1 Funções e Modelos

1.1

Quatro Maneiras de Representar uma Função

Quatro Maneiras de Representar uma Função

As funções surgem quando uma quantidade depende de outra. Consideremos as seguintes situações:

A. A área *A* do círculo depende do raio *r* do círculo. A regra que conecta *r* e *A* é dada pela equação $A = \pi R^2$. A cada número *r* positivo está associado um único valor de *A* e dizemos que *A* é uma *função* de *r*.

Quatro Maneiras de Representar uma Função

B. A população humana do mundo *P* depende do tempo *t*. A tabela mostra as estimativas da população mundial *P* (*t*) no momento *t* em certos anos. Por exemplo,

$P(1950) \approx 2{,}560{,}000{,}000$

Porém, para cada valor do momento *t* há um valor correspondente de *P*, e dizemos que *P* é uma função de *t*.

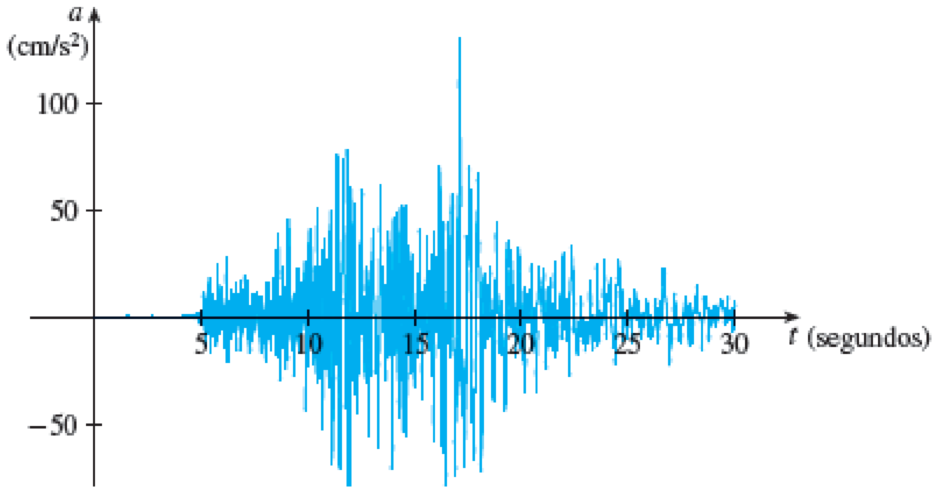
Ano	População (milhões)
1900	1.650
1910	1.750
1920	1.860
1930	2.070
1940	2.300
1950	2.560
1960	3.040
1970	3.710
1980	4.450
1990	5.280
2000	6.080
2010	6.870

Quatro Maneiras de Representar uma Função

C. O custo *C* de enviar um envelope grande depende do peso *w* do envelope. Embora não haja uma fórmula simples relacionando *w* e *C*, o correio tem uma fórmula que permite calcular *C* quando *w* é dado.

D. A aceleração vertical *a* do solo medida por um sismógrafo durante um terremoto é uma função do tempo decorrido *t*. A Figura 1 demonstra um gráfico gerado por atividade sísmica durante o terremoto de Northridge t que chocou Los Angeles em 1994. Para um dado valor de *t*, o gráfico fornece um valor correspondente de *a*.

Quatro Maneiras de Representar uma Função



Aceleração vertical do solo durante o
terremoto de Northridge

Figura 1

Quatro Maneiras de Representar uma Função

Uma **função** f é uma lei que associa, a cada elemento x em um conjunto D, exatamente um elemento, chamado $f(x)$, em um conjunto E.

Em geral consideramos as funções para as quais *D* e *E* são conjuntos de números reais. O conjunto *D* é chamado de **domínio** da função. O número *f* (x) é o **valor de *f* em *x*** e é lido “ *f* de *x*.” A **imagem** de *f* é o conjunto de todos os valores possíveis de *f* (*x*) conforme *x* varia por todo o domínio. O símbolo que representa um número arbitrário no *domínio* de uma função *f* é denominado uma **variável independente**.

Quatro Maneiras de Representar uma Função

Um símbolo que representa um número na *imagem* de *f* é denominado uma **variável dependente**. No Exemplo A, a variável *r* é independente, enquanto *A* é dependente.

