Os números irracionais

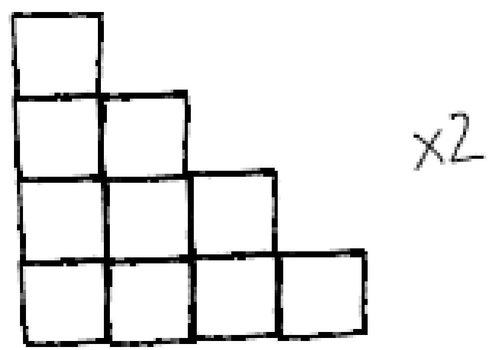
Parte 1

Uma hipótese de como os pitagóricos teriam chegado ao teorema famoso seria por meio do interesse que eles demonstravam pelos chamados números figurados, que são números expressos como conjuntos de pontos ou quadradinhos formando certas configurações geométricas, como triângulos e quadrados.

O número triangular t_n é definido como $t_n = 1 + 2 + ... + n$. Prove que

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

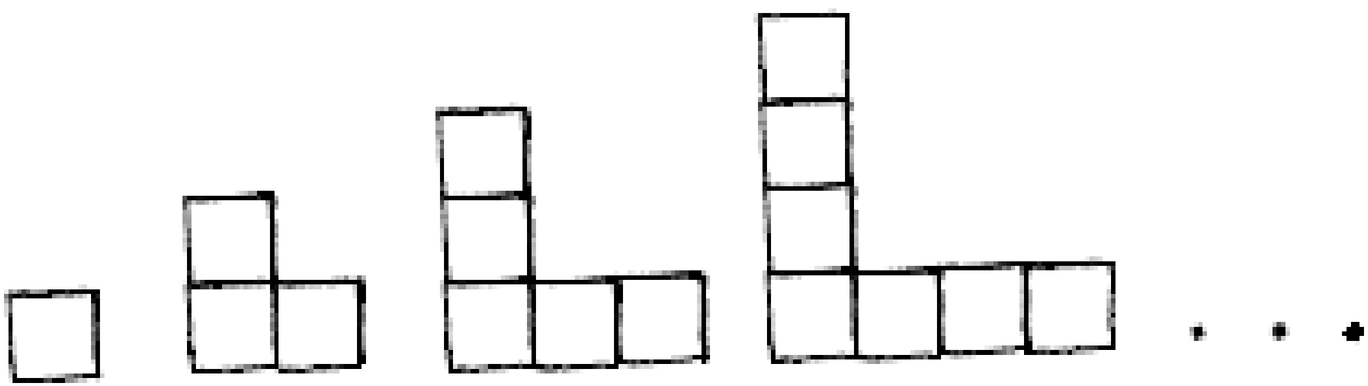
dadas as peças abaixo descritas.



Prove que a soma dos n primeiros números ímpares

$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$,

utilizando peças do seguinte tipo:

