

Os números irracionais

Parte 2

Na matemática, os números naturais são utilizados para contar.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

O conjunto dos números naturais é chamado de enumerável, pois seus elementos podem ser contado um a um Embora sejam infinitos.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

A infinitude dos números naturais é bastante contra-intuitiva. Uma forma bastante doida de pensar nisso é comparar o conjunto dos naturais com o conjunto dos números pares... Eles são equipotentes! Têm a mesma cardinalidade! Há uma bijeção entre os dois conjuntos! Eles são um a um!

1 2 3 4 5 6 7

2 4 6 8 10 12 14 ...

Para sentir o infinito natural, vamos olhar a brincadeira inventada por David Hilbert (1862-1943):



O Hotel de Hilbert

https://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy_DVU

Também tem a mesma cardinalidade o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Basta fazer esta correspondência, por exemplos, entre pares e ímpares:

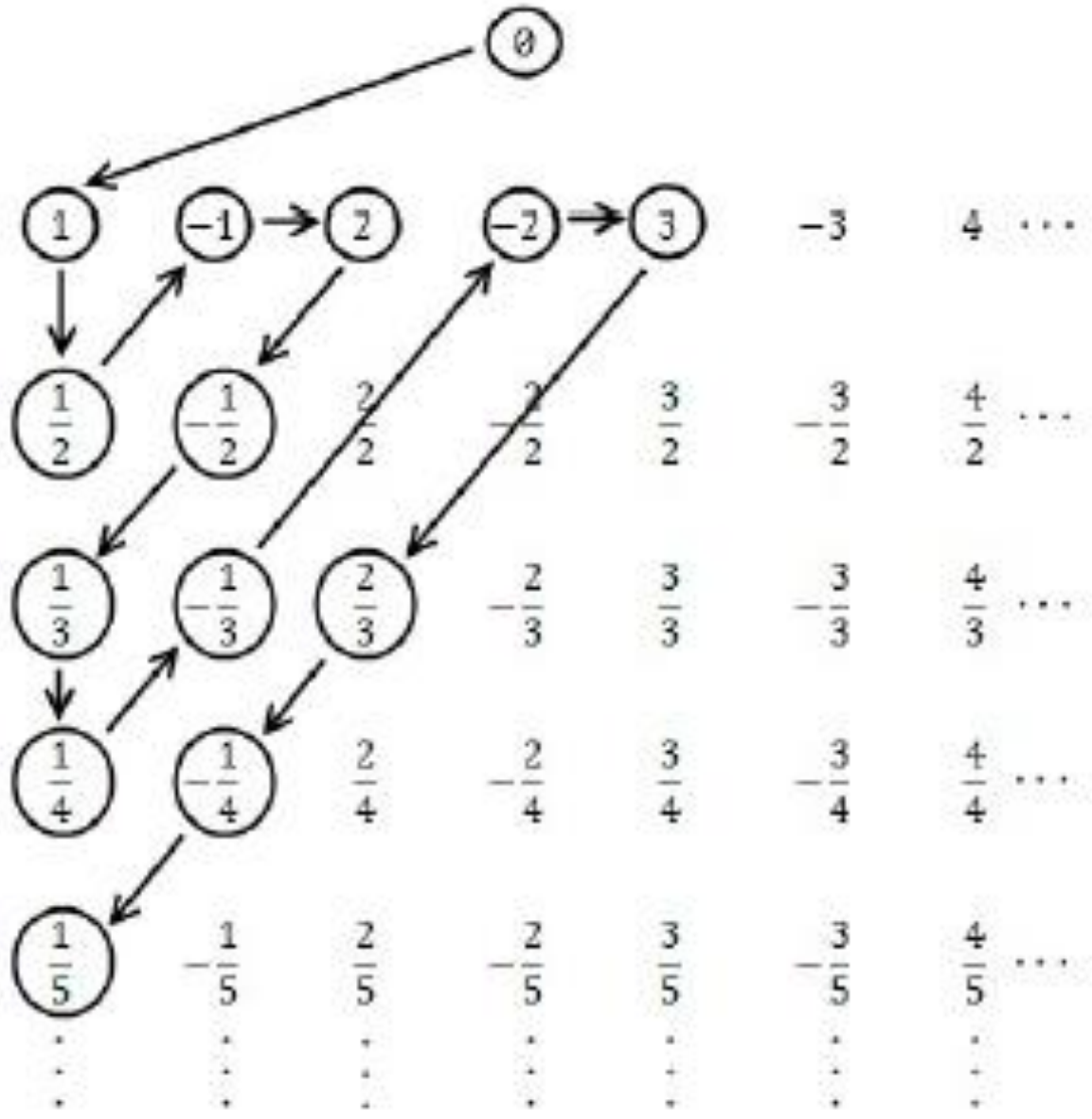
...	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	...
...	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	...
...	5,	3,	1,	0,	2,	4,	6,	...