É útil considerar uma função como uma **máquina** (veja a Figura 2).

Diagrama de máquina para uma função *f*

Figura 2

Quatro Maneiras de Representar uma Função

Se *x* estiver no domínio da função *f*, quando *x* entrar na máquina, ele será aceito como entrada, e a máquina produzirá uma saída *f* (*x*) de acordo com a lei que define a função.

Assim, podemos pensar o domínio como o conjunto de todas as entradas, enquanto a imagem é o conjunto de todas as saídas possíveis.

Quatro Maneiras de Representar uma Função

Outra forma de ver a função é como um **diagrama de flechas**, como na Figura 3.

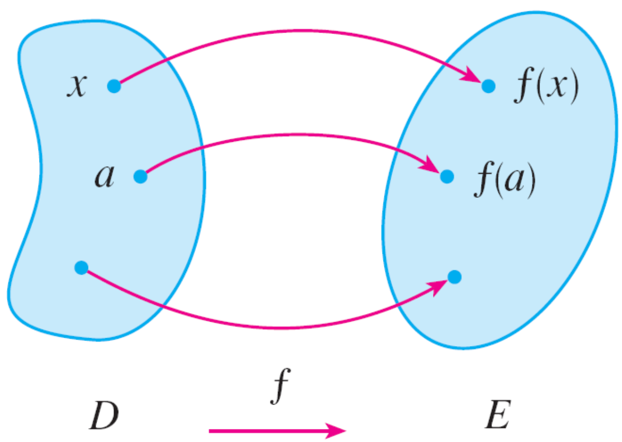


Diagrama de flechas para *f*

Figura 3

Cada flecha conecta um elemento de *D* com um elemento de *E*. A seta indica que $f(x)$ está associado a x, $f(a)$ está associado a a e, assim por diante.

Quatro Maneiras de Representar uma Função

O método mais comum de visualizar uma função consiste em fazer seu gráfico. Se f for uma função com Domínio D, então seu **gráfico** será o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Note que esses são os pares entrada-saída). Em outras palavras, o gráfico de f consiste de todos os pontos (x, y) no plano de coordenadas tal que $y = f(x)$ e x está no domínio de f.

O gráfico de uma função f nos proporciona uma figura útil do comportamento ou "histórico" da função.

Quatro Maneiras de Representar uma Função

Uma vez que a coordenada y de qualquer ponto (x, y) sobre o gráfico é $y = f(x)$, podemos ler o valor de $f(x)$ como a altura do ponto no gráfico acima de x (veja a Figura 4).

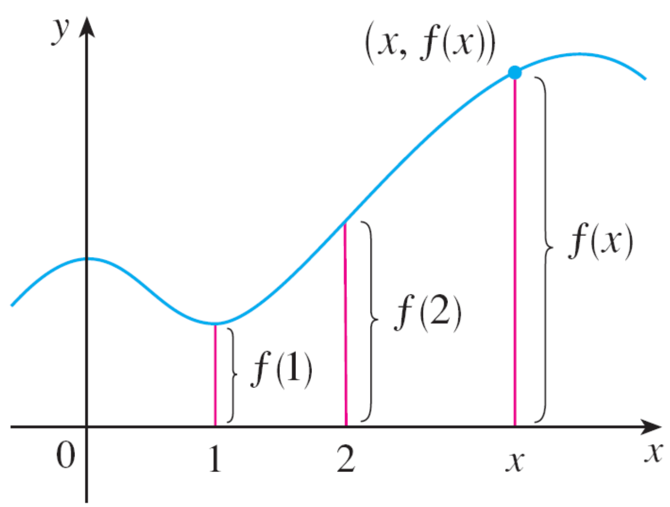


Figura 4

Quatro Maneiras de Representar uma Função

O gráfico de *f* também nos permite visualizar o domínio de *f* sobre o eixo *x* e a imagem sobre o eixo *y*, como na Figura 5.

