1 Funções e Modelos

Copyright © Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

1.5 Funções Exponenciais

Copyright © Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

Funções Exponenciais

A função $f(x) = 2^x$ é chamada *função exponencial,* pois a variável, x, é o expoente. Ela não deve ser confundida com a função potência $g(x) = x^2$, na qual a variável é a base.

Em geral, uma **função exponencial** é uma função da forma

$$f(x) = a^x$$

onde a é uma constante positiva. Vamos recordar o que isso significa. Se $x = n$, um inteiro positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

Funções Exponenciais

Se $x = 0$, então $a^0 = 1$, e se $x = -n$, onde n é um inteiro positivo, então

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

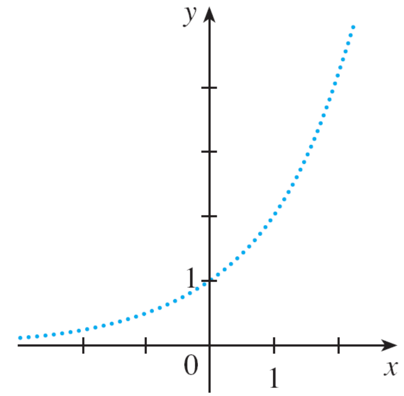
Se x for um número racional, $x = p/q$, onde p e q são inteiros e $q > 0$, então

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Mas qual o significado de a^x se x for um número irracional? Por exemplo, qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$ ou 5^{π}?

Funções Exponenciais

Para ajudá-lo a responder a essa questão, olhemos primeiro o gráfico da função $y = 2^x$, nos pontos em que x é racional. Uma representação desse gráfico encontra-se na Figura 1. Queremos aumentar o domínio de $y = 2^x$ para incluir tanto os números racionais quanto os irracionais.



Representação de $y = 2^x$, x racional

Figura 1

Existem buracos no gráfico na Figura 1, correspondendo os valores irracionais de x.

Queremos preencher os buracos com a definição de $f(x) = 2^x$, onde $x \in \mathbb{R}$ de modo f que seja uma função crescente.

Funções Exponenciais

Em particular, uma vez que o número irracional $\sqrt{3}$ satisfaz

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

devemos ter

$$2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}$$

e sabemos que $2^{1,7}$ e $2^{1,8}$ significam, pois 1,7 e 1,8 são números racionais.

Funções Exponenciais

Analogicamente, usando melhores aproximações para $\sqrt{3}$, obtemos melhores aproximações para $2^{\sqrt{3}}$.

$$
\begin{array}{lcl}
1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 & \Rightarrow & 2^{1{,}73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}74} \\
1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 & \Rightarrow & 2^{1{,}732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}733} \\
1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321 & \Rightarrow & 2^{1{,}7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}7321} \\
1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206 & \Rightarrow & 2^{1{,}73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}73206} \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

Funções Exponenciais

Pode ser mostrado que há exatamente um número maior que todos os números

$2^{1,7}, 2^{1,73}, 2^{1,732}, 2^{1,7320}, 2^{1,73205}, \ldots$

e menor que todos os números

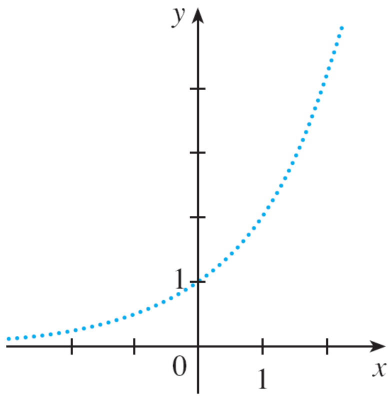
$2^{1,8}, 2^{1,74}, 2^{1,733}, 2^{1,7321}, 2^{1,73206}, \ldots$

Definimos $2^{\sqrt{3}}$ que será esse número. Usando o processo de aproximação precedente podemos calculá-lo corretamente com seis casas decimais:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997.$$

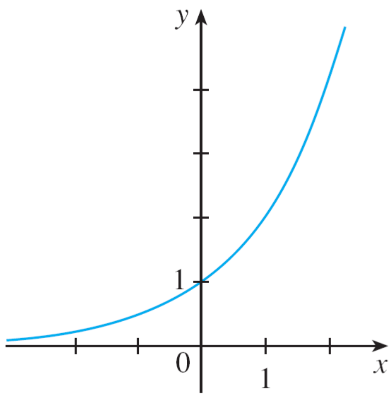
Funções Exponenciais

Analogamente, podemos definir 2^x (ou a^x, se $a > 0$), onde x é um número irracional qualquer. A Figura 2 mostra como todos os buracos da Figura 1 foram preenchidos para completar o gráfico da função $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.



