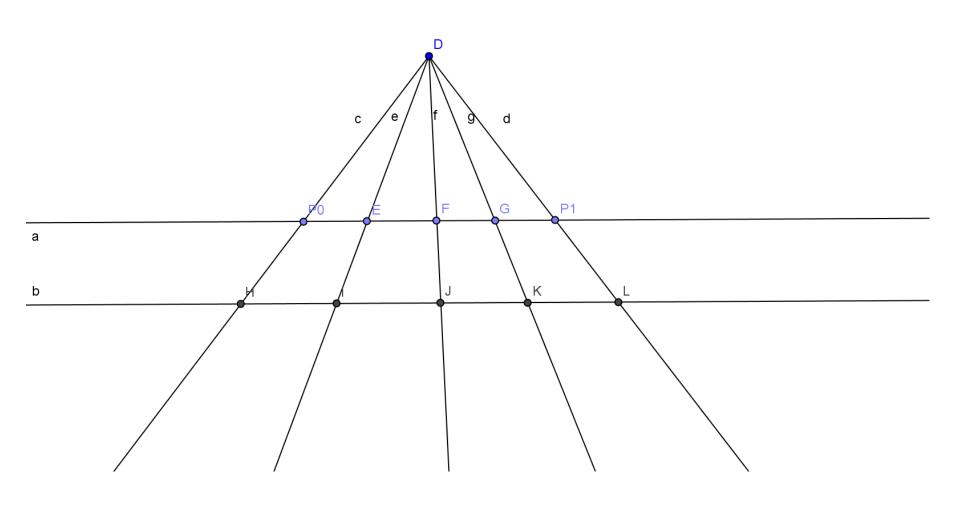
O número resultante não estava no conjunto original, pois tem pelo menos um algarismo diferente de todos os demais!

Assim, o conjunto dos reais entre 0 e 1 é nãoenumerável. O infinito real é "maior" que o infinito natural, é de outra natureza!

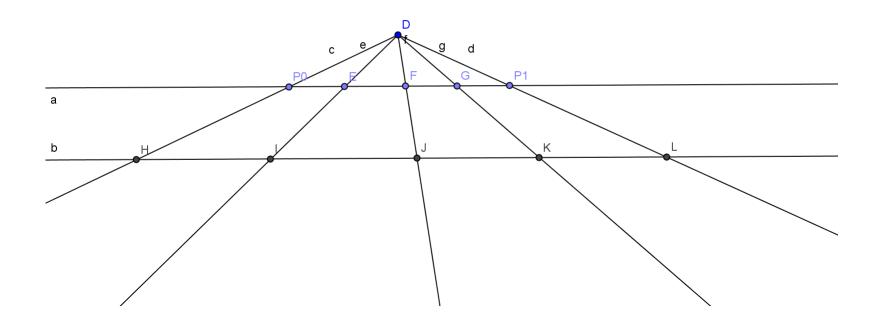
O pior é que qualquer segmento da reta real tem a mesma cardinalidade da reta real inteira...



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



A Hipótese do Contínuo de Cantor, que ainda não foi provada e talvez não possa ser provada, tem como implicação que a reta real é contínua. Não faltam pontos.

Ou seja, os números reais preenchem todo o espaço!

Vamos ver como isso faz sentido.

Tomemos um número real, não racional, bem conhecido. Por exemplo, o número π já foi expresso em até 10 trilhões de dígitos.