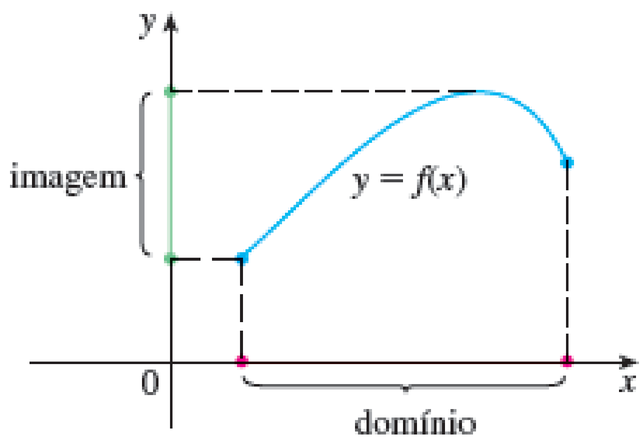


Figura 5

Exemplo 1

O gráfico de uma função *f* está mostrado na Figura 6.
(a) Encontre os valores de *f*(1) e *f*(5).

(b) Quais são o domínio e a imagem de *f*?

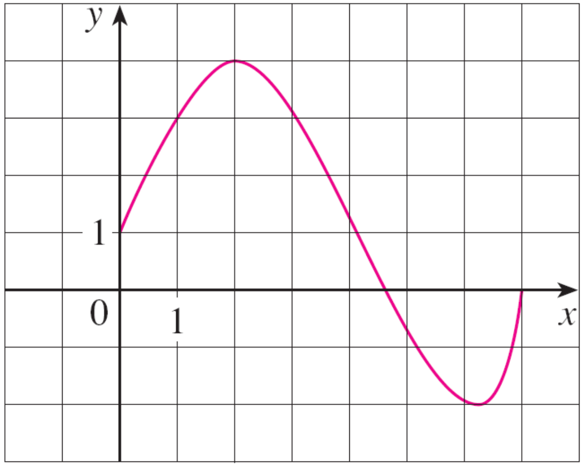


Figura 6
A notação para intervalos é dada no Apêndice A.

Exemplo 1 – *Solução*

(a) Vemos na Figura 6 que o ponto (1, 3) encontra-se no gráfico de f, então, o valor de f em 1 é $f(1) = 3$. (Em outras palavras, o ponto no gráfico que se encontra acima de $x = 1$ está 3 unidades acima do eixo x.)

Quando $x = 5$, o ponto no gráfico que corresponde a esse valor está 0,7 unidade abaixo do eixo x e estimamos que $f(5) \approx -0{,}7$.

(b) Vemos que $f(x)$ está definida quando $0 \leq x \leq 7$, logo, o domínio de f é o intervalo fechado $[0,7]$. Observe que os valores de f variam de -2 até 4; assim, a imagem de f é

$$\{y \mid -2 \leq y \leq 4\} = [-2,4]$$

Representações de Funções

Representações de Funções

É possível representar uma função de quatro maneiras:

- verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- numericamente (por meio de uma tabela de valores)
- visualmente (através de um gráfico)
- algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita)

Exemplo 4

Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura *T* da água depende do tempo no qual a água está correndo. Esboce um gráfico de *T* como uma função do tempo *t* decorrido desde a abertura da torneira.

Solução:

A temperatura inicial da água corrente está próxima da temperatura ambiente, pois ela estava em repouso nos canos.

Quando a água do tanque de água quente começa a escoar da torneira, *T* aumenta rapidamente. Na próxima fase, *T* fica constante, na temperatura da água aquecida no tanque.

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Quando o tanque fica vazio, *T* decresce para a temperatura da fonte de água.

T *como uma função de t na Figura* 11.

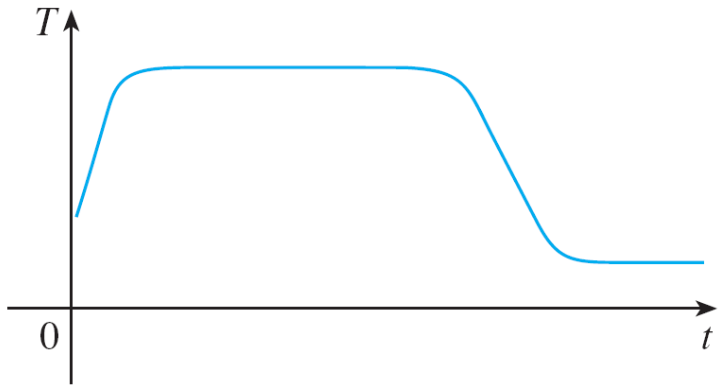


Figura 11

Exemplo 6 - *Encontre o domínio de cada função*

O gráfico de uma função é uma curva no plano *xy*. Mas surge a questão: quais curvas no plano *xy* são gráficos de funções? Essa pergunta será respondida por meio do teste a seguir.