Agora vem o passo mais estranho. Os racionais também formam um conjunto enumerável.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

O argumento de Cantor é fácil de seguir...

Cantor propõe uma ordenação pela diagonal:



Portanto há uma associação um a um entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos racionais.

E o conjunto dos reais?

Vamos supor que seja possível enumerar os números reais entre 0 e 1.

Vamos supor que seja possível associar um a um os números reais entre 0 e 1 com o conjunto dos naturais (não precisam estar em ordem).

1 ↔	0. 3 9 7 2 0 4 8 1 7 . . .
2 ↔	0. 5 2 6 6 1 3 8 0 9 . . .
3 ↔	0. 4 9 8 3 1 0 1 2 3 . . .
4 ↔	0. 2 7 5 4 1 8 8 3 1 . . .
5 ↔	0. 0 0 2 2 0 0 0 2 5 . . .
6 ↔	0. 9 9 9 9 0 4 6 8 1 . . .
.	
.	
.	

Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um.

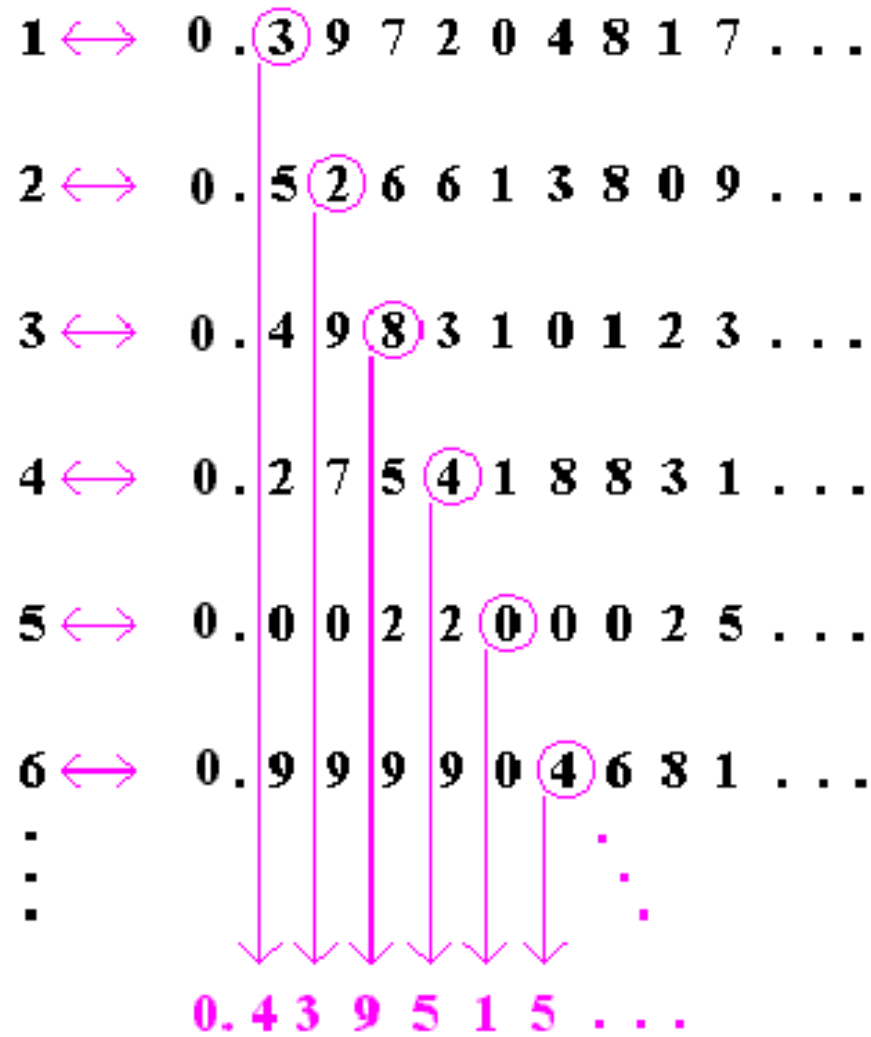
1	↔	0.	3	9	7	2	0	4	8	1	7	...
2	↔	0.	5	2	6	6	1	3	8	0	9	...
3	↔	0.	4	9	8	3	1	0	1	2	3	...
4	↔	0.	2	7	5	4	1	8	8	3	1	...
5	↔	0.	0	0	2	2	0	0	0	2	5	...
6	↔	0.	9	9	9	9	0	4	6	8	1	...
:												
:												

