

1.1 Exercícios

1. Se $f(x) = x + \sqrt{2-x}$ e $g(u) = u + \sqrt{2-u}$, é verdadeiro que $f = g$?

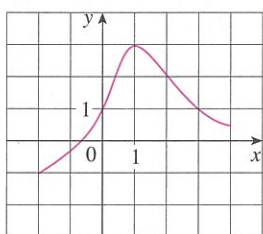
2. Se

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} \quad \text{e} \quad g(x) = x$$

é verdadeiro que $f = g$?

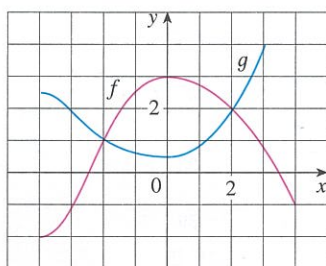
3. O gráfico de uma função f é dado:

- (a) Diga o valor de $f(1)$.
- (b) Estime o valor de $f(-1)$.
- (c) Para quais valores de x é $f(x) = 1$?
- (d) Estime os valores de x tais que $f(x) = 0$.
- (e) Diga qual é o domínio e a imagem de f .
- (f) Em qual intervalo f é crescente?



4. Os gráficos de f e g são dados.

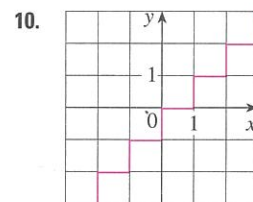
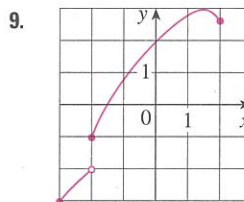
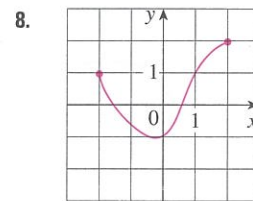
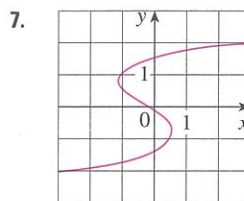
- (a) Diga o valor de $f(-4)$ e $g(3)$.
- (b) Para quais valores de x é $f(x) = g(x)$?
- (c) Estime a solução da equação $f(x) = -1$.
- (d) Em qual intervalo f é decrescente?
- (e) Diga qual é o domínio e a imagem de f .
- (f) Obtenha o domínio e a imagem de g .



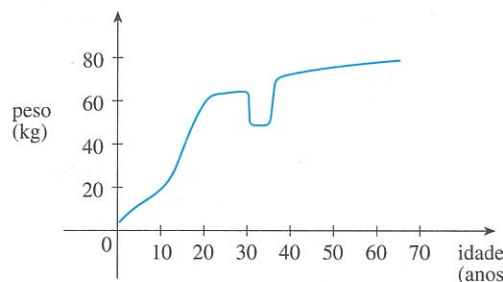
5. A Figura 1 foi registrada por um instrumento monitorado pelo Departamento de Minas e Geologia da Califórnia pertencente ao Hospital Universitário do Sul da Califórnia, em Los Angeles. Use-a para estimar a imagem da função da aceleração vertical do solo na USC durante o terremoto de Northridge.

6. Nesta seção, discutimos os exemplos de funções cotidianas: a população em função do tempo; o custo da franquia postal em função do peso; a temperatura da água em função do tempo. Dê três novos exemplos de funções cotidianas que possam ser descritas verbalmente. O que você pode dizer sobre o domínio e a imagem de cada uma dessas funções? Se possível, esboce um gráfico para cada uma delas.

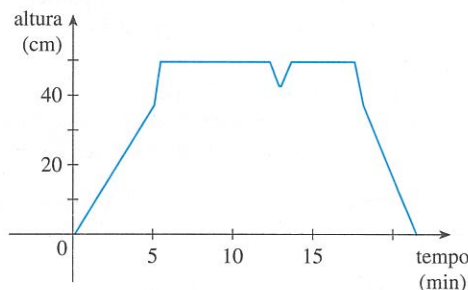
7-10 Determine se a curva é o gráfico de uma função de x . Se o for, determine o domínio e a imagem da função.



11. O gráfico mostra o peso de uma certa pessoa como uma função da idade. Descreva em forma de texto como o peso dessa pessoa varia com o tempo. O que você acha que aconteceu quando essa pessoa tinha 30 anos?