> **Teste da Reta Vertical** Uma curva no plano xy é o gráfico de uma função de x se e somente se nenhuma reta vertical cortar a curva mais de uma vez.

A razão para a verdade do Teste da Reta Vertical pode ser vista na Figura 13.

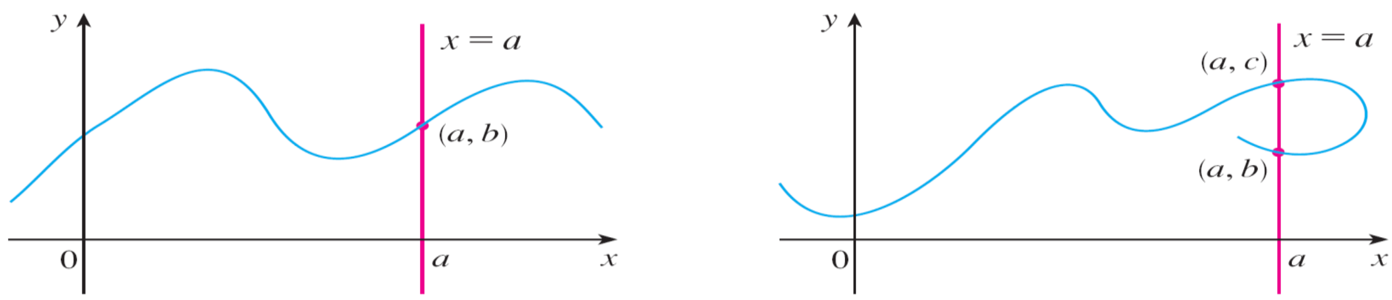


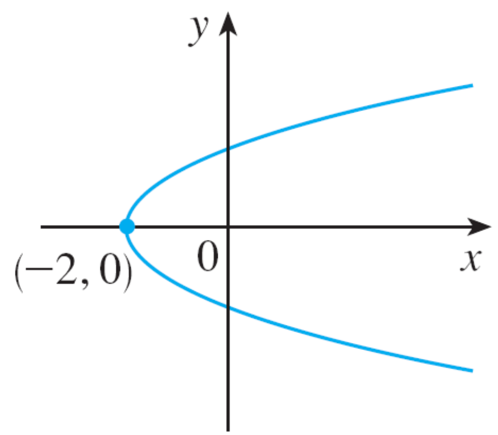
Figura 13

Representações de Funções

Se cada linha vertical $x = a$ cruzar uma curva somente uma vez, em (a, b), então exatamente um valor funcional é definido por $f(a) = b$. Mas se a reta $x = a$ interceptar a curva em dois pontos, em (a,b) e (a, c), nesse caso, a curva não pode representar uma função, pois uma função não pode associar dois valores diferentes a a.

Representações de Funções

Por exemplo, a parábola $x = y^2 - 2$ na Figura 14(a) não é o gráfico de uma função de x, pois, como podemos ver, existem retas verticais que interceptam a parábola duas vezes. A parábola, no entanto, contém os gráficos de *duas* funções de x.

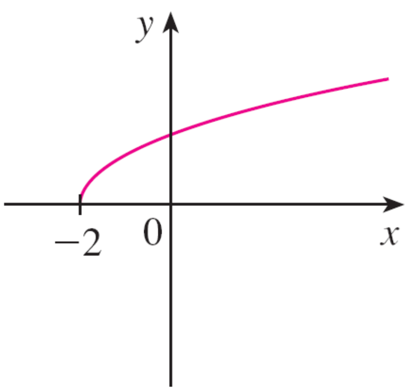


$x = y^2 - 2$

Figura 14(a)