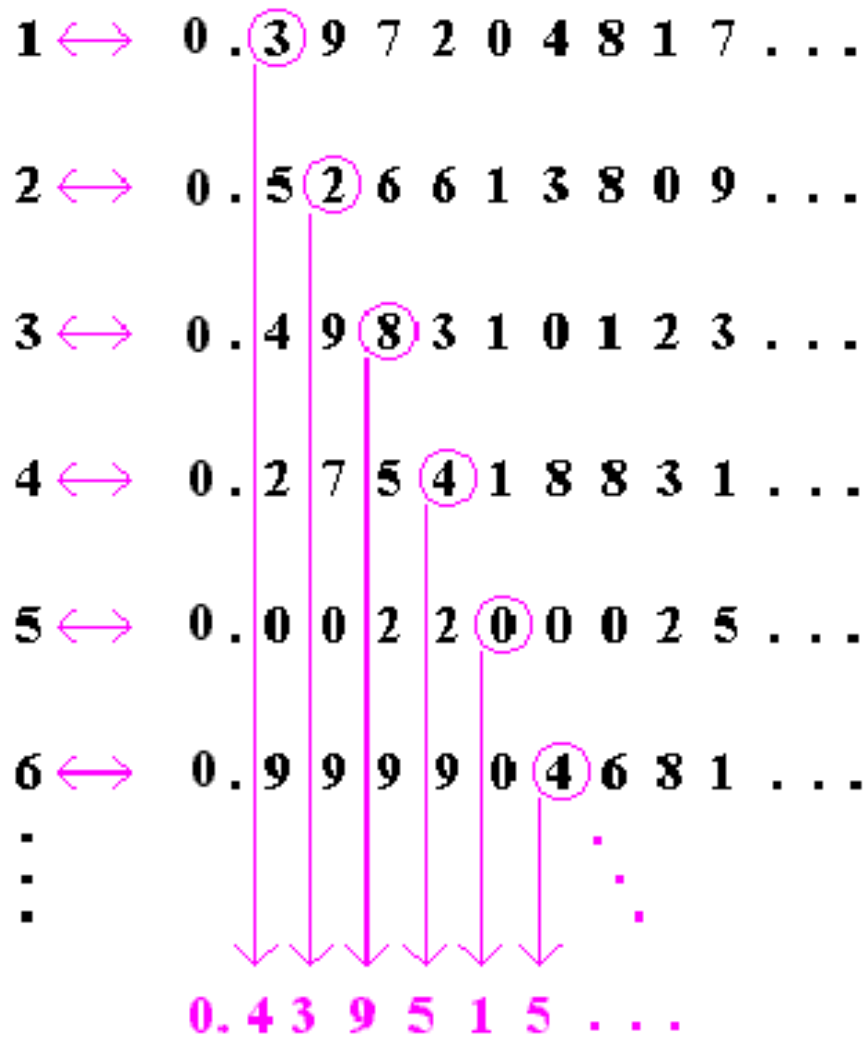
1	↔	0.	3	9	7	2	0	4	8	1	7	...
2	↔	0.	5	2	6	6	1	3	8	0	9	...
3	↔	0.	4	9	8	3	1	0	1	2	3	...
4	↔	0.	2	7	5	4	1	8	8	3	1	...
5	↔	0.	0	0	2	2	0	0	0	2	5	...
6	↔	0.	9	9	9	9	0	4	6	8	1	...
:												
:												

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

0.439515...

Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um.

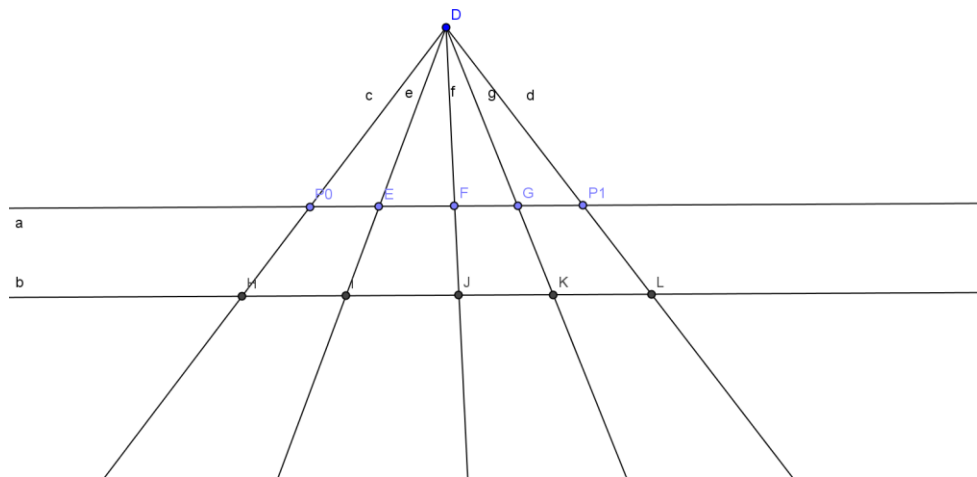




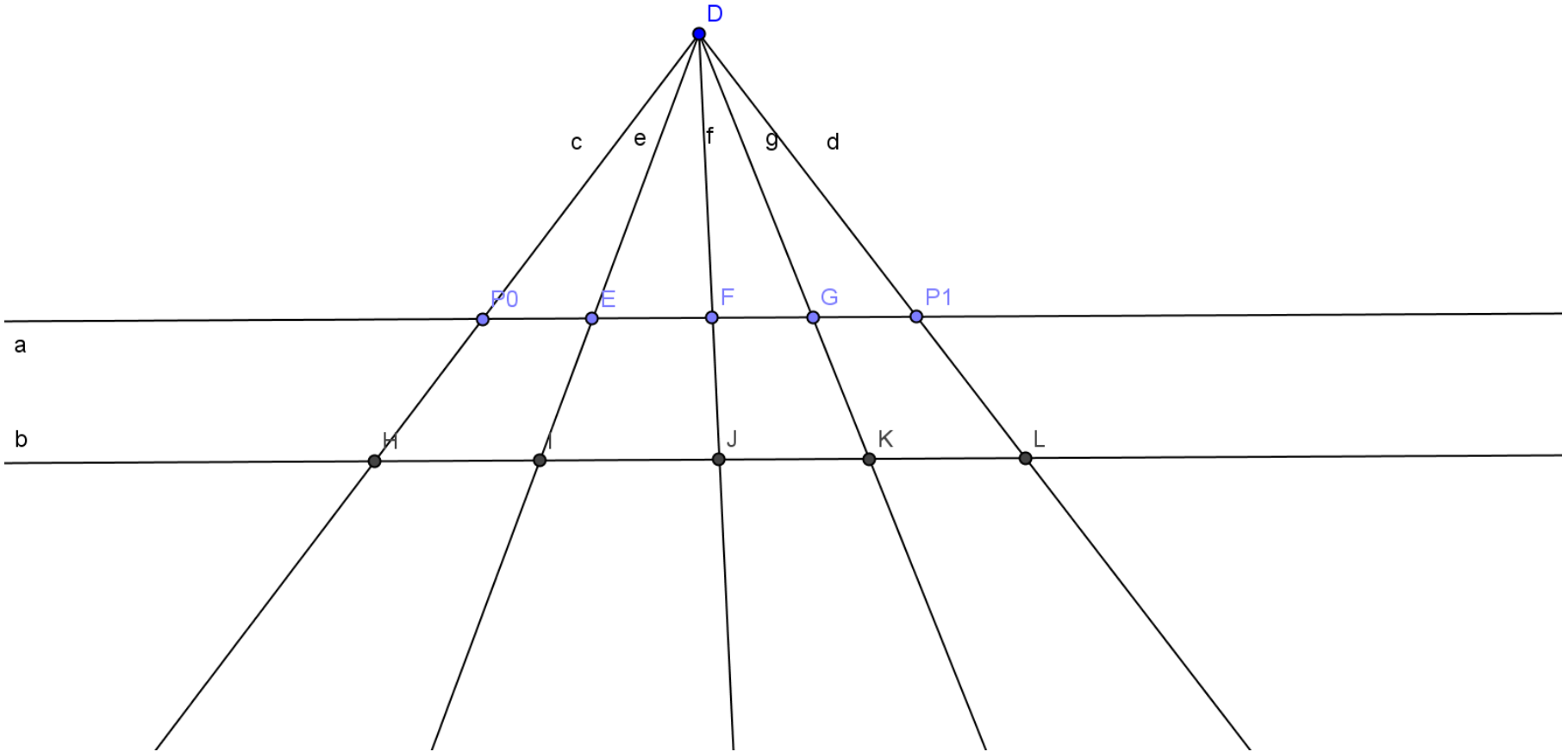
O número resultante não estava no conjunto original, pois tem pelo menos um algarismo diferente de todos os demais!