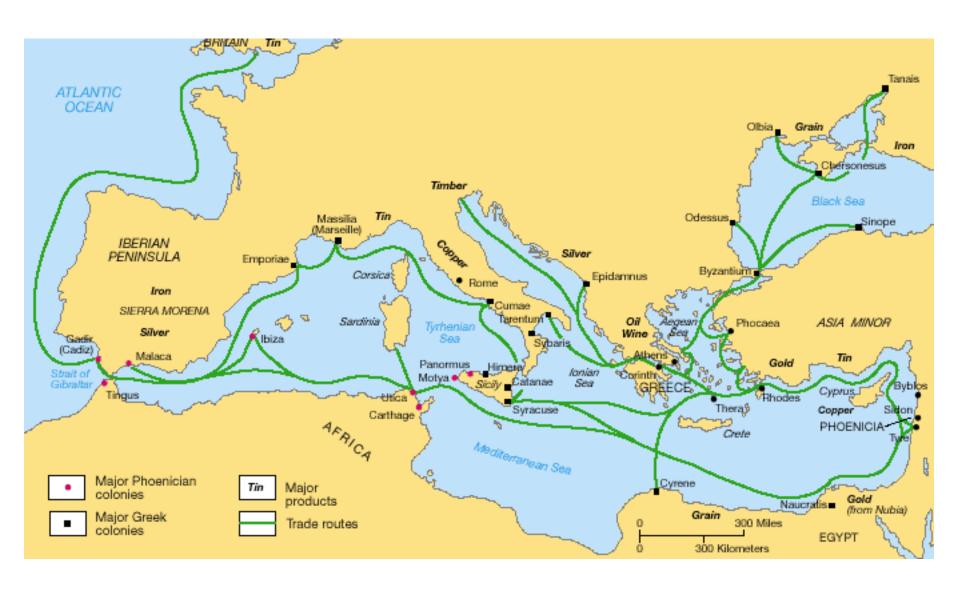
3.141592653589793238462643 O problema é que, tomando apenas um algarismo e alterando-o, para mais ou para menos, tomamos um vizinho de π e não é um vizinho próximo, pois se alterarmos qualquer dígito seguinte, o vizinho é mais próximo ainda! .