Representação de $y = 2^x$, x racional

Figura 1



$y = 2^x$, x real

Figura 2

Funções Exponenciais

Os gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$ estão na Figura 3, para vários valores da base a.

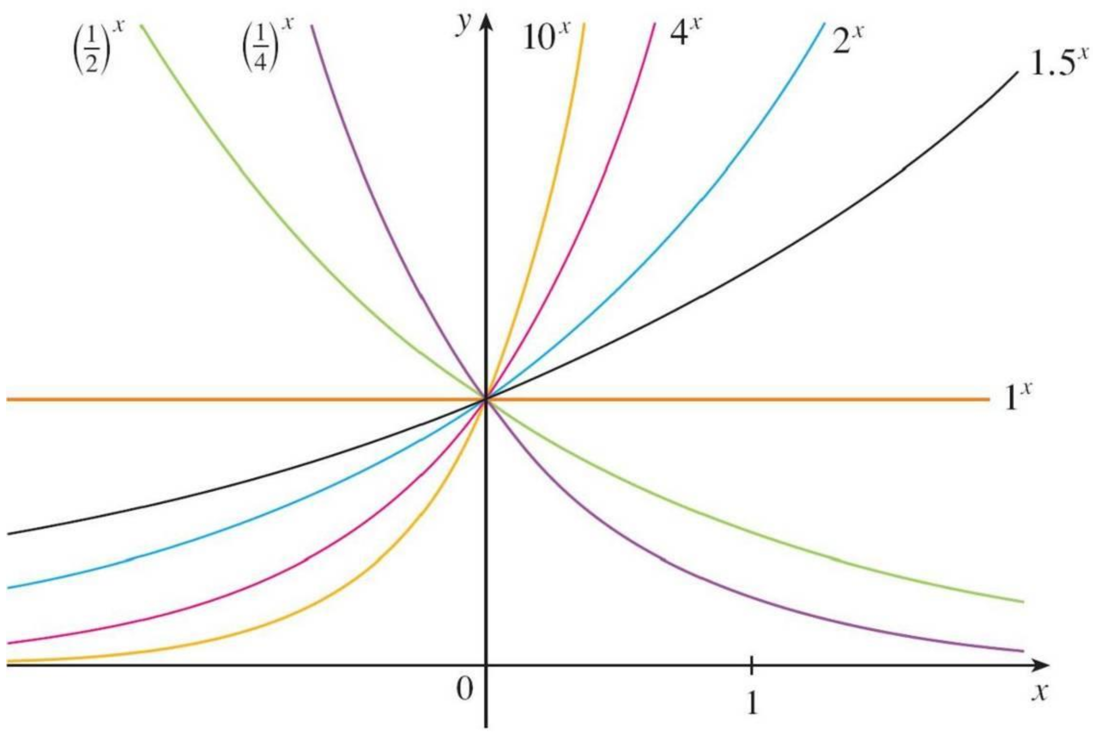


Figura 3

Funções Exponenciais

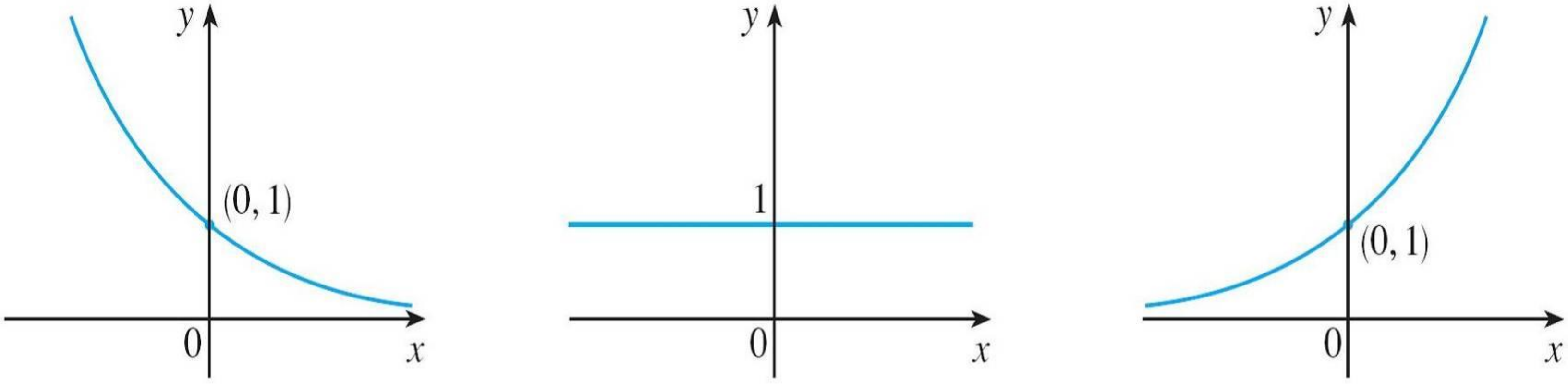
Observe que todos esses gráficos passam pelo mesmo ponto (0, 1) porque $a^0 = 1$ for $a \neq 0$. Observe que a função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica maior (para $x > 0$).

