

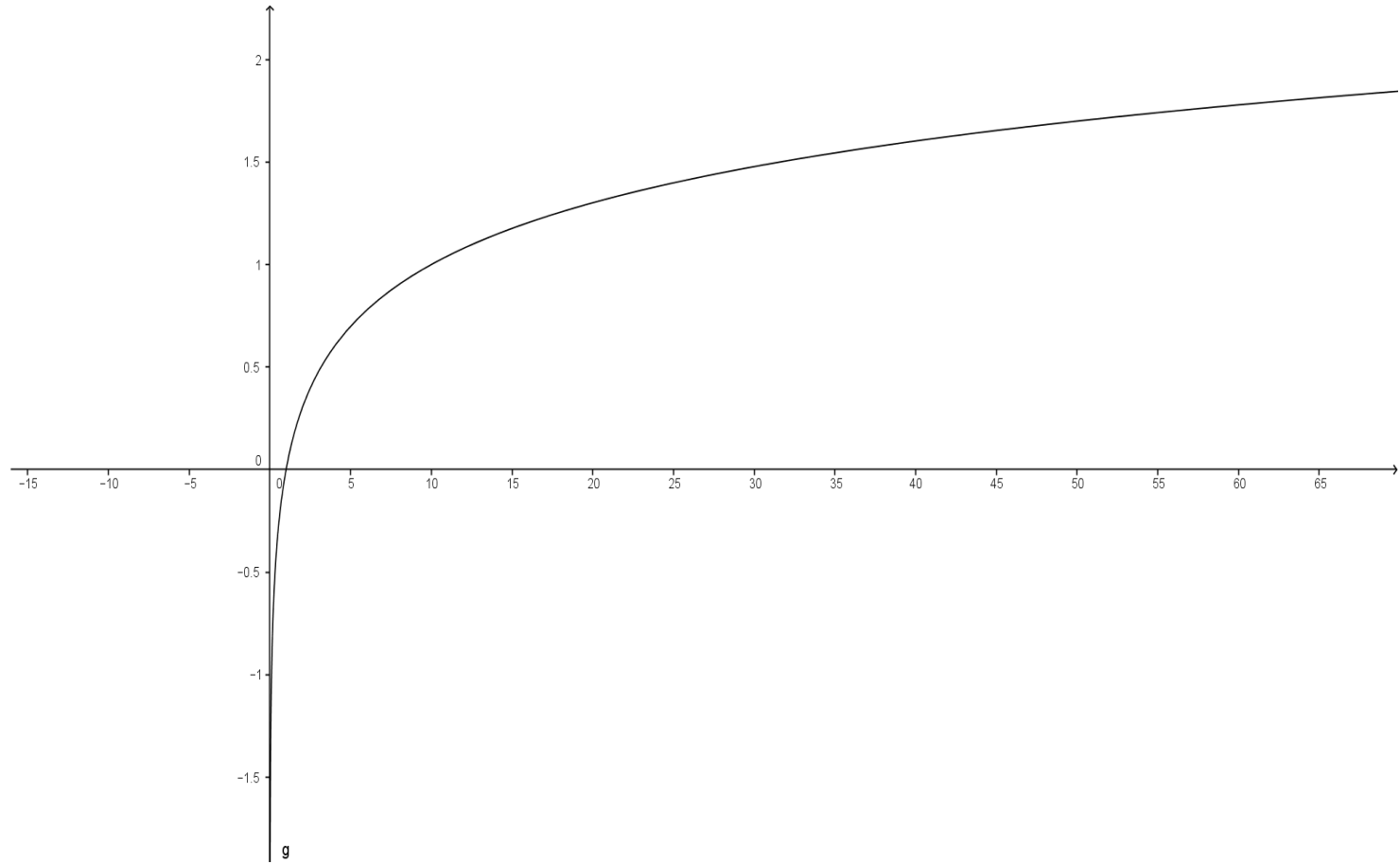
Logaritmos

Segunda parte