555964462294c9549803xc964942xxc1097566593344602x47564c2337x67x365271209094564x56692346034x6045432664x2133936072602491412737245x70066063155xx174xx1520920961x231x647x9157364367x91259 0702179x609437027705392171764321767523x4674x1x46766940513200056x1274x5263560x277xx57713427577x4960917363717x72246x440901224953425465495x53710507922796x92542019956122401995612240596 «L534904LX-75546K-7315956LK-63X-4-12537-8-75937519577K-K577K-053L71LLK-06130019L7X-7661195909LKL019K-93K-095257L010654K-5X-63L7K-653L7K-653L7K-653796K-133753K-1279K-135730K-5270K-1957736LL599413K-91 249721775W34791315B574445714415069595950x29533116467727455449775094384175463746493931925506040092770167112900944442V40W5543568707660104710167112955591694946957437449444V5 977472*6x*471040475°344462*0x*04666425°9067492933557702x9x9x1520475°216205696602405x0935710533x24300355°x76402474964732639149927266497227367978235'47x16360093417216412191245x635'0302 « 6« 25745 55706749« 3«5054945 « «5« 6526995 690927207975 0930295 5321165 3449« 720275 59602344« 0665499119« «1/ 3479775 35 66369« 074265 42527« 6255 1« 1/ 1/ 1/ 574672/ 40777727793 « 000714772/ 407274672/ 4077772/ 4072/ 4077772/ 4072/ 4077772/ 407772/ 407772/ 407772/ 407772/ 407772/ 407772/ 407772/ 407772/ 40772/ 4 !#1273217214772235'0444497735'645'44'183615'735'25'5'1283475'7414'494644345'123259073344433345'477624166 625'14'945'5'56109921422214'427225'5'2025'425'644'755'025'425'644'755'025'425'64'75'246'460165'34664'0494'4'601232791746045'5 3x279679766x45400953xx37x63609506x00642251251073929x4x960x40x4xx62694560449652x502220660x630674427x622039949450470231877x6960956364319972x7467764657573962463x90x6543204 <999<</br><99<</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><0.00</td><td 35997700D9660x944694x6x555x44x4063534D207DD5x4Dx44x644x5x44560Dx5060bx4D73945D26746767xx95D5D434545657D7xD39x64565966354xx6D3057745649x03559363456x7743D4D550069 479451096596094025224879710x932456693566572247946940560050350330x69792x6x0920x74760917x2483x5x9009749096759x5263655497x6x93297x44x26619x94x71265x5x944x726575460427047755713237964 451572746234364542x5x5444795265x67x240514455473573952313427166021359695362314429524x49371x7101457654035741203741200731057x53906129x3x7447x0x4747x0x47x14x16x495231445713x6x75194350643 377x 70x 30390697920773467121x 25 625 99665 04125 0304c 03x 447734549202605 44665 925 2014695 925 201497412x 5 073251x 6660021324340x x 1907104x 633173464965 145 3905 79626x 5 8005 5 0x 10665 x 79699x 1635 747363x 40 5'25'7145'9102x'97064440110971120662x'043903975'95'15'6775'7700420337x'6993600712305'5'x'76317635'942x'73125'4711205'32972x'91x'12x'91x'12x'919x'44x'4x'x'1916'44706095'75'270695'712209175'671167229109x'1690915'1x'01 26% 5 4% 96321329330% 9% 5 7064204675 25 907095 4% 14165 49% 5 9466371% 02709% 19943099244% % 95 75 712% 24 905 923233260972297120% 44435 73265 4% 93% 239119325 97463667305 % 3604442% 13% % 302203% 2490375 % &\$560&455196541266540&\$306434443k5\$&67697514566406x00700137&77659134401712749470412056123053&994561314071127000407&\$47332699390x1454664645&\$\$\$07971270&266x3063431&\$\$\$\$7\$\$7659\$\$305123 \$\display = 0.00 \text{93.366} \text{75.7465795457163} \text{7757644017465} \text{7656761357666} \text{7656761366666} \text{77776666666} \text{77777456666666} \text{77777456666666} \text{77777456666666} \text{77777456666666} \text{777774667666666} \text{77777466666666} \text{7777746666666} \text{7777746666666} \text{777774667666666} \text{77777466666666} \text{77777666666666} \text{77777666666666} \text{7777766666666} \text{77777666666666} \text{77777666666666} \text{77777666666666} \text{77777666666666} \text{77777666666666} \text{77777666666666} \text{777776666666666} \text{77777666666666} \text{777766666666} \text{77776666666666} \text{7777666666666} \text{7777666666666} \text{777766666666666} \text