Você pode ver na Figura 3 que basicamente existem três tipos de função exponencial $y = a^x$.

Se $0 < a < 1$, a função exponencial decresce; se $a = 1$, ela é uma constante; e se $a > 1$, ela cresce.

Funções Exponenciais

Esses três casos estão ilustrados na Figura 4.



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ **(b)** $y = 1^x$ **(c)** $y = a^x$, $a > 1$

Figura 4

Funções Exponenciais

Observe que $a \neq 1$, então a função exponencial $y = a^x$ tem domínio $\mathbb{R}$ e a imagem $(0, \infty)$.

Além disso, uma vez que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, o gráfico de $y = (1/a)^x$ é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno do eixo y.

Funções Exponenciais

Uma razão para a importância da função exponencial está nas propriedades a seguir. Se *x* e *y* forem números racionais, então essas propriedades são bem conhecidas da álgebra elementar. Pode-se demonstrar que elas permanecem verdadeiras para números reais arbitrários *x* e *y*.

Propriedades dos Expoentes Se a e b forem números positivos e x e y, quaisquer números reais, então

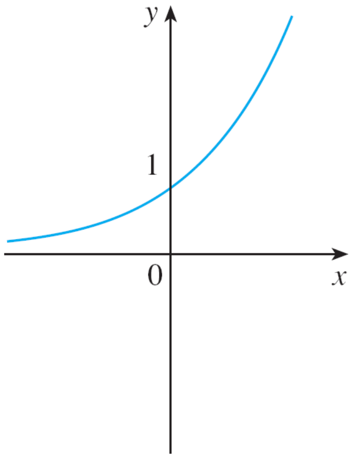
1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$

Exemplo 1

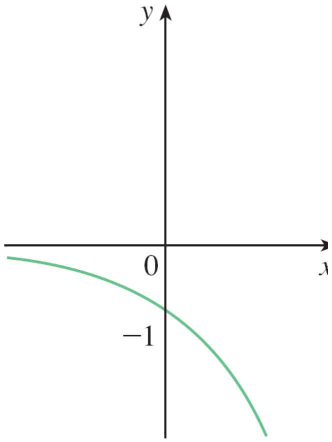
Esboce o gráfico da função $y = 3 - 2^x$ e determine seu domínio e imagem.

Solução:

Primeiro refletimos o gráfico de $y = 2^x$ [mostrado na Figura 2 e 5(a)] em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -2^x$ na Figura 5(b).



(a) $y = 2^x$



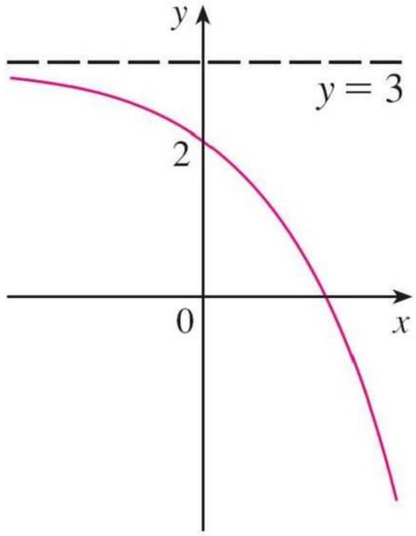
(b) $y = -2^x$

Figura 5

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

A seguir deslocamos o gráfico de $y = -2^x$ em 3 unidades para cima, para obter o gráfico de $y = 3 - 2^x$ na Figura 5(c).