Assim, o conjunto dos reais entre 0 e 1 é não-enumerável. O infinito real é “maior” que o infinito natural, é de outra natureza!

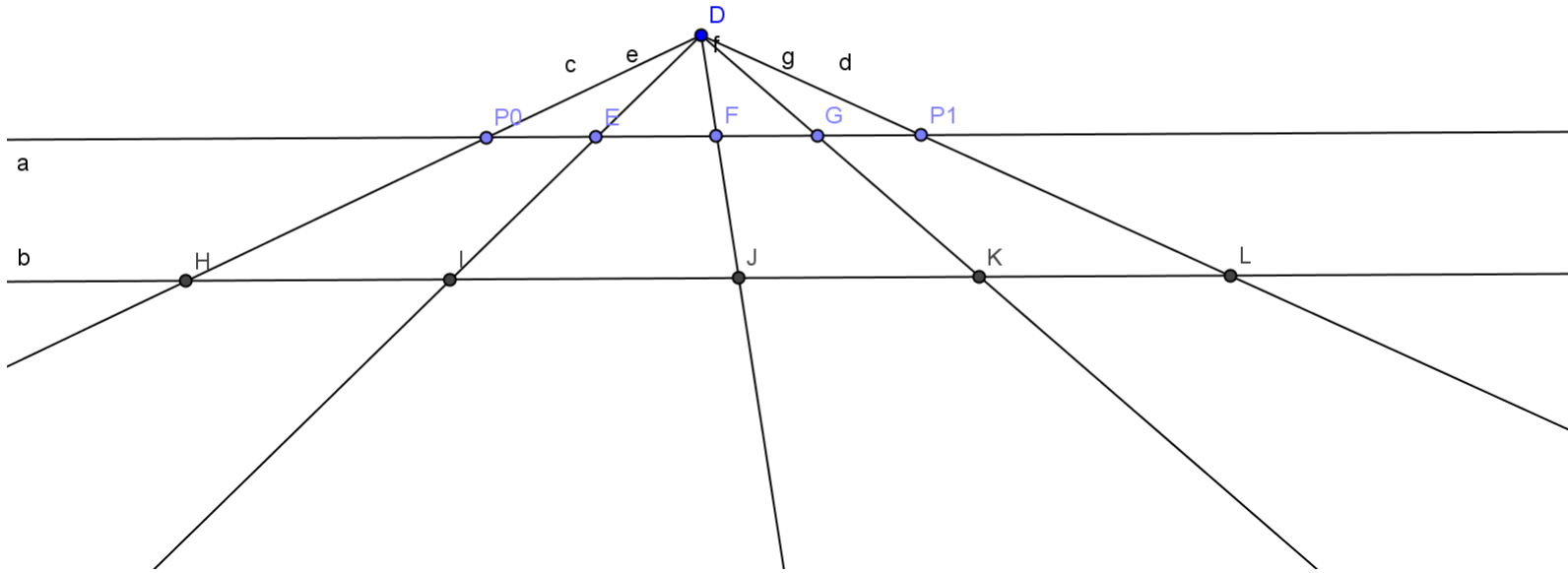
O pior é que qualquer segmento da reta real tem a mesma cardinalidade da reta real inteira...