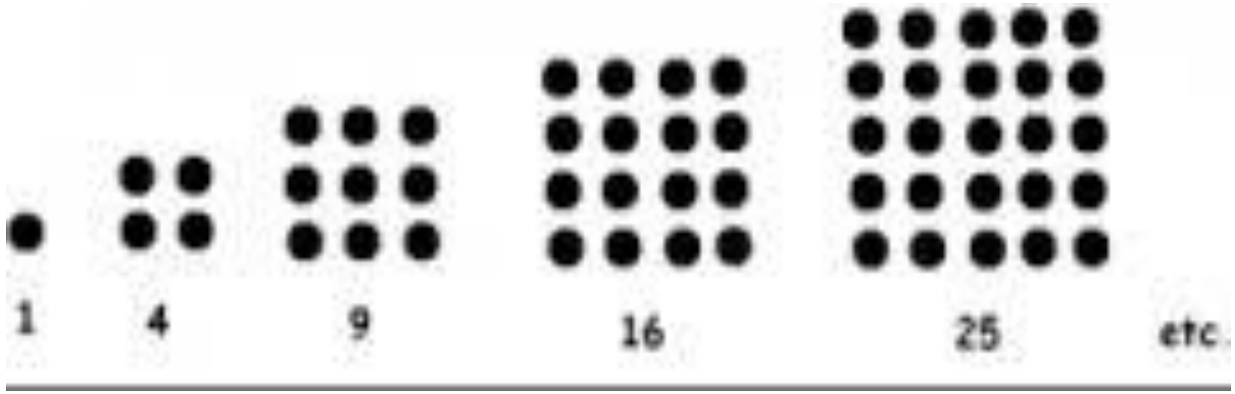


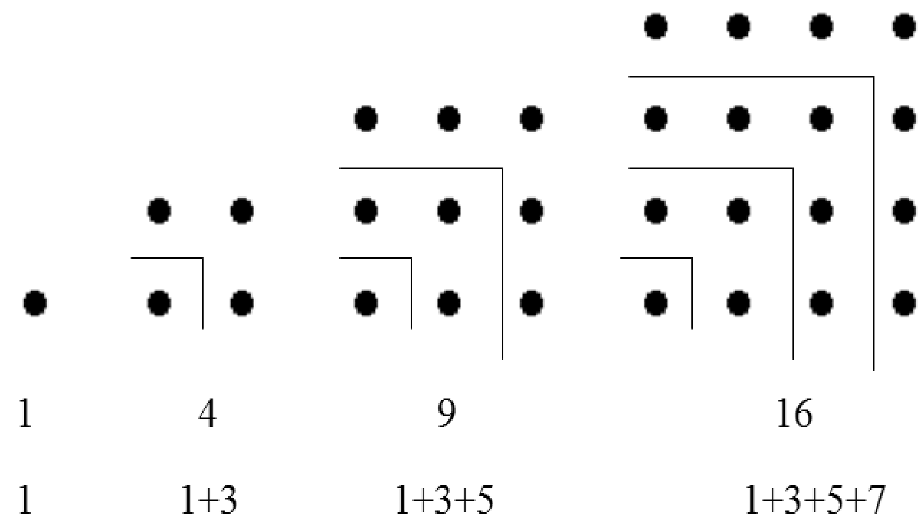
Atribui-se aos pitagóricos um interesse muito grande pelos números e suas propriedades, no estudo que ficou conhecido como aritmética, da palavra grega *arithmós*, que quer dizer número.

Os pitagóricos acreditavam que os números explicariam a natureza de todas as coisas. Eles então estudaram os chamados números figurados, que são números que, se dispostos em forma de pontos, formam figuras conhecidas, como quadrados e triângulos.

Você já conhece os números quadrados perfeitos, que são resultado de algum número inteiro elevado ao quadrado.

Os pitagóricos teriam sido os primeiros a perceber que esses números quadrados podem ser obtidos como soma de números ímpares. Veja no diagrama abaixo:


1
4
9
16
25
etc.


1
4
9
16
1
1+3
1+3+5
1+3+5+7

O que essa sequência mostra é que, somando um número ímpar na forma $2n + 1$ a um quadrado na forma n^2, obtemos $(n+1)^2$. Mostre isso com geometria e álgebra.

Pode ter ocorrido a Pitágoras ou a um dos seus seguidores a seguinte ideia. Se somando um número ímpar a um quadrado obtemos outro quadrado, toda vez que esse número ímpar for também um quadrado, temos o que se chama de terna pitagórica, ou seja, três números tais que a soma dos quadrados dos dois menores é igual ao quadrado do maior.

Faça a substituição $2n + 1 = m^2$ em $n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$, e obtenha uma fórmula geratriz de ternas pitagóricas.

