1

Funções e Modelos

1.3

Novas Funções a Partir de Conhecidas

Transformações de Funções

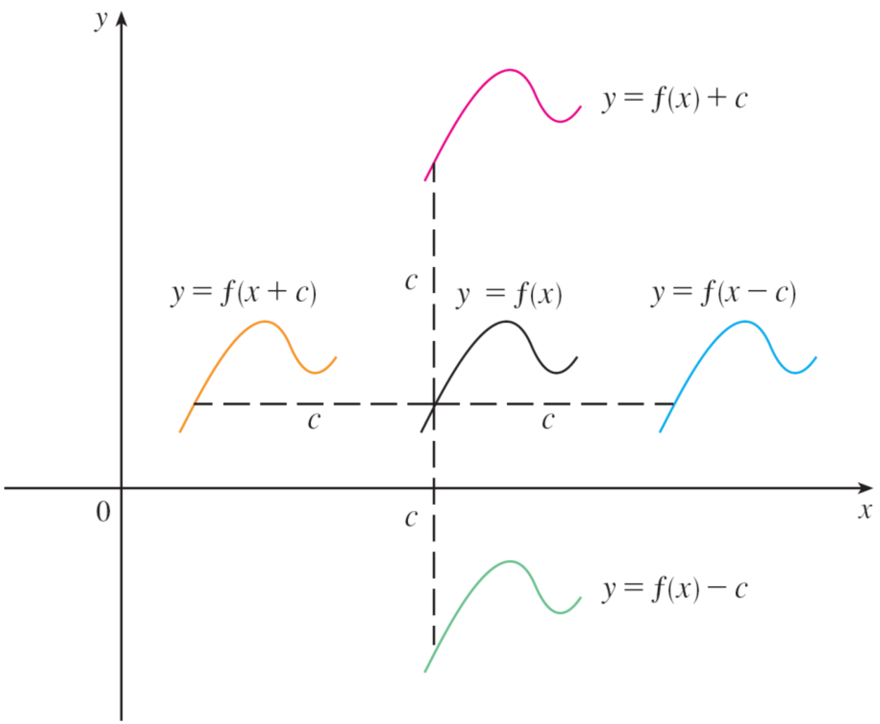
Transformações de Funções

Aplicando certas transformações aos gráficos de uma função obtemos o gráfico de certas funções relacionadas. Isso nos capacita a fazer o esboço de muitas funções à mão e dedos nos permite também escrever equações para gráficos dados. Vamos considerar inicialmente as **translações**. Se c for um número positivo, então o gráfico de $y = f(x) + c$ é não-somente o gráfico de $y = f(x)$ deslocado para cima em c unidades (uma vez que cada coordenada y fica acrescida pelo mesmo número c).

Transformações de Funções

Da mesma forma, se fizermos $g(x) = f(x - c)$, onde $c > 0$, então o valor de g em x é igual ao valor de f em $x - c$ (c unidades à esquerda de x).

Portanto, o gráfico de $y = f(x - c)$, é precisamente o de $y = f(x)$ deslocado c unidades à direita (veja a Figura 1).



Tradução do gráfico de f

Figura 1

Transformações de Funções

Deslocamentos Verticais e Horizontais Suponha $c > 0$. Para obter o gráfico de

$y = f(x) + c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima

$y = f(x) - c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo

$y = f(x - c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a direita

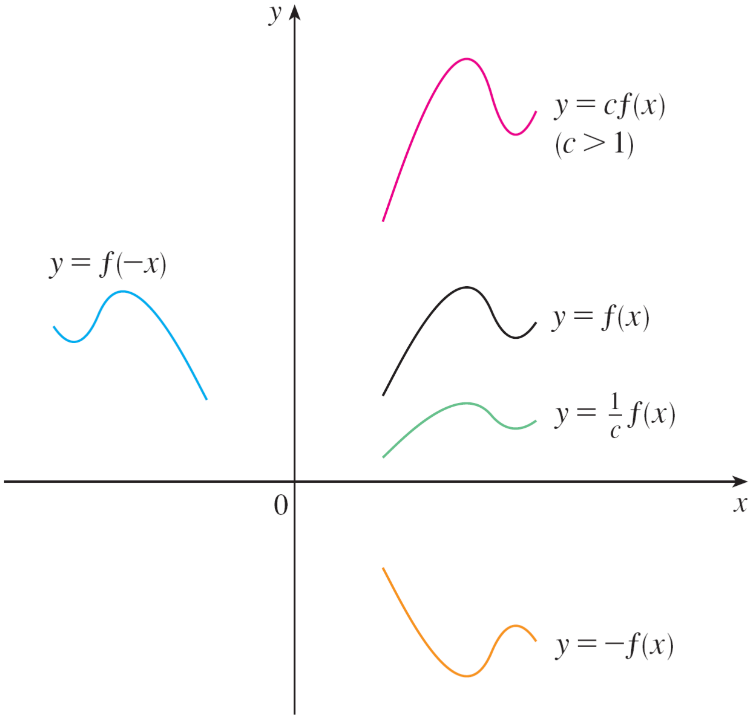
$y = f(x + c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a esquerda