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



A Hipótese do Contínuo de Cantor, que ainda não foi provada e talvez não possa ser provada, tem como implicação que a reta real é contínua. Não faltam pontos.

Ou seja, os números reais preenchem todo o espaço!

Vamos ver como isso faz sentido.

Tomemos um número real, não racional, bem conhecido. Por exemplo, o número π já foi expresso em até 10 trilhões de dígitos.

3.141592653589793238462643
3832795028841971693993751
0582097494459230781640628
6208998628034825342117067
9821480865132823066470938
4460955058223172535940812
8481117450284102701938521
1055596446229489549303819
6442881097566593344612847

E como isso vale para qualquer número real...

3.415 9265 35 9779323 4626433 32795 024 41971693 99375105 209744445 92307 164062 620 994 62 034 25342 110677 24 0 65132 23066470 93 4460955 05 2231725 35940 12 4 4 11745 02 410270 193 5 210 555 9644622 94 95 493 03 196442 10 975 665 9334402 475 64 233 7 67 3165 2712 01909145 64 65 6692 346034 8045 432664 213 39360 7260249142 73 7245 7006606385 174 5 20920962 2925 409175 364367 925 9 0360013305 305 4 204665 23 44665 1945 160943305 72 70365 75 95 9195 3092 6173 193261179305 18 5 4 074462 379962 7495 6735 75 2724 912 793 3 0119492 9 3367336244065 66430 60213 94946395 22473 719 0702179 60943 702 7705 392171762 9317675 23 4674 467669405 1320005 6 12 145 2635 60 277 771342 75 77 960917363 717 7246 44090122495 3430465 495 5 37105 07922796 925 9235 4201995 8122 9021960 64 03444 15 9 1362 97747713099605 7072134999999 372 97 04995105 9731732 160963 5 95 02445 945 5 3469 0 3028425 2230 25 33446 5 0352693 18 17101000313 7 3 75 2 8 65 7 75 3320 3 4 1208 1171766914730 35 9 25 349042 75 5 46 7315 95 62 63 2 235 3 7 75 93 75 195 77 6 5 77 05 32171226 066300192 7 7661195 90921642019 93 0 95 25 7201065 4 5 632 7 65 9365 33 2 779 23030195 2035 30 25 296 995 7736225 99413 91 249721775 2 347191315 74 5 724245 415 0695 95 0 295 316 872 7 5 5 90 75 09 3 175 463 746493931925 5 06040092 770167113900 9 4 2402 5 386035 63 707660104710 1942 95 5 989 946767 3 744444 25 5 37 977472 471040475 346462 0466 42 9069492 9333671702 9 8 9 210475 2162 05 676602405 03 8 1935 125 33 2430035 5 764024749473263 91492 72604269922 7967 235 47 18360093417264219245 635 0302 6 6 297455 706749 3 5 054445 5 692695 69092 72107975 0930295 5 32165 3449 7202 75 9602364 0665 49919 3479775 35 66369 074265 425 27 625 5 4175 74672 90977772 793 000 647106001645 24 19217321724477235 0414497935 6 5 4 183615 735 25 5 2133475 74 4 4946 43 5 23323 907394433345 47762416 62 5 9 35 694 5 62099219222 42 725 5 025 425 6 76717904946065 3466 049 62 7232 7917 60 5 7 43 3 279679766 145 410095 3 37 636095 06 0084225 125 205 17392 9 4 960 412 4 626945 