(c) $y = 3 - 2^x$

Figura 5

O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $(-\infty, 3)$.

Aplicações de Funções Exponenciais

Aplicações de Funções Exponenciais

A função exponencial ocorre frequentemente em modelos matemáticos da natureza e da sociedade. Vamos indicar brevemente aqui como eles surgem na descrição do crescimento populacional e do decaimento radioativo.

Vamos considerar primeiro uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponhamos que tomando amostras da população em certos intervalos de tempo fique determinado que a população dobra a cada hora.

Aplicações de Funções Exponenciais

Se o número de bactérias no instante t é $p(t)$, onde t i é medido em horas, e a população inicial for $p(0) = 1000$, então

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

Desse padrão parece que, em geral,

$$p(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t$$

Aplicações de Funções Exponenciais

A função população é um múltiplo constante múltipla da função exponencial $y = 2^t$, logo exibe o rápido crescimento.

Sob condições ideais (espaço e alimentos ilimitados e ausência de doenças), esse crescimento exponencial é típico do que ocorre realmente na natureza.

Aplicações de Funções Exponenciais

O que pode ser dito sobre a população humana? A Tabela 1 mostra os dados da população mundial do século XX, e a Figura 8 mostra o correspondente diagrama de dispersão.

TABELA 1

t	População (milhões)
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870

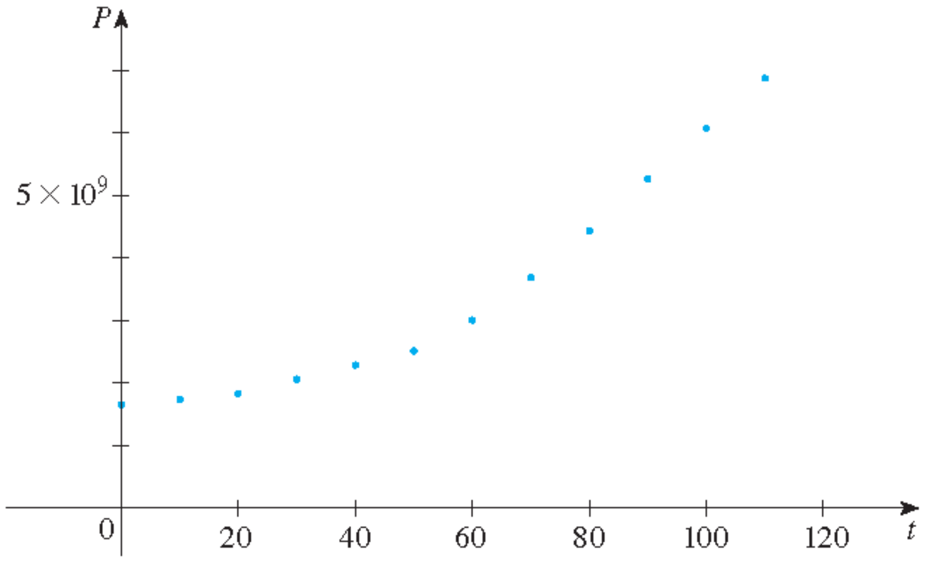


Diagrama de dispersão para o crescimento populacional mundial

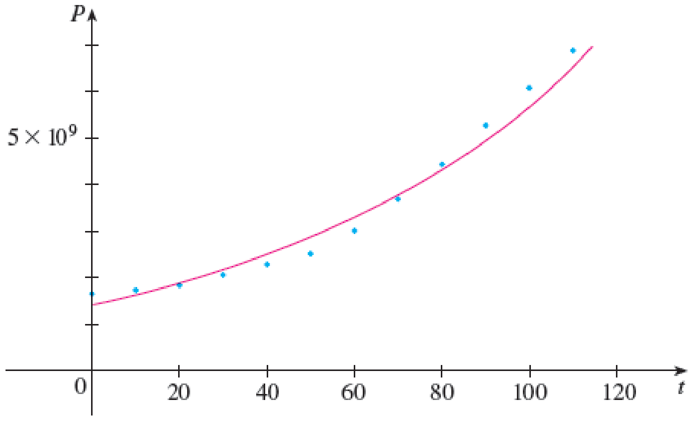
Figura 8

Aplicações de Funções Exponenciais

O padrão dos dados da Figura 8 sugere um crescimento exponencial; assim, se usarmos uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial por mínimos quadrados, obteremos o seguinte modelo exponencial:

$$P = (143653) \cdot (1{,}01395)^t$$

onde $t = 0$ corresponde a 1900.
A Figura 9 mostra o gráfico dessa função exponencial junto com os pontos originais.