Vamos considerar agora as transformações de **expansão** e **reflexão**. Se $c > 1$, então o gráfico de $y = cf(x)$ é o gráfico de $y = f(x)$ expandido por um fator de c na direção vertical (pois cada coordenada y é multiplicada pelo mesmo número c).

Transformações de Funções

O gráfico de $y = -f(x)$ é o gráfico de $y = f(x)$ refletido em torno do eixo x, pois o ponto (x, y) é substituído pelo ponto $(x, -y)$.

(Veja a Figura 2 e a tabela a seguir, onde estão os resultados de várias transformações de expansão, compressão e reflexão.)



Expansões e reflexões do gráfico *f*

Figura 2

Transformações de Funções

Reflexões e Expansões Horizontais e Verticais Suponha $c > 1$. Para obter o gráfico de

$y = cf(x)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c

$y = (1/c)f(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c

$y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c

$y = f(x/c)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c

$y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x

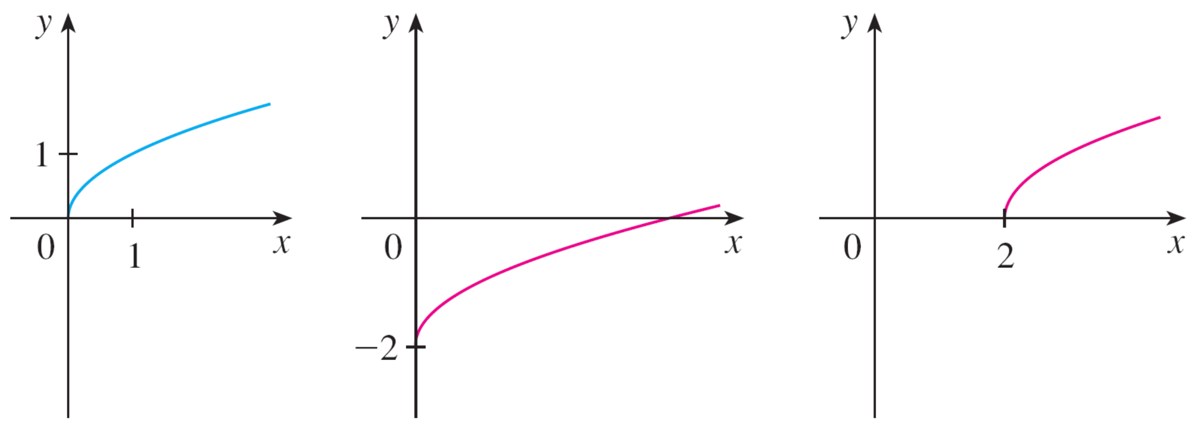
$y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y

Exemplo 1

Dado o gráfico de $y = \sqrt{x}$, use transformações para obter os gráficos de $y = \sqrt{x} - 2, y = \sqrt{x - 2}, y = -\sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{-x}$.

Solução:

O gráfico da função raiz quadrada, está mostrado na Figura 4(a).