604241965 2 5 022210661 63067442 7 622039144945 04712 3 713 7 696095 63643 719172 7467716465 75 7962413 90 65 3264 5 995 1339047 02 75 90099465 7640 7 95 126946 3 9 265 95 10 9 25 226205 224 5 940 772671947 26 4 2604769901028401363 9443 745 5 305 06 20349625 245 174939965 14342 9 0919065 925 0932 126964685 15 709 6 3 7405 97 8 5 95 9979795 49 93016715 392 46 13 26 6 3 6 942 7745 5 99 5 245 95 395 9430499725 246 0 45 9 727364695 4 8 65 3 367362226260992460 05 1243 8 43904125 441365 49762 7 0797715 6914 35 9977002 9660 494684 6 5 5 4 0635 54220 72225 8 2 4 8 64 8 5 602 8 5 06016 42 73945 226746767 6 9 5 25 213 5 225 4495 466672 7 2 3 9 65 65 96835 4 6 62 305 7745 649 035 5 936335 6 174324125 15 076059 47945 10965 96094025 22 8 79719 9345 669136 6722 74 9405 60105 0330 8 8792 6 0920 74760917 2493 5 900974909675 9 5 26365 5 497 932 97 8 216 299 9 4 7226 8 04 5 75 64042 704775 5 5 132 3 7964 45 15 237462 334645 42 5 444795 265 6 7 205 14135 4735 7395 231342 716802135 9695 362 3442 95 24 493 7 71045 765 4035 90279934403 74200 73105 7 5 3906219 3 7447 0 47 4 96 332445 713 6 7519435 0643 02 8 45 39104 4 1005 3 71064 0674492 7 8 1919793995 2084196634 75 4440643 745 12 3 7 1921799 39105 9195 6 4675 426923 974 94090 7 64942 3968 67945 20 095 465 0225 23603 8 193042 09376213 7 8 5 95 663 9 3 77 7 10 30309 0697920 77346722 25 625 99685 042 5 0306 03 8 4477345 49202605 44665 925 20497442 5 0732 5 6660021324340 8 1907104 633173464965 145 3905 79626 5 8005 5 0 10665 7969 6 1635 747363 40 5 25 745 9102 9708440 109712062 043 903975 95 15 6775 771002033 7 6 6993600 72305 5 76317635 942 73125 471205 3292 19 26 8 62 5 67325 7919 44 4 5 21644706095 75 270695 72209175 67167229109 4 1690915 2 0 735 06712 74 5 3 222 7 35 20935 3965 725 120 35 7915 369 2 094442100675 1033467103 142 671136990 6 5 5 163 9 35 01970165 176 5 1743 765 76 35 5 65 0 49099 9 5 99 2 3 7345 5 2 33635 5 076479 8 5 35 932 26 5 4 9632132 9330 9 5 7084204675 25 9070915 4 4165 49 5 94663 7 02709 19443099244 8 9 5 7 5 712 2 905 92323326097299712 0 44335 73265 4 93 23911325 97463667305 6 3604142 13 8 303203 24903 75 8 9 5 243 7447102 9132 765 6 0 93 773444030707467212019130203303 8 019762101004492 9325 160 42444 5 963 7669 3 8 95 2 6 47 3 3 35 5 265 2 134495 76 5 726243 344 930396 6426243410 77322697 8 02 0 73 8 9 5 4410446 2325 271621015 265 27211660396665 730925 47105 8 7 8 5 3763466 2065 3109 965 269 6 205 64769325 705 635 6620 5 5 10072936065 9 764 61791045 334 5 03461365 716 675 32494466 0396265 797 771 5 5 5 60 45 5 2965 42665 405 3064334443 8 5 678975 45 68406 0070023 7 7765 9134401174947405 622305 3 8 9945 83407112 00044 5 47332699390 145 4664645 0 07972 70 266 3064332 8 5 7 8 5 69 305 23 5 8 933065 75 7406795 45 7163 775 25 42021495 