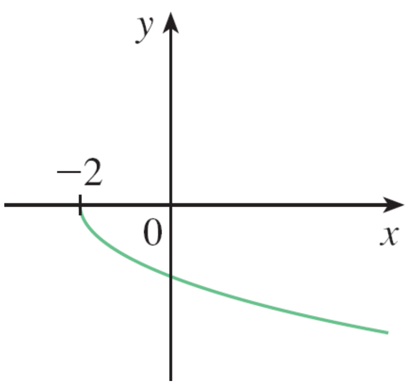
Representações de Funções

Note que a equação $x = y^2 - 2$ implica $y^2 = x + 2$, de modo $y = \pm\sqrt{x+2}$. Assim, a metade superior e a inferior da parábola são os gráficos de $f(x) = \sqrt{x+2}$ [do Exemplo 6 (a)] e $g(x) = -\sqrt{x+2}$ [Veja as Figuras 14(b) e (c).]



$y = \sqrt{x+2}$

Figura 14(b)



$y = -\sqrt{x+2}$

Figura 14(c)

Representações de Funções

Observe que se invertermos os papéis de x e y, então a equação $x = h(y) = y^2 - 2$ define x como uma função de y (com y como uma variável independente e x como variável dependente), e a parábola agora é o gráfico da função h.

Funções Definidas por Partes

Exemplo 7

Uma função *f* é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Avalie $f(-2)$, $f(-1)$, e $f(0)$ e esboce o gráfico.

Solução: Lembre-se de que toda função é uma regra. Para esta função em particular a regra é a seguinte:

Primeiro, observe o valor de entrada x. Se acontecer de $x \leq -1$, então o valor de $f(x)$ é $1 - x$.

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Por outro lado, se x > –1, então o valor de $f(x)$ é x^2.

Uma vez que –2 ≤ –1, temos $f(–2) = 1 – (–2) = 3$.

Uma vez que –1 ≤ –1, temos $f(–1) = 1 – (–1) = 2$.

Uma vez que 0 > –1, temos $f(0) = 0^2 = 0$.

Como fazer o gráfico de *f* ? Observamos que $x \leq –1$, então $f(x) = 1 – x$, assim, a parte do gráfico de *f* à esquerda da reta vertical $x = –1$ deve coincidir com a reta $y = 1 – x$, essa última com inclinação –1 e intersecção com o eixo y =1.

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Se $x > -1$, então $f(x) = x^2$, e dessa forma a parte do gráfico de f à direita da reta $x = -1$ deve coincidir com o gráfico de $y = x^2$, que é uma parábola. Isso nos permite esboçar o gráfico na Figura 15.

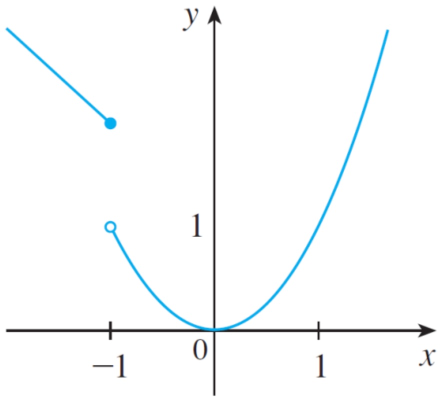


Figura 15

O círculo cheio indica que o ponto (–1, 2) está incluso no gráfico; o círculo vazio indica que o ponto (–1, 1) está excluído do gráfico.

Funções Definidas por Partes

O próximo exemplo de função definida por partes é a função valor absoluto. Lembre-se de que o **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 sobre a reta real. Como distâncias são sempre positivas ou nulas, temos

$$|a| \geq 0 \text{ para todo número } a$$

Por exemplo,

$|3| = 3$ $|-3| = 3$ $|0| = 0$ $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

$|3 - \pi| = \pi - 3$

Funções Definidas por Partes

Em geral, temos

$$\boxed{\begin{aligned} |a| &= a \qquad \text{se } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a \qquad \text{se } a < 0 \end{aligned}}$$

(Lembre-se de que se *a* for negativo, então –*a* será positivo.)

Exemplo 8

Esboce o gráfico da função valor absoluto $f(x) = |x|$.

Solução: Da discussão precedente sabemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplo 8 – *Solução*

continuação

Usando o mesmo método empregado no Exemplo 7, vemos que o gráfico de *f* coincide com a reta *y* = *x* à direita do eixo *y* e com a reta *y* = -*x* à esquerda do eixo *y* (veja a Figura 16).