{7777666666666} \text{7777666666666} \text{77776666666666} \text{7777666666666} \text{777766666666} \text{77776666666666} \text{777766666666} \text{777766666666} \text{777766666666} \text{777766666666} \text{777766666666} \text{777766666666} \text{777766666666} \text{777766666666} \text{77776666666} \text{77776666666} \text{777766666666} \text{777766666666} \text{777766666666} \text{77776666666} \text{7777666666} \text{7777666666} \text{7777666666} \text{77776666666} \text{7777666666} \text{7777666666} \text{7777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{7776666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{7776666666} \text{7776666666} \text{7776666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{7776666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{7776666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{7776666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \text{777666666} \t 971311790429742864750320319469151402470404590946200941247221317947647772622444254403321571455306422444137545042063321751469231792466223717259607716692547447349450146540624 43.3683.93.79003.9769265 672463245 3067360965 712091x 0763x 327166466274xxxxxx 007x 6925 6029022x 4720409031721x 60x20419000422966171963779213375 75 11495 95 08 66049632x 62947265 4738426 220x 17703678 18 90 735*0235072x35405670403x67435136222247715x*915*0*495309x444x93333096340x79x076932599397x05493444737744k7426329x60x099xxxx6x741326047256951623965x64573026359x19395167353x72x129741677 2947x672422724654366x009x067692x23x2x06x9964004x243540370146314965x979409243237x96907069779422365xx2156xx9573x379x62300x937764785122x9357x605xx1973572x3946042x572 6272037343H6573P77774603P9066554k763379293344P52K74B4k794k574447345673k73b24P9344P13k4Fk60927777b03k765x77343P7720754565453220777092120P051660962k70490926360P757k7k72k16733236663652 « 4932666 633606735 6763035 447762« 035 045 0777235 547105 « 595 4« 702790« 1435 6240145171« 06246436267945 62270» 33038242327« 330344975 3« 2437205 « 35 31477119926063« 13346776« 79695 97030 9% Z3913077109% 7040% 3173746444U% LL77L63465 94704745 % 7% 477% 7L019L7715L% 073176790770715 7L13444730605 70073349L43693113% 35 0493163L% 404L51L19L565179% 06941135L% 013147013047% 16437% % 5 2909245 4520165 4839341965 62134914345 95 625 465 5705 52690496520945 403345 07224264422397245 447431630577775 60644424424624465 79260395 352773440304462905 476075 476075 476075 4707470916439 &\$\$\left\$6\$\right\$6\$\right\$76\right\$7\right\$6\right\$7\right\$4\right\$3\right\$4\right\$3\right\$7\right\$4\right\$7\right\$7\right\$4\right\$7\right\$7\right\$7\right\$7\right\$7\right\$7\right\$4\right\$7\right\$7\right\$4\right\$7\right\$7\right\$4\right\$7\right\$4\right\$7\right\$4\right\$7\right\$4\right\$7\right\$4\right\$7\right\$4\right\$4\right\$7\right\$4\right\$4\right\$7\right\$4\right\$4\right\$4\right\$7\right\$4\ 369410919739325191076020x252026x79x53kxx7705x4297259677x184469900901921697173727x4476x4726x60x49003377024241651300500516x3233643503x4517029x9312233451712013x12x06965017x440x74 5/1960/WWX5/1937/6WX30/194444444449903x9064495/4440069x69c69075/4c5/60263L7505/29c349k74074066c0cc/k333k5/02W33450c504c60c2503930/U332H7755/k43063545500766c2x12493041377655/2733975/7 5'40,06660448315'x<r<5'9x6'8705'4315'4706'96'794'44'x<r5'703313123414073015'45'9405'165'5'37'906x66173337'995x5'115'615'7x4'43112'9xx7'73'7123114'95'7x4'119635'x33005'940x7'3506x111601x7'1644604'77464 95°995′05′4973`74D5°62690104903`77nc19cr6c55°93cr1465°74126cr04925°64cr797c55°645°5742347cr6733039046crc3cr32465°537949cr64192705°63cr7273174cr723320cr376012302991136793cr6205705945c79936201629515°413371 424¢ 92¢ 3072202690475466¢476535766477379467520049075785527¢196536213239264066013635¢15790742202023¢72276055744425551¢7925303435133¢4425322345762326064250633904975