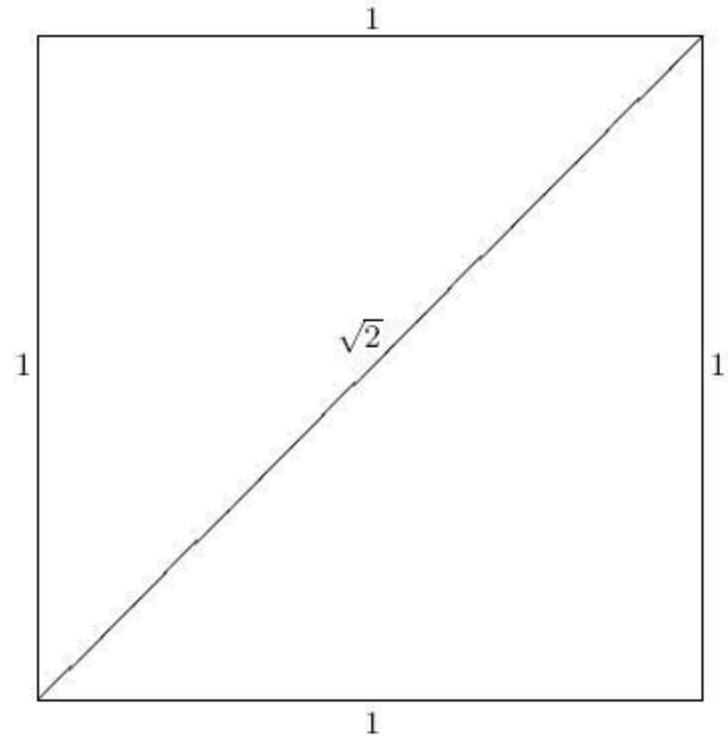
A solução $\frac{m^2-1}{2}, m, \frac{m^2+1}{2}$ é atribuída a Pitágoras. Ela não gera todas as ternas pitagóricas primitivas, mas várias delas.

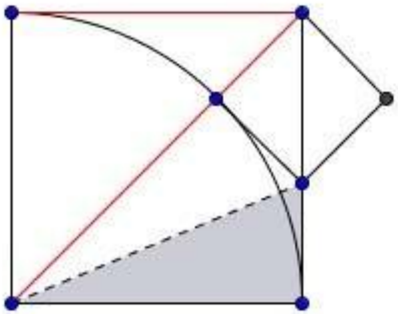
A confiança dos pitagóricos em seus resultados numéricos os teriam levado a propor que todas as coisas se explicam pelo número inteiro e suas relações.

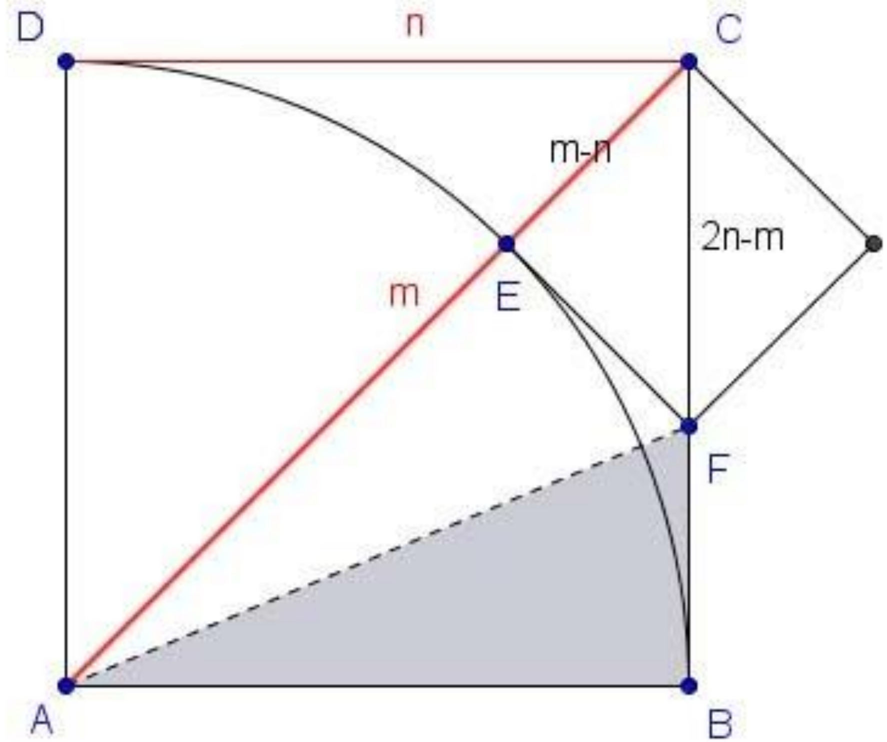
Há uma lenda que diz que teria sido Hipaso de Metaponto (nascido por volta do ano 500 aC)
que teria chamado a atenção dos pitagóricos para o fato de que raiz de 2 é um número de natureza diferente.
E teria inaugurado um tipo raciocínio que fez nascer a forma matemática de dominar o infinito: a antifairese.