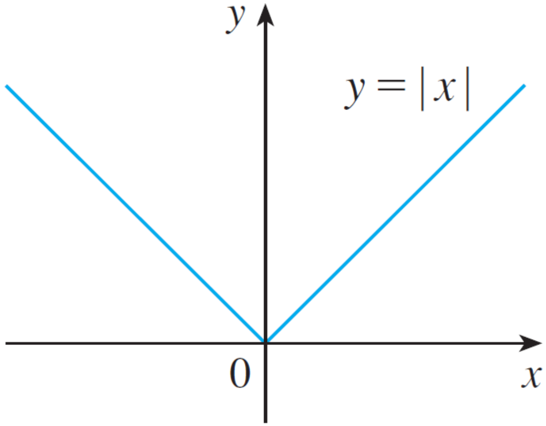


Figura 16

Exemplo 10

No Exemplo C, no início desta seção, consideramos o custo $C(w)$ do envio pelo correio de um grande envelope com o peso w.

Na realidade, esta é uma função definida por partes, pois, a partir da tabela à direita, temos

$$C(w) = \begin{cases} 2{,}90 & \text{se } 0 < w \leqslant 20 \\ 5{,}50 & \text{se } 20 < w \leqslant 30 \\ 7{,}00 & \text{se } 30 < w \leqslant 40 \\ 8{,}50 & \text{se } 40 < w \leqslant 50 \\ \vdots & \end{cases}$$

w (gramas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leqslant 20$	2,90
$20 < w \leqslant 30$	5,50
$30 < w \leqslant 40$	7,00
$40 < w \leqslant 50$	8,50
$\vdots$	$\vdots$

Exemplo 10

continuação

O gráfico é na Figura 18.

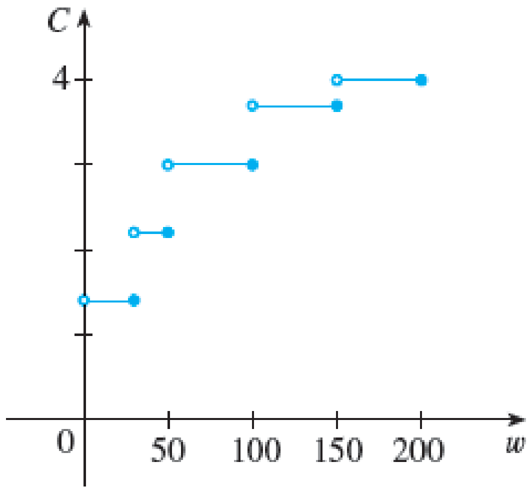


Figura 18

Você pode entender então por que funções similares a essa são chamadas **funções escada -** elas pulam de um valor para o próximo.

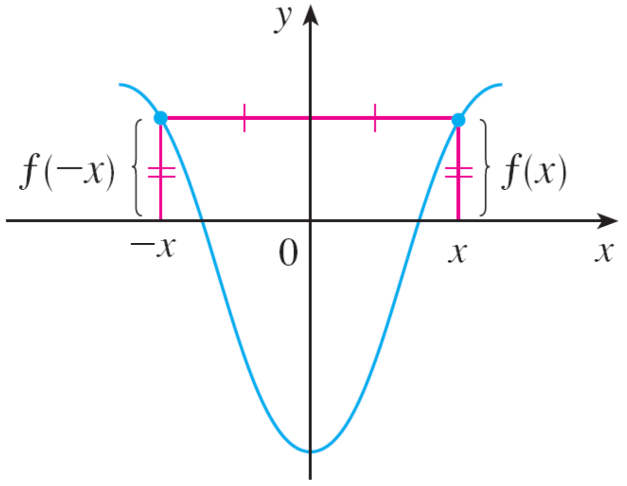
Simetria

Simetria

Se uma função f satisfaz $f(–x) = f(x)$ para todo número x em seu domínio, então f é chamada **função par**. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é par, pois

$$f(–x) = (–x)^2 = x^2 = f(x)$$

O significado geométrico de uma função ser par é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y (veja a Figura 19).