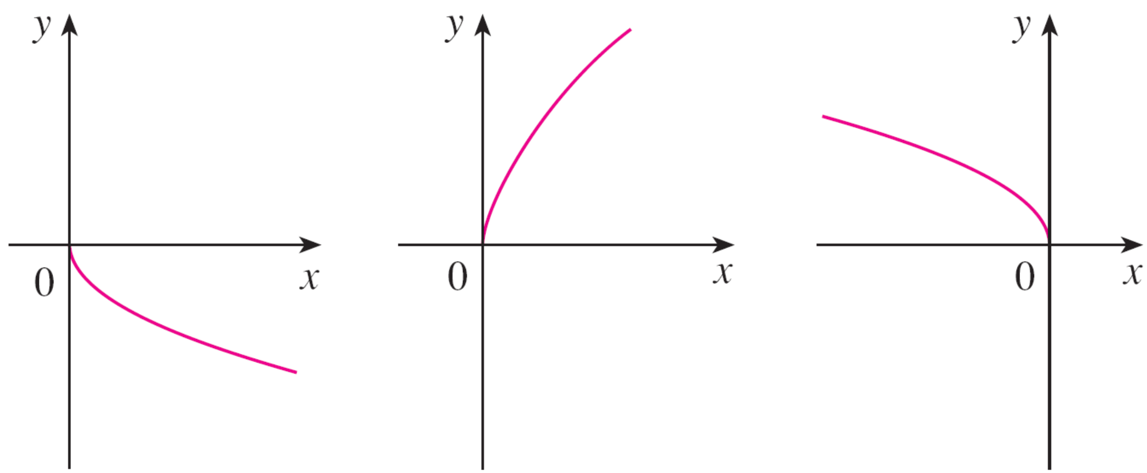


(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x - 2}$

Figura 4

Exemplo 1 – *Solução*

continuação



(d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$

Figura 4

Nas outras partes da figura esboçamos $y = \sqrt{x} - 2$ deslocando 2 unidades para baixo, $y = \sqrt{x - 2}$ deslocando 2 unidades para direita; $y = -\sqrt{x}$ refletindo em torno do eixo *x*, $y = 2\sqrt{x}$ expandido verticalmente por um fator de 2; e $y = \sqrt{-x}$ refletindo em torno do eixo *y*.

Transformações de Funções

A Figura 3 ilustra essas transformações de expansão quando aplicadas a uma função de cosseno com $c = 2$.

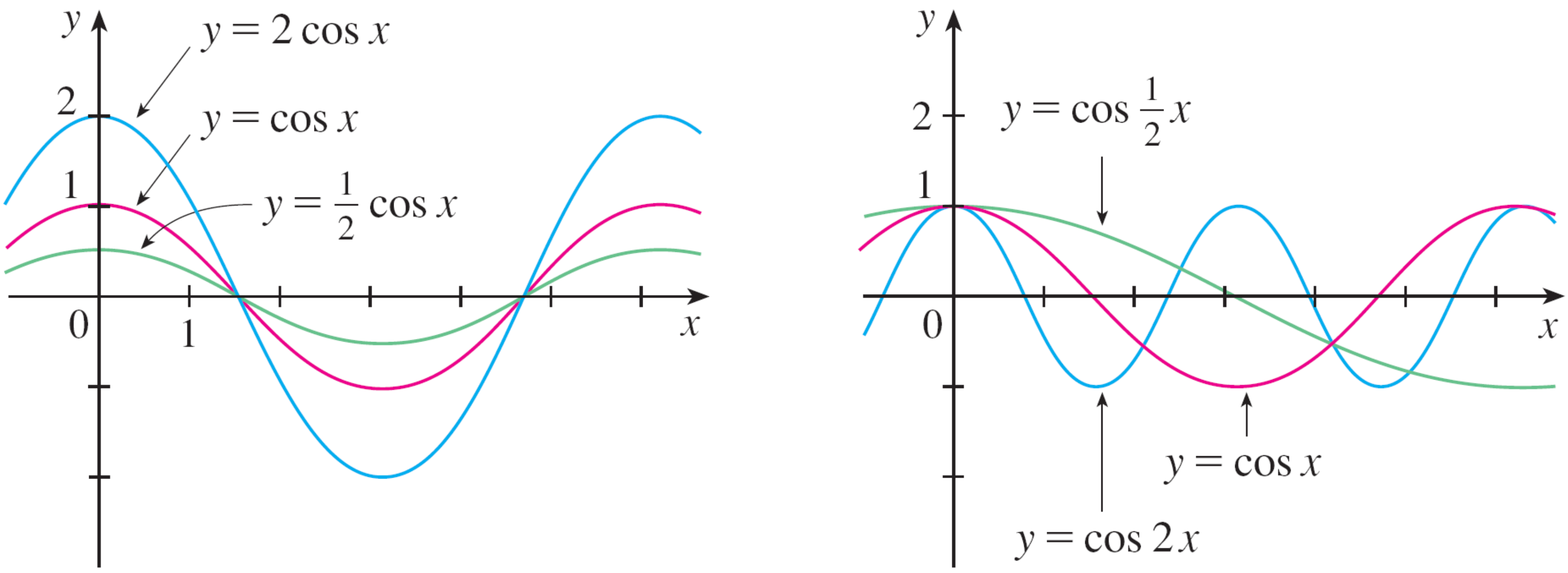


Figura 3

Transformações de Funções

Por exemplo, para obter o gráfico $y = 2 \cos x$, multiplicamos as coordenadas x-y de cada ponto do gráfico de $y = \cos x$ por 2. Isso significa que o gráfico de $y = \cos x$ fica expandido verticalmente por um fator de 2.