O método da *antifairese*

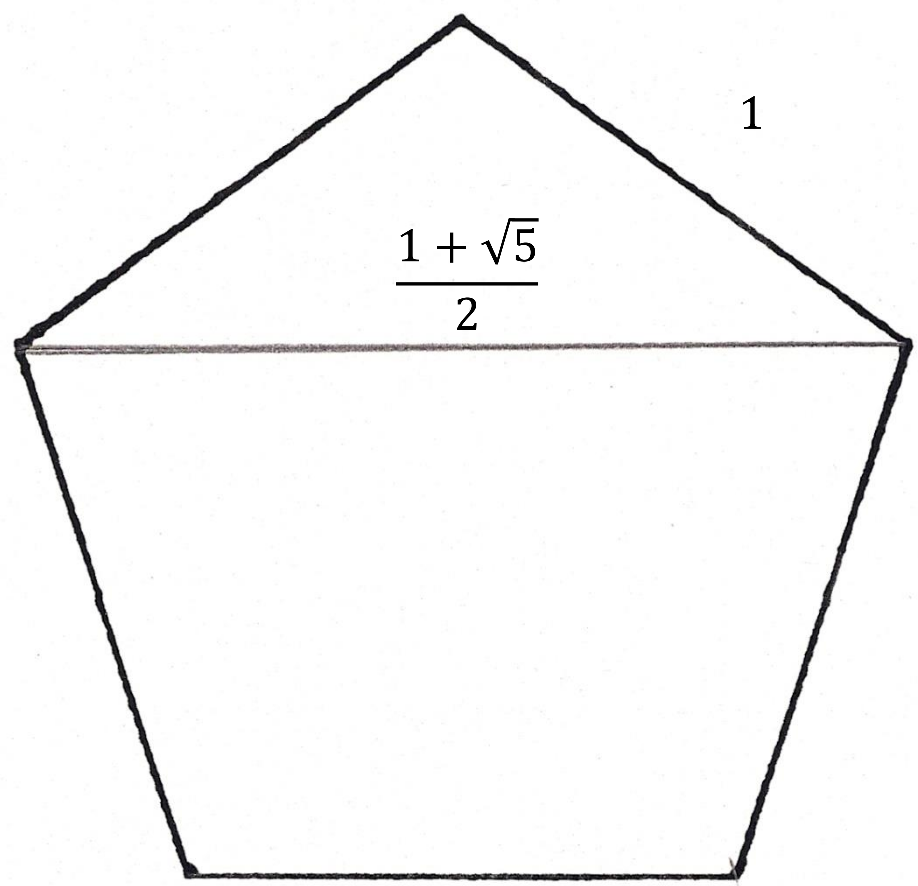
A palavra *antifairese* vem do grego e significa, literalmente, “subtração recíproca” (ROQUE, 2012)