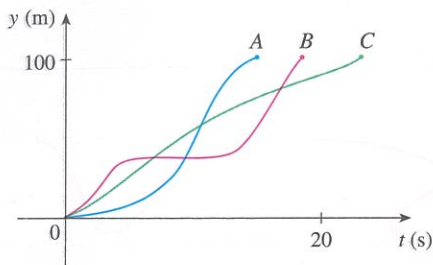


12. O gráfico mostra a altura da água na banheira como uma função de tempo. Dê uma descrição verbal do que você acha que aconteceu.

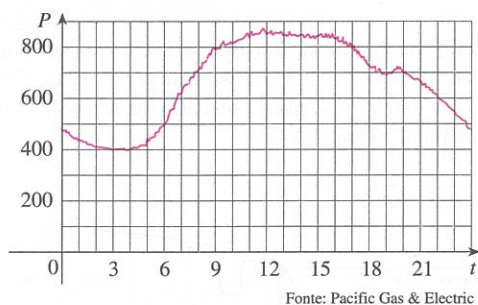


13. Ponha cubos de gelo em um copo, encha-o com água fria e deixe-o sobre uma mesa. Descreva como vai variar no tempo a temperatura da água. Esboce então um gráfico da temperatura da água como uma função do tempo decorrido.

14. Três corredores competem em uma corrida de 100 metros. O gráfico representa a distância da corrida como uma função de tempo para cada corredor. Descreva o que o gráfico diz sobre esta corrida. Quem ganhou? Todos os corredores finalizaram a prova?



15. O gráfico mostra o consumo de energia por um dia em setembro em São Francisco. (P é medido em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite.)
- O que acontece com o consumo de energia às 6 da manhã? E às 6 da tarde?
 - Quando houve o menor consumo de energia? E quando foi o maior? Esses horários parecem razoáveis?



- Esboce um gráfico do número de horas diárias de luz do sol como uma função do tempo no decorrer de um ano.
- Esboce um gráfico da temperatura externa como uma função do tempo durante um dia típico de primavera.
- Esboce um gráfico do valor de mercado de um carro novo como função do tempo por um período de 20 anos. Suponha que ele esteja bem conservado.
- Esboce o gráfico da quantidade de uma marca particular de café vendida por uma loja como função do preço do café.
- Coloque uma torta gelada em um forno e asse-a por uma hora. Tire-a do forno e deixe-a esfriar antes de comê-la. Descreva como varia no tempo a temperatura da torta. Esboce um gráfico da temperatura da torta como uma função do tempo.
- Um homem aparar seu gramado toda quarta-feira à tarde. Esboce o gráfico da altura da grama como uma função do tempo no decorrer de um período de quatro semanas.
- Um avião decola de um aeroporto e aterrissa uma hora depois em outro aeroporto, a 400 km. Se t representa o tempo em minutos desde a partida do avião, seja $x(t)$ a distância horizontal percorrida e $y(t)$ a altura do avião.
 - Esboce um possível gráfico de $x(t)$.
 - Esboce um possível gráfico de $y(t)$.
 - Esboce um possível gráfico da velocidade no solo.
 - Esboce um possível gráfico da velocidade vertical.
- Uma estimativa anual do número N (em milhões) de assinantes de telefones celulares nos Estados Unidos é mostrada na tabela. (Estimativas dadas para meados do ano.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

- Use os dados da tabela para esboçar o gráfico de N como uma função t .

(b) Use seu gráfico para estimar o número de assinantes de telefones celulares nos anos de 2001 e 2005.

24. Os registros de temperatura T (em $^{\circ}\text{C}$) foram tomados de três em três horas a partir da meia-noite até às 15 horas em Montreal, em 13 de julho de 2004. O tempo foi medido em horas a partir da meia-noite.

t	0	3	6	9	12	15
T	21,5	19,8	20,0	22,2	24,8	25,8

- Use os registros para esboçar um gráfico de T como uma função de t .
 - Use seu gráfico para estimar a temperatura às 11 horas da manhã.
25. Se $f(x) = 3x^2 - x + 2$, ache $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a + 1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ e $f(a + h)$.
26. Um balão esférico com raio de r polegadas tem o volume $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encontre uma função que represente a quantidade de ar necessária para inflar o balão de um raio de r polegadas até um raio de $r + 1$ polegada.

27–30 Calcule o quociente das diferenças para a função dada. Simplifique sua resposta.

27. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$

28. $f(x) = x^3$, $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

29. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

30. $f(x) = \frac{x + 3}{x + 1}$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

31–37 Encontre o domínio da função.

31. $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 9}$

32. $f(x) = \frac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

33. $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

34. $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

35. $h(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

36. $f(u) = \frac{u + 1}{1 + \frac{1}{u + 1}}$

37. $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$

38. Encontre o domínio e a imagem e esboce o gráfico da função $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

39–50 Encontre o domínio e esboce o gráfico da função.