Uma função par

Figura 19

Simetria

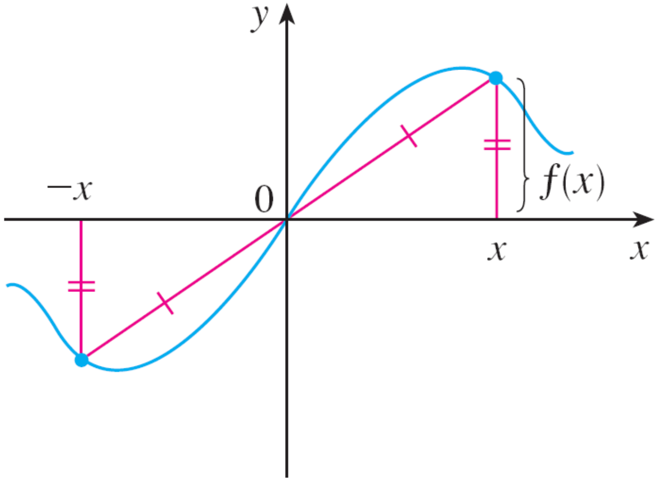
Isso significa que se fizermos o gráfico de f para $x \geq 0$, então, para obter o gráfico inteiro, basta refletir esta parte em torno do eixo y.

Se f satisfaz $f(-x) = -f(x)$ para cada número x em seu domínio, uma f é **função ímpar**. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é ímpar, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Simetria

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem (veja a Figura 20).



Uma função ímpar

Figura 20

Se já tivermos o gráfico de f para $x \geq 0$, poderemos obter o restante do gráfico girando esta parte 180° em torno da origem.

Exemplo 11

Determine se a função é par, ímpar ou nenhum dos dois.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

Solução:

(a) $f(-x) = (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x)$

$= -x^5 - x = -(x^5 + x)$

$= -f(x)$

Portanto, f é uma função ímpar.

Exemplo 11 – *Solução*

continuação

(b) $g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$

Assim, g é par.

(c) $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$

Como $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, concluímos que h não é par ou ímpar.

Simetria

Os gráficos das funções no Exemplo 11 na Figura 21. Observe que o gráfico de *h* não é simétrico em relação ao eixo *y* nem em relação à origem.