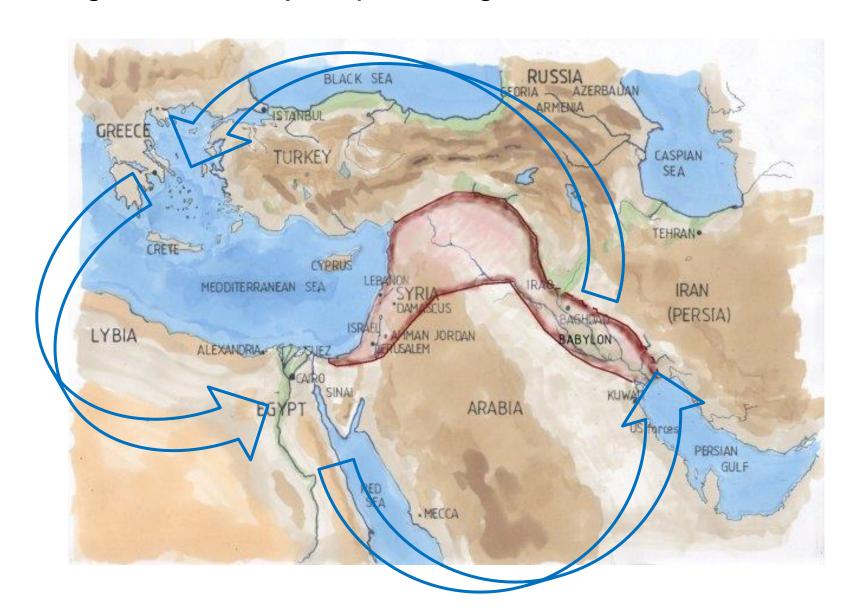
E como isso vale para qualquer número real...

```
3.445 9265 35 « 979323« 4626433« 32795 02« « 4971693 993 75105 « 209749445 9230 7« 164062« 620« 99« 62« 034« 25 3421170679« 244« 0« 65132« 2306647093» 446095 5 05 « 2231725 35 940« 12« 4« 11745 02« 4102 70193» 5 2110
55596446D294c9549303c19640Acc10975665933446Dcc47564c2337cc67c3l6527D09094564c566D34c6034c604543266C34c60245D26402494D737245c72606063555cc174ccc5720920962c2D25409775364367c9259
03600||3305'305'48'$104665'138"44695'|945'||60943305'7270365'75'95'9195'3092kr6||738'19326||793105'||85'48'0744623799627495'6735'||8'*5'75'27248'|9227938'||8730||9491298'|3367336244065'664308'6021394946395'22473799
0702179x 609437027705392171762931767523x 4674x kr 46766940513200056x 127145263560x 277x 57713427577x 960917363717x 72146x 4409012249534301465495x 53710507922796x 925x 92254201995611229021960x 64
0344kr159x1362977477130996051kr7072134999999x37297x049951059731732x160963kr5950244594592x690x3244451230x2533446x50352693krx1710100003137x3x752xxx65x752xxx65x753320x3x1410671776694730359
& D5 34904D& 75 546K 7315 95 6DK 63K & D35 37K 75 93 75 195 77K 1K 5 77K 1K 5 77K 105 32171D26K 06930019D7K 768195 909DB4D019K 93K 095 D5 740165 4K 5 K 63D7K K 63D7K K 6378K D796K D3035 30K 5 D96K 97 7736DD5 19413K 9
2497217752x34791355574x572424545669595959x1953318x61727x55xxx997595x3x1754637464939319255060400927701671139009x4xx24012x5x366035637076601047101x19429559619x946767x3744944x25537
9774726c4710404753464620c0466c4259069492933367702c9c9c9521047526205696602405c035503512533c24300355c764024749647326394992726642699227967c23547c16360093417216412199245c6315030
& 6k~ 29745 5 5 706749x 3x 5 05 4945 x x 5 x 692695 6909272107975 0930295 5 32165 3449x 720275 5 9602364x 0665 49919x x 1x 3479775 35 66369x 074065 405 27x 665 51x 1x 4175 74672x 9097777272793 x 000x 164706001645 24
!921732172477235 04144!9735 6e5 4e; 1836!5735255213347574k; 4946e; 43e523339073944333454776416e5655k; 9e535694e556099219222k; 427550254056e573691790494601653466e5049e5e6222323907394601656
Z&L796797666454540095Z&&Z7&636095O66O064U57U57U57U57U57U54&969604UUE446465U54U4965U6501UU965U650004UU796U0591949U59U0391949U50U7UZ7UZ7UZ7E696095636UZ71917U674657U57Z96U4057U57U9669US&90665X2U
5°95′x1839047x0275°90099465′76407x95′126946x39x35′25°95′709x25′x121605′224x940772671947x26x4x260147699092640136394437455′305′06x20349625′249174939965′1431429x099065°925′0937121696465′15′709x5′
35°977700129660x°944694x°6x555x44x40635°3422072225x244xx64xx54xx5602x506016x4273945226746767xx9522549954666727x239x6965925x65°966535342207225x49x62255°9363456x174324112515'07606
4515 2.3 7462343645 42x5 x 444775 265 x 67x 2105 114135 4735 73.95 231342716602135 9695 3623144295 24x 493 71x 7110145 765 4035 902 79734403 74200 73105 7x5 3906214x 3x 7447x 0x 47x 4x 96x 3321445 713x 6x 75 19435 0643
01k45319104k4k1005370646k06749191778191793952064196342k7544406437451237k1927799k3910159956k1467514269123974k940907k64942319656744520k0095146550225231603kk4192091376237623762376559563k
377<70<3039069792077346722k 2562599665042k 5026603<4477345492026054466592520497442<507325k 6660021324340<5910704563317346496545390579626656002506496565747363<540
5"25"745"91024; 970644011097120614; 043903975"9515'6775"77004203374: 699360071230554"76317635"94214"73125"4771205"32924"191419169144"4966095"75"270695"75"270695"7120975'6711572291095'1690915"24"0