5 785 4 0005 0102 2 5 941302164 715 5 097925 930990 7765 473 7625 5 1765 675 135 75 7 1 2966845 4779719 05 129968 0 304639947132962107306343 75 8 2 8 169 095 2 0 797130 32 71 71460 3990665 5 4 8 7639792 93344195 215 413 4 944 5 4447345 673 3 362499349138 4 0 9727777103 8 63 7734317720 75 45 65 45 322 07770921201905 1660962 049092636601975 9 8 2 8 161332 3666365 2 699266 6336062 735 676303 5 4477762 035 045 0777723 5 47105 8 5 95 4 702779 0 1435 624045 171 06246436267945 82 75 3 1340 7 33033625 42 32 7 3944975 3 243 720 5 3 3147719926063 13346776 79695 97030 9 333930 77109 7040 5 9133 7464442 227726346 94704745 7 4 71 7 72092 7 715 2 07316790 770 715 7213444730605 7007334924369313 8 35 0493632 40425 121925 6 779 0694135 2 01347013047 6 1643 7 8 5 1 8 5 2902 8 5 45 21065 3 9341965 6213494345 95 625 8 65 5 705 5 26904665 209 8 5 033 8 5 07224264 293972 8 5 47 8 36305 77775 606 8 7644624 246 5 79260395 35 27734 0304 029005 760 75 25 10474910916439 6362676044725 627402420 320 5 66190625 45 43372135 35 95 4 5 06 772460291016 766795 210663425 225 77195 4290799930645 5 377994130 7340432 175 262 8 9 963 9 5 79475 729174642635 745 25 40 1091045 135 714 36744091939325 1910 76020 2 202 8 79 5 3 8 7705 4 429725 91677 1344699909126191713 72 7 4 7 16 4726 60 49003377024242 965 13005 005 16 32336435 03 8 5 95 7102 9 9392 302991367935 62 70 943 7993621682 95 18 06965 11 7 440 7 4 5 1960212 2 8 5 993 7162 3130171444 4640903 8 906495 4440089 69075 4 5 1602632 75 05 29 349 740 7 8 66 0 8 8 33 5 1022 3345 0 8 5 04 60 25 039302133219715 5 430635 45 5 00766 2 2 94930413 7765 5 2739375 17 548395 3 8 4 6 339363 30474619665 3 5 8 15 3 8 4205 6 5 33 8 62 8 672 233402 8 30 7 12 32 2 7 8 72 2 5 077126 946322 95 63 9 9 935 216 745 6270102 35 64622013496715 7 1909730 3 19 00497340723761036 8 5 40 66431939 07979106996395 2745 3005 045 0 06 8 5 0195 67302292 913939 8 5 6 03449039 2 005 95 5 10022635 35 361940994745 5 3 8 5 93 8 10234395 5 4495 977 3 7779023 7421672 711723643435 34947 8 22 8 1 5 2 8 62 40 5 1400666043325 8 5 6 9 6705 435 470695 74745 5 5 033232 3342107305 45 9405 165 5 37906 662 7333 7995 5 15 62 7 4322 9 2 273 72319 9 7 5 7 145 95 7 7 16335 33005 940 7306 12602 764962 674460477464 95 9995 05 497737425 6269104903 77 19 6 8 35 93 8 465 74126 04925 64 8 79 5 8 45 5 845 372347 8 6733039046 8 3 8 34383465 537949 6492 7105 63 8 7233174 723320 37602 302991367935 62 70 943 8 7993621682 95 18 3371 42 4 8 92 30722102690 4715 466 4765 35 7864773 794675 20049075 715 5 2 7 8 1965 36213239264086013635 15 5 9074220210203 8 7277605 277219005 5 8 4 425 5 5 8 7925 303435 139 4425 3223415 76233608425 063904975

<http://eaulas.usp.br/portal/video.action;jsessionid=007D7EC8FCB57CA0DF564894EA51335C?idPlaylist=5216>