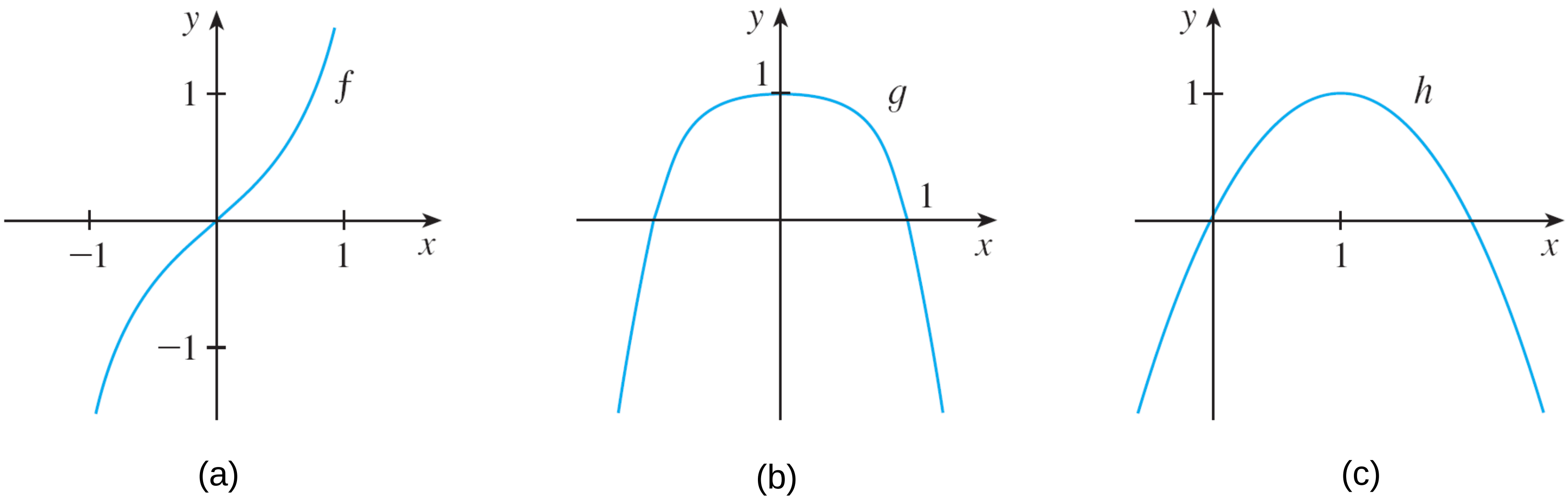


Figura 21

Funções crescentes e decrescentes

Funções crescentes e decrescentes

O gráfico da Figura 22 cresce de *A* para *B*, decresce de *B* para *C*, e cresce novamente de *C* para *D*. Dizemos que a função *f* é crescente em um intervalo [*a*, *b*], decrescente em [*b*, *c*], e crescente novamente em [*c*, *d*].

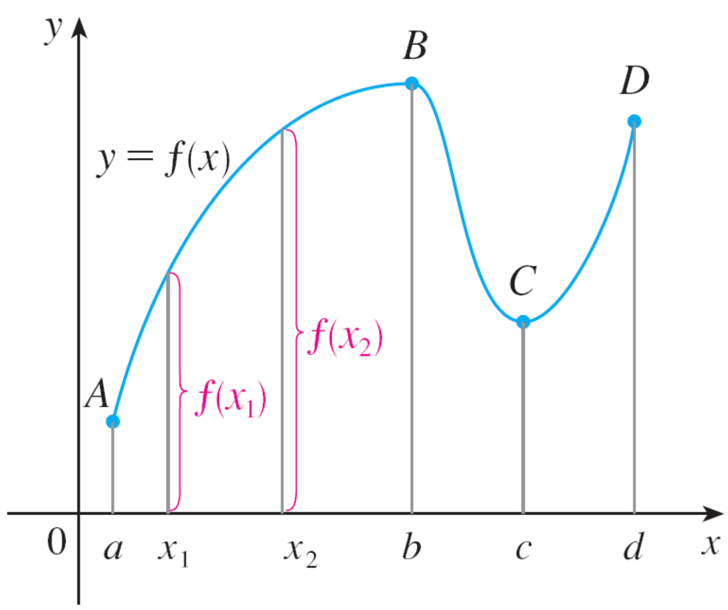


Figura 22

Funções crescentes e decrescentes

Note que se x_1 e x_2 são dois números quaisquer entre A e B com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Utilizamos isso para definir as propriedades de uma função crescente.

Uma função f é chamada **crescente** em um intervalo I se

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{quando } x_1 < x_2 \text{ em } I.$$

É denominada **decrescente** em I se

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{quando } x_1 < x_2 \text{ em } I.$$

Funções crescentes e decrescentes

Na definição de uma função crescente, é importante perceber que a desigualdade $f(x_1) < f(x_2)$ deve responder a *cada* par de números x_1 e x_2 em I com $x_1 < x_2$.

Você pode ver que na Figura 23 a função $f(x) = x^2$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, \infty)$.

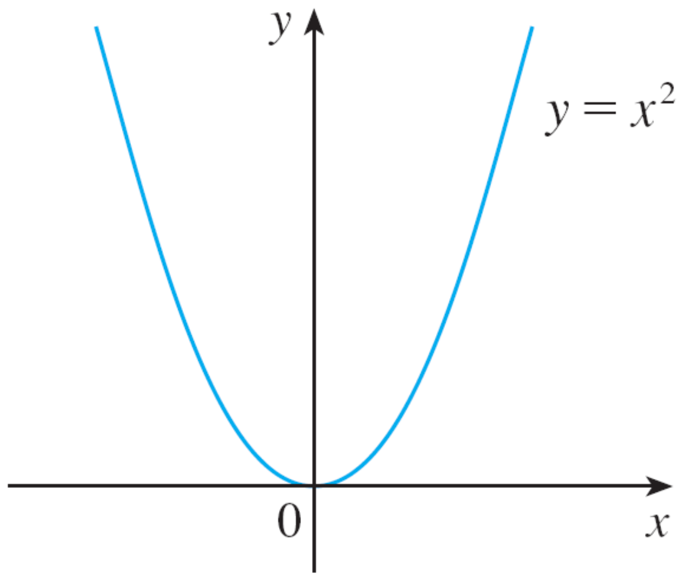


Figura 23