Modelo exponencial para o crescimento populacional

Figura 9

Aplicações de Funções Exponenciais

Podemos ver que a curva exponencial se ajusta razoavelmente aos dados. Os períodos de crescimento populacional lento podem ser explicados pelas duas guerras mundiais e pela depressão dos anos 1930.

O Número *e*

O Número *e*

Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo. A escolha de uma base a é influenciada pela maneira que o gráfico de $y = a^x$ cruza o eixo y. As Figuras 10 e 11 mostram as retas tangentes para os gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3^x$ no ponto (0, 1).

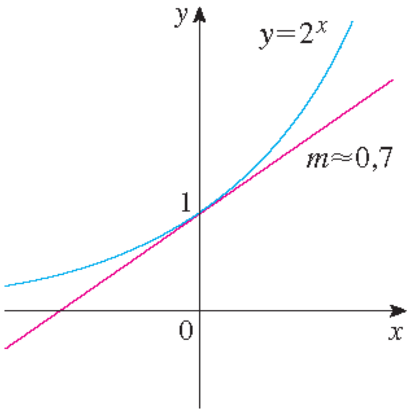


Figura 10

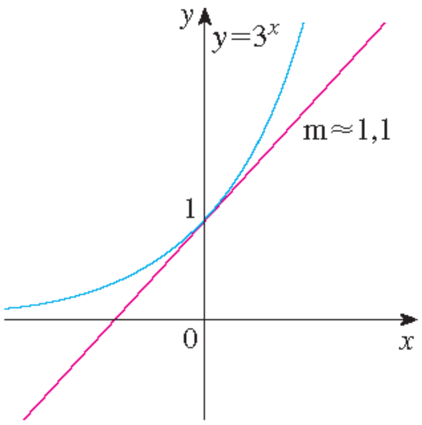


Figura 11

O Número *e*

(Para as finalidades presentes, você pode pensar na reta tangente para um gráfico exponencial em um ponto como a reta que toca o gráfico somente naquele ponto.)

Se medirmos os declives dessas retas tangentes em (0, 1), descobrimos que $m \approx 0{,}7$ para $y = 2^x$ e $m \approx 1{,}1$ para $y = 3^x$.

O Número *e*

Conforme será visto no Capítulo 3, as fórmulas do cálculo ficam muito simplificadas quando escolhemos como base *a* aquela para a qual resulta uma reta tangente a $y = a^x$ em (0, 1) com uma inclinação de *exatamente* 1. (Veja a Figura 12.)

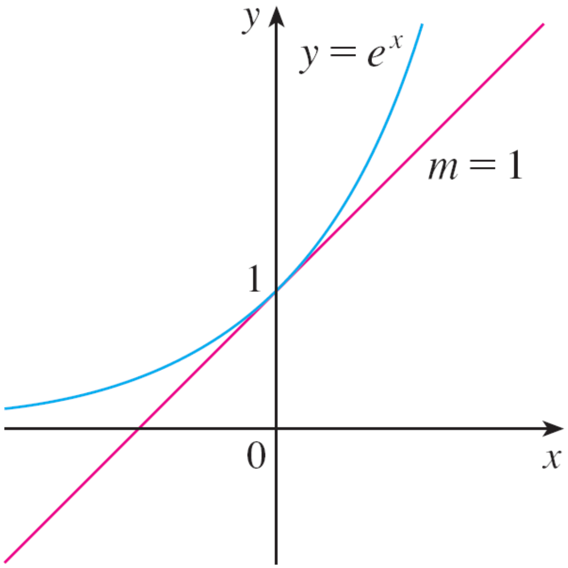


Figura 12

A função natural exponencial atravessa o eixo *y* com uma inclinação de 1.

O Número *e*

De fato, *existe* um número e é denotado pelo caractere *e*.

(Essa notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727, provavelmente porque é o primeiro caractere da palavra *exponencial*.)