39. $f(x) = 2 - 0,4x$

40. $F(x) = x^2 - 2x + 1$

41. $f(t) = 2t + t^2$

42. $H(t) = \frac{4 - t^2}{2 - t}$

43. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

44. $F(x) = |2x + 1|$

45. $G(x) = \frac{3x + |x|}{x}$

46. $g(x) = |x| - x$

47. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

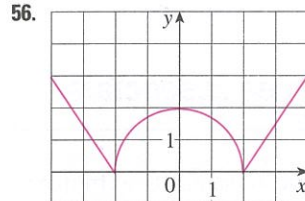
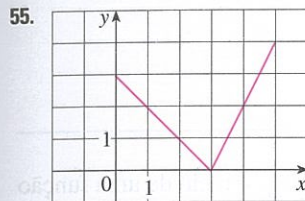
48. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{se } x < -3 \\ -2x & \text{se } |x| \leq 3 \\ -6 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

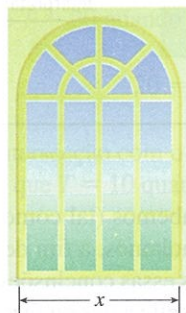
51-56 Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva dada.

51. O segmento de reta unindo os pontos (1, -3) e (5, 7)
 52. O segmento de reta unindo os pontos (-5, 10) e (7, -10)
 53. A metade inferior da parábola $x + (y - 1)^2 = 0$
 54. A metade superior do círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

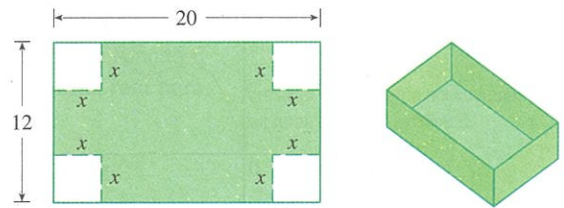


57-61 Encontre uma fórmula para a função descrita e obtenha seu domínio.

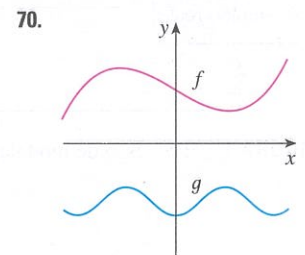
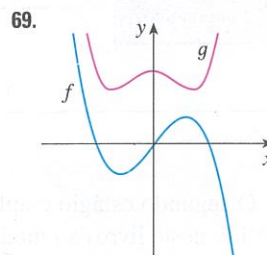
57. Um retângulo tem um perímetro de 20 m. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.
 58. Um retângulo tem uma área de 16 m². Expresse o perímetro do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.
 59. Expresse a área de um triângulo equilátero como uma função do comprimento de um lado.
 60. Expresse a área da superfície de um cubo como uma função de seu volume.
 61. Uma caixa retangular aberta com volume de 2 m³ tem uma base quadrada. Expresse a área da superfície da caixa como uma função do comprimento de um lado da base.
 62. Uma janela normanda tem o formato de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo. Se o perímetro da janela for de 10 m, expresse a área A da janela como uma função de sua largura x.



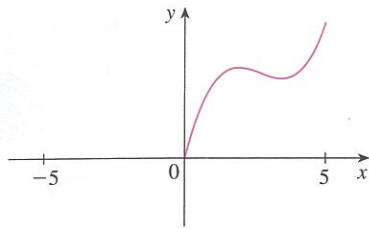
63. Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 12 cm por 20 cm. Para isso, devem-se cortar quadrados de lados x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura. Expresse o volume V da caixa como uma função de x.



64. Um plano de telefone celular tem uma taxa de US\$ 35 mensais. O plano inclui 400 minutos gratuitos e taxa de 10 centavos para cada minuto adicional utilizado. Expresse o custo mensal C como uma função do número de minutos utilizados e esboce o gráfico C como uma função de x para $0 \leq x \leq 600$.
 65. Em uma certa província a velocidade máxima permitida em estradas é de 100km/h e a velocidade mínima é de 50km/h. A multa por violar esses limites é de US\$ 10 para cada quilômetro por hora acima da velocidade máxima ou abaixo da velocidade mínima. Expresse a quantidade de multa F como uma função de velocidade de condução x e esboce o gráfico F(x) para $0 \leq x \leq 180$.
 66. Uma empresa de eletricidade cobra de seus clientes uma taxa-base de US\$ 10 mensais, mais 6 centavos por quilowatt-hora (kWh) para os primeiros 1 200 kWh e 7 centavos para todo o uso acima de 1 200 kWh. Expresse o custo mensal E como uma função da quantidade utilizada x de eletricidade. Então, faça um gráfico da função E para $0 \leq x \leq 2000$.
 67. Em um certo país, o imposto de renda é taxado da maneira a seguir: não existe nenhuma taxa para rendimentos de até US\$ 10.000,00. Qualquer renda acima de US\$ 10.000,00 e abaixo de US\$ 20.000,00 tem uma taxa de 10%. Qualquer renda acima de US\$ 20.000,00 é taxada a 15%.
 (a) Esboce o gráfico da taxa de impostos R como uma função da renda I.
 (b) Qual o imposto cobrado sobre um rendimento de \$ 14.000? E sobre \$ 26.000?
 (c) Esboce o gráfico do imposto total cobrado T como uma função da renda I.
 68. As funções no Exemplo 10 e no Exercícios 67 são chamadas *funções escada* em virtude do aspecto de seus gráficos. Dê dois outros exemplos de funções escada que aparecem no dia a dia.
 69-70 Os gráficos de f e g são mostrados a seguir. Verifique se cada função é par, ímpar ou nem par nem ímpar. Explique seu raciocínio.