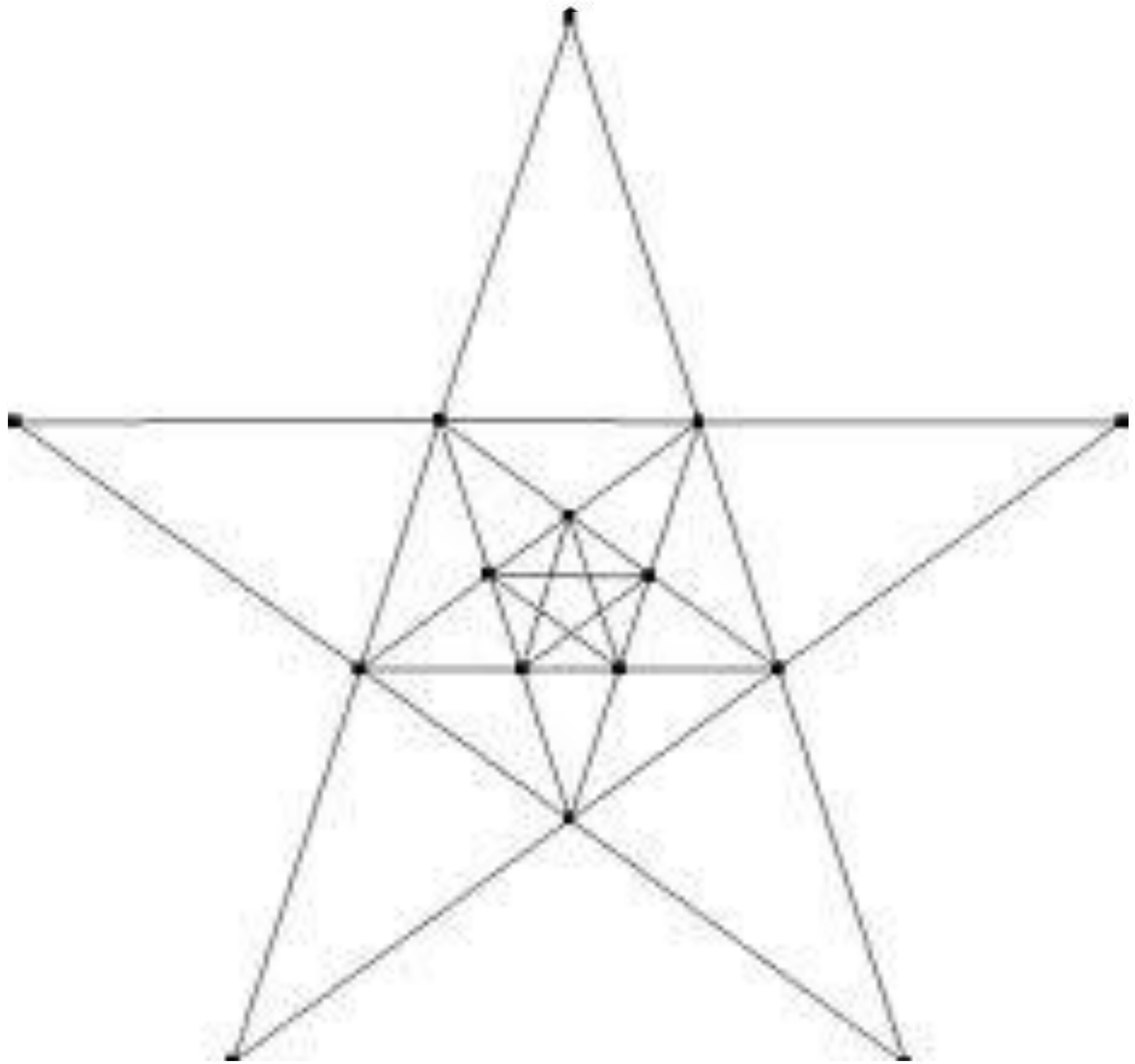

1
1
√2
1
1

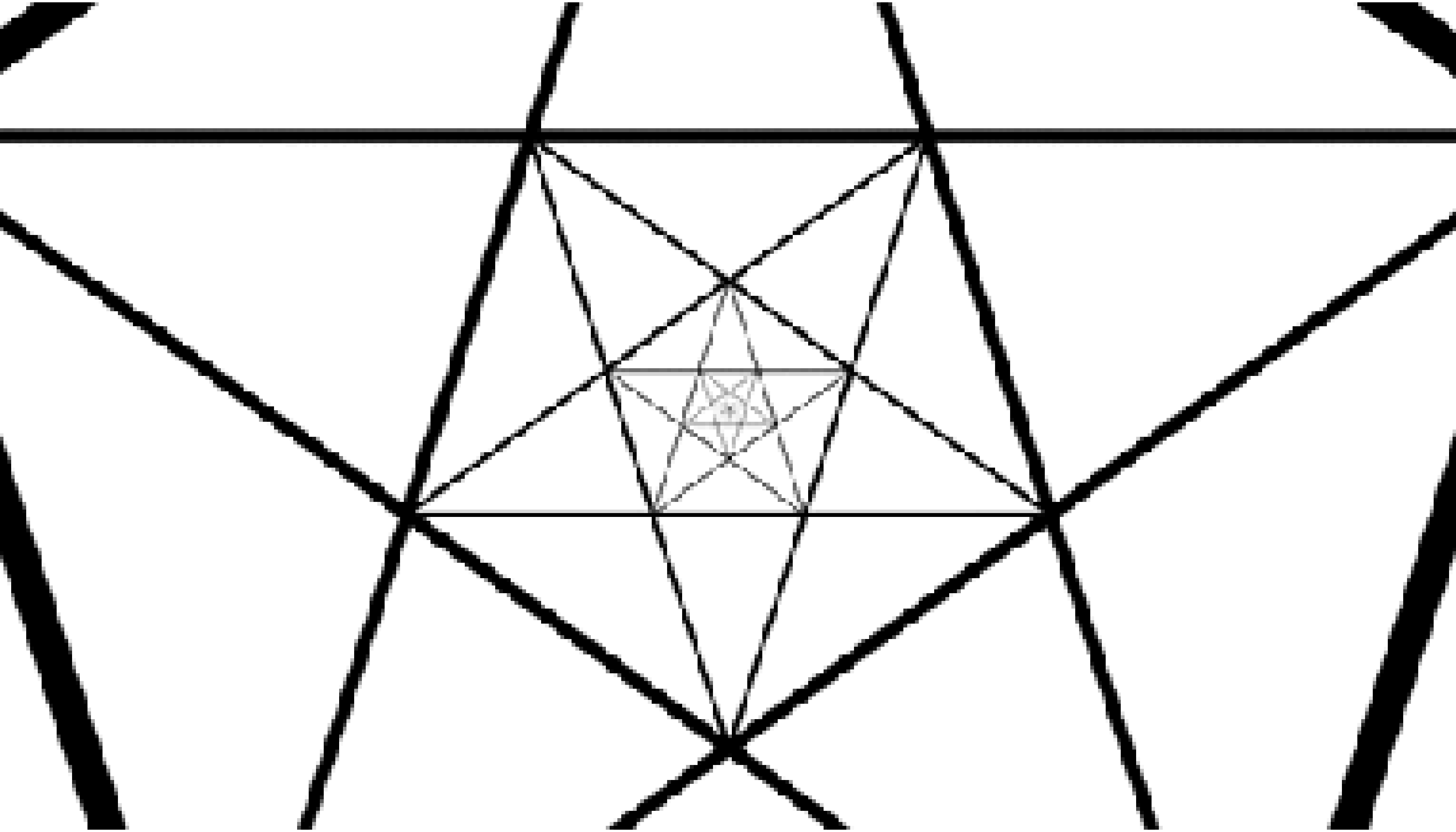




D
n
C
m-n
2n-m
m
E
F
A
B


1
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$





“Não posso falar da nossa história de amor, então vou falar de matemática. Não sou formada em matemática, mas sei de uma coisa: existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. Tem o 0,1 e o 0,12 e o 0,112 e uma infinidade de outros. Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2, ou entre o 0 e o 1 milhão. Alguns infinitos são maiores que outros.

Um escritor de quem costumávamos gostar nos ensinou isso. Há dias, muitos deles, em que fico zangada com o tamanho do meu conjunto ilimitado. Queria mais números do que provavelmente vou ter, e, por Deus, queria mais números para o Augustus Waters do que os que ele teve. Mas, Gus, meu amor, você não imagina o tamanho da minha gratidão pelo nosso pequeno infinito.

Eu não o trocaria por nada nesse mundo. Você me deu uma eternidade dentro dos nossos dias numerados, e sou muito grata por isso”.

GREEN, J. A Culpa é das Estrelas. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2012.