O Número *e*

Na visualização das Figuras 10 e 11, não surpreende que o número *e* está entre 2 e 3 e o gráfico de $y = e^x$ esteja entre os gráficos $y = 2^x$ e $y = 3^x$.
(Veja a Figura 13.)

Veremos que o valor de *e*, correto até a quinta casa decimal, é

$e \approx 2{,}71828$

Podemos chamar a função $f(x) = e^x$ de **função exponencial natural**.

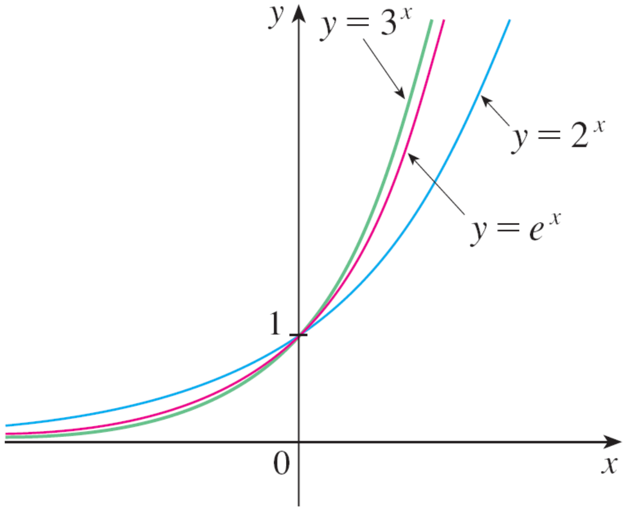


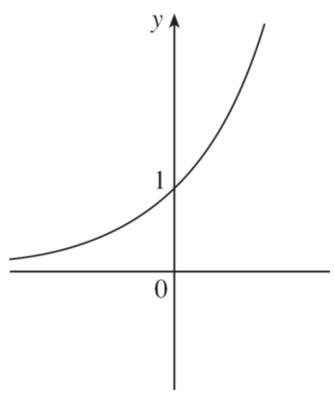
Figura 13

Exemplo 4

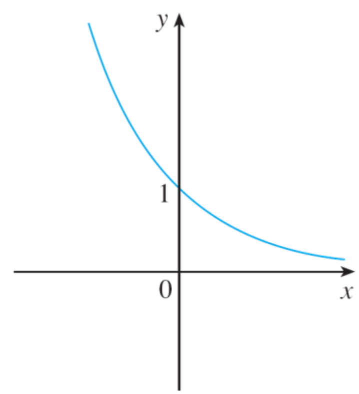
Faça o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ e diga qual o domínio e a imagem.

Solução:

Começamos com o gráfico de $y = e^x$ das Figuras 12 e 14(a) e o refletimos em torno do eixo y para obter o gráfico de $y = e^{-x}$ ilustrado na Figura 14(b). (Observe que essa curva cruza o eixo y com uma inclinação de –1.)



(a) $y = e^x$



(b) $y = e^{-x}$

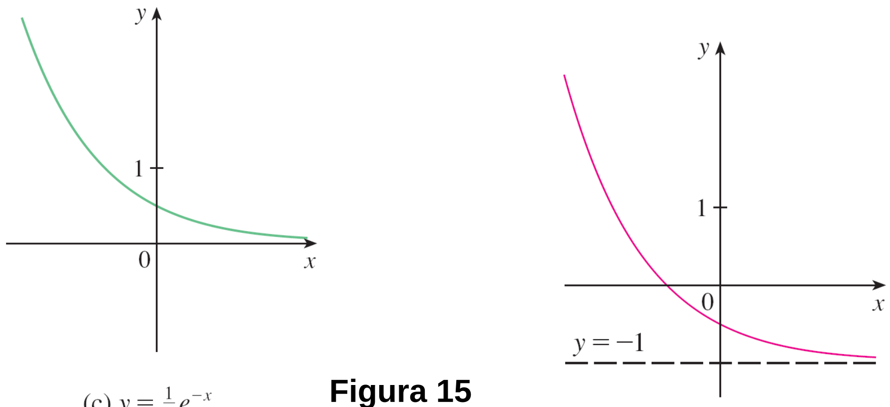
Figura 14

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Então comprimimos verticalmente o gráfico por um fator de 2 para obter o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ mostrado na Figura 14(c).

Finalmente deslocamos o gráfico para baixo uma unidade, para obter o que foi pedido na Figura 14(d).



(c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$

Figura 15

(d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $(–1,\infty)$.