71. (a) Se o ponto (5, 3) estiver no gráfico de uma função par, que outro ponto também deverá estar no gráfico?
 (b) Se o ponto (5, 3) estiver no gráfico de uma função ímpar, que outro ponto também deverá estar no gráfico?
 72. Uma função f tem o domínio [-5, 5] e é mostrada uma parte do seu gráfico.
 (a) Complete o gráfico de f sabendo que f é uma função par.
 (b) Complete o gráfico de f sabendo que f é uma função ímpar.



73–78 Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois. Se você tiver uma calculadora gráfica, use-a para verificar visualmente sua resposta.

73. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

74. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

75. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

76. $f(x) = x|x|$

77. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

78. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

79. Se f e g são funções pares, $f + g$ é par? Se f e g são funções ímpares, $f + g$ é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar? Justifique suas respostas.

80. Se f e g são funções pares, o produto fg é par? Se f e g são funções ímpares, fg é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar? Justifique suas respostas.

1.2 Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Essenciais

Um **modelo matemático** é a descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução de poluentes. O propósito desses modelos é entender o fenômeno e talvez fazer previsões sobre seu comportamento futuro.

A Figura 1 ilustra o processo de modelagem matemática. Dado um problema do mundo real, nossa primeira tarefa é formular um modelo matemático por meio da identificação e especificação das variáveis dependentes e independentes e da formulação de hipóteses que simplifiquem o fenômeno o suficiente, tornando-o matematicamente tratável. Usamos nosso conhecimento da situação física e nossos recursos matemáticos para obter equações que relacionem as variáveis. Em situações em que não existe uma lei física para nos guiar, pode ser necessário coletar dados (de uma biblioteca, da Internet ou conduzindo nossas próprias experiências) e examiná-los na forma de uma tabela, a fim de perceber os padrões. Dessa representação numérica de uma função podemos obter sua representação gráfica marcando os dados. Esse gráfico pode até sugerir a fórmula algébrica apropriada, em alguns casos.

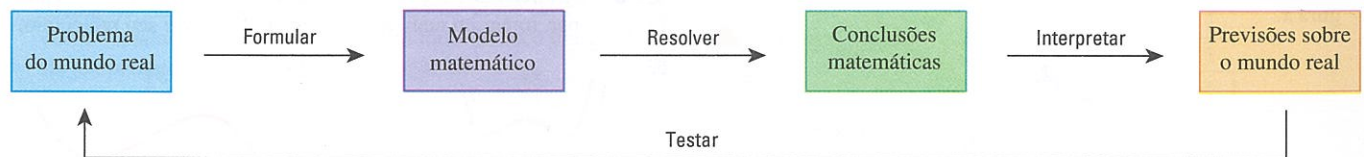


FIGURA 1 Processo de modelagem

O segundo estágio é aplicar a matemática que sabemos (tal como o cálculo a ser desenvolvido neste livro) ao modelo matemático que formulamos, a fim de tirar conclusões matemáticas. Então, em um terceiro estágio, interpretamos essas conclusões matemáticas como informações sobre o fenômeno original e oferecemos explicações ou fazemos previsões. A etapa final é testar nossas previsões, comparando-as com novos dados reais. Se as previsões não se ajustam bem à realidade, precisamos refinar nosso modelo ou formular um novo, começando novamente o ciclo.

Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física – é uma *idealização*. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

Existem vários tipos diferentes de funções que podem ser usados para modelar as relações observadas no mundo real. A seguir, discutiremos o comportamento e os gráficos dessas funções e daremos exemplos de situações modeladas apropriadamente por elas.