Transformações de Funções

Outra transformação de algum interesse é tomar o *valor absoluto* de uma função. Se $y = |f(x)|$, então, de acordo com a definição do valor absoluto, $y = f(x)$ quando $f(x) \geq 0$ e $y = -f(x)$ quando $f(x) < 0$. Isso nos diz como obter o gráfico de $y = |f(x)|$ a partir do gráfico de $y = f(x)$: a parte do gráfico que está acima do eixo x permanece a mesma, enquanto a parte que está abaixo do eixo x é refletida em torno do eixo x.

Combinações de Funções

Combinações de Funções

Duas funções f e g podem ser combinadas para formar novas funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g de forma similar àquela pela qual somamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos números reais. As funções soma e diferença são assim definidas

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Se o domínio de f é A e o domínio de g é B, então, o domínio de $f + g$ é a intersecção $A \cap B$, pois tanto $f(x)$ quanto $g(x)$ devem ser definidos.

Por exemplo, o domínio de $f(x) = \sqrt{x}$ é $A = [0, \infty)$ e o domínio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ é $B = (-\infty, 2]$, de modo que domínio de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ é $A \cap B = [0, 2]$.

Combinações de Funções

Analogamente, as funções produto e quociente são definidas por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad\qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

O domínio de fg is $A \cap B$, mas não podemos dividir por zero e, assim, o domínio de f/g é $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Por exemplo, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 1$, então o domínio da função racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ é $\{x \mid x \neq 1\}$, ou $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Combinações de Funções

Existe outra maneira de combinar duas funções para obter uma nova função. Por exemplo, suponha que $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y é uma função de u e u é, por sua vez, é uma função de x, segue que, afinal de contas, y é uma função de x. Computamos isso pela substituição:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Este procedimento é chamado *composição* pois a nova função é *composta* das funções dadas f e g.

Combinações de Funções

Em geral, dadas quaisquer duas funções *f* e *g*, começamos com um número *x* no domínio de *g* e encontramos sua imagem *g*(*x*). Se este número *g*(*x*) estiver no domínio de *f*, podemos calcular o valor de *f*(*g*(*x*)).

O resultado é uma nova função *h*(*x*) = *f*(*g*(*x*)) obtida pela substituição *g* por *f*. É chamada de *composição* (ou *composta*) de *f* e *g e* é denotada por $f \circ g$ ("*f* círculo *g*").

Definição Dadas duas funções f e g, a **função composta** $f \circ g$ (também chamada de **composição** de f e g) é definida por

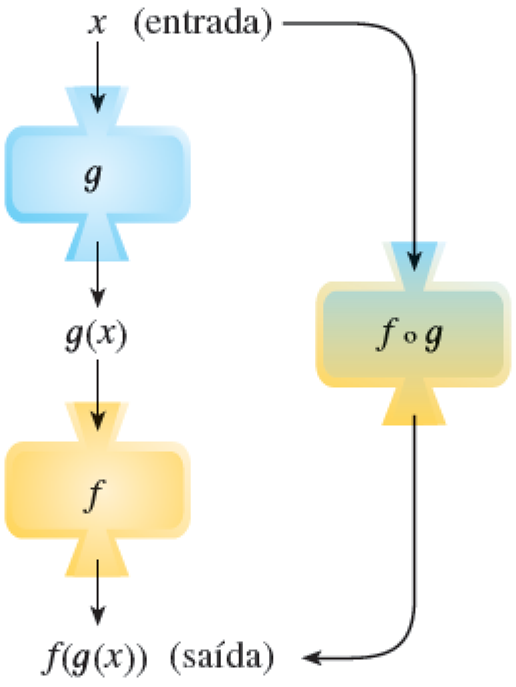
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Combinações de Funções

O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os x no domínio de g tais que $g(x)$ está no domínio de f.

Em outras palavras, $(f \circ g)(x)$ é definida sempre que tanto $g(x)$ quanto $f(g(x))$ estiverem definidas.

A Figura 11 mostra como visualizar $f \circ g$ em termos de máquinas.



A máquina $f \circ g$ é composta pela máquina g (primeiro) e a seguir pela máquina f.

Figura 11

Exemplo 6

Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$, encontre as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

Solução:

Temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

Combinações de Funções

Lembre-se de que a notação $f \circ g$ significa que a função g aplicada primeiro, e depois f é aplicada. No Exemplo 6, $f \circ g$ é a função que *primeiro* subtrai 3 e *então* eleva ao quadrado; $g \circ f$ é a função que *primeiro* eleva ao quadrado e *então* subtrai 3.

É possível fazer a composição de três ou mais funções. Por exemplo, a função composta $f \circ g \circ h$ pode ser encontrada calculando-se primeiro h, então g e depois f, como a seguir:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$