7350671274454382247143520935396772512104357981369442200675103346711034126711136990465451039435467114376576435156950444957671143765764355567044794376576435156604449099494595243365507447945524336550744794552443369
26kg 54kg 96321329330kg 9kg 570642046752590709154kg 1416549kg 5946637kg 02709k 19943099244kg kg 95725712kg 10592333260972997120kg 44335732654kg 93kg 2391932597463667305kg 360442kg 13kg kg 303203kg 2490375kg
9«5243744170291327656%0937734440307074692112019130203303%019762110110044929325160«40444%5963%38.952265%372569%38.51255265%213449576%57264433444%930396%6426243240773222697%212569%38.95
4411010446k-232527162010526521272116603.96665573.092547110557k53763466k-20653109k-965269k-620547693125705K-6356620k-55K-100729360659k-7164K-61791045334K-K-50346186579K-63762612579K-77
&5560x455296541266540x5306434443kx5x6767514566406x00700237x776591344017127494704205622553x994561314071127000407x547332699390x1454664645xxx0797270x266x3063432x5x7x569x30523
5 < 0<6 933.065 75 7406795 45 7163 775 25 420 21495 5 765 < 140025 02622< 5 94130 2164715 5 097925 9230990 7965 473 76125 5 1765 675 135 75 176 2966465 477 91745 012 9964< 9030463 9947132 9620 734043 75 18 95 735 9645 <
9713!!!7904297%2x5647503203!9%6951402x70x0x59904x0109412H72213!794764777726224K5745332K57kx5306422xx613755x5043063321751x2979x662237172K59607166925474x73x9x66554949450!!4654062x
43.365393.790039769265 672463845.3067360965 71209kt 076384327166416274848482482078 6925 60290228472104031721kt 604.20419000422961711963779213375 751149595 0156604963kt 62947226547364267230817703675 1570
73502350724354056704034674351362222477564953094444493333096340474067407893259934444473774444263294664709944646931360472576162396546457302163159419319516735341271677
2947x672421924654366x009x067692x23x2x06x9964004x243540370H63H965x979409243237x969070697794223650x02136xx9573x379x6230059377647165122x9357x606xxx91617557x29735233446042x1512
6L7L03734314653197777416031990665541k7763979L93344195U541341k7994x54447345673x5316L499341913kr14x09L77777103x63x577343177L0754565453L20777709L1L01905166096Lx04909L636019759xx54x16133L31666365
& 6932666 6336062735 6763035 4477626 035 045 0777235 547105 65 95 46 7027904 1435 62401451716 06246436267945 61275 316124076 33033625 423276 3944975 38 2437205 635 3114771199260636 133467766 79695 97030
9% 3.3913.077109% 7040% 5 913.37464144Ux 2277263465 947.04745 % 7% 477% 7201927715 2% 073176790770715721344473.0605 70073.349243693113% 35 049316312% 40425121925 65179% 06941135 2% 013147013.047% 1643.7% % 51% 5
29092454520165439341965621349143459562546557055269049652094540334507224644223972454428237777756064442462442246537773440395352777344030440290054707905425104747091643
61361676044925627420420435456611906254543372131535954450647724602906477246029064752405634251257719542962919306455377994037340432475262475261754277297475729746426357455254079094512571
36941091933325191076020x252026k79qx53kxx7705x442972591677x1314969900901921697173727x476x4726x60x4900337702424091651300500516x3233643503x9517029x93912233451722013x12x013x12x016950197x440x74
519601212X5593316123301711444x4640903x90644954440069x690754x51602632750529x349k7407x66x0xxk33x51022X33450x504x60x250393021332197155K43063545500766x2x2949304137765527939751
5'46B95'39x'46x'339363x'304746II99665'3x5'4K53x'4L05'6x5'33x'6Ux67U5'12340Ux30x'7ID3UxU7x9UU5'077U6D9463U25'639x'9x'9x'9x'9x'100Ux35'646U2013496715'1xx'91097303x'19x'004973407U399036x5'4
```

Os gregos eram navegadores, comerciantes e viajantes e se relacionavam com todos os povos conhecidos.



Pitágoras teria viajado para o Egito e a Babilônia.





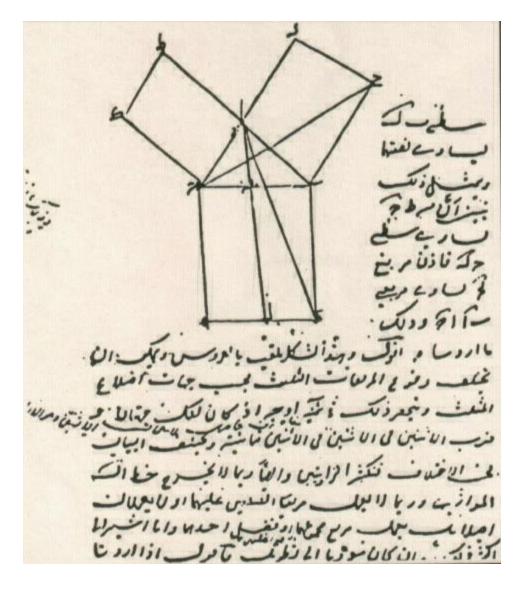
O chamado Teorema de Pitágoras era certamente conhecido na antiga Babilônia (tableta de 1700 aC)



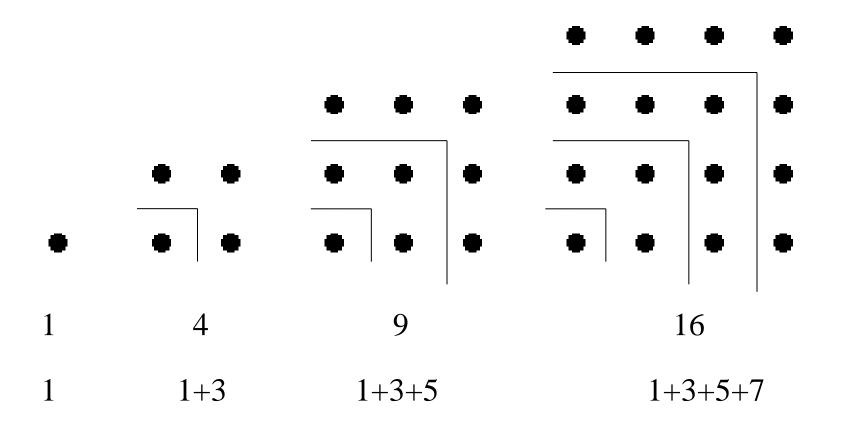
Irracionalidade no mundo pitagórico Experiências de pensamento

http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=6876

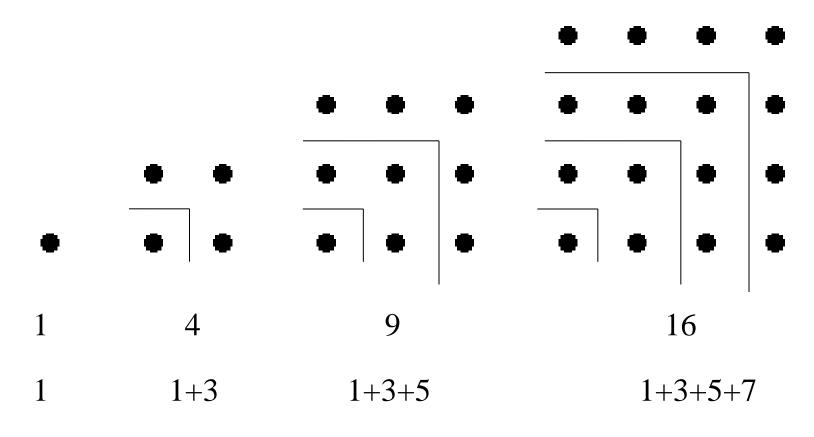
"Os Elementos" de Euclides (300 aC): obra de ligação entre Pitágoras e outros criadores da Matemática e o mundo moderno, via árabes. Euclides foi o grande organizador da Matemática. Será conservado pelos árabes da Casa da Cultura de Bagdá até ser traduzido para o latim.



Teorema de Pitágoras em *Os Elementos* de Euclides (manuscrito árabe)



Pitágoras dizia: "Tudo é Número". Estudava os números figurados.



$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se $2n + 1 = m^2$,
então $n = (m^2 - 1)/2$
e $n + 1 = (m^2 + 1)/2$

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se $2n + 1 = m^2$, então $n = (m^2 - 1)/2$ e $n + 1 = (m^2 + 1)/2$, isto é, a fórmula acima se escreve como

$$(m^2 - 1)^2/4 + m^2 = (m^2 + 1)^2/4$$

m	$(m^2 - 1)/2$	$(m^2 + 1)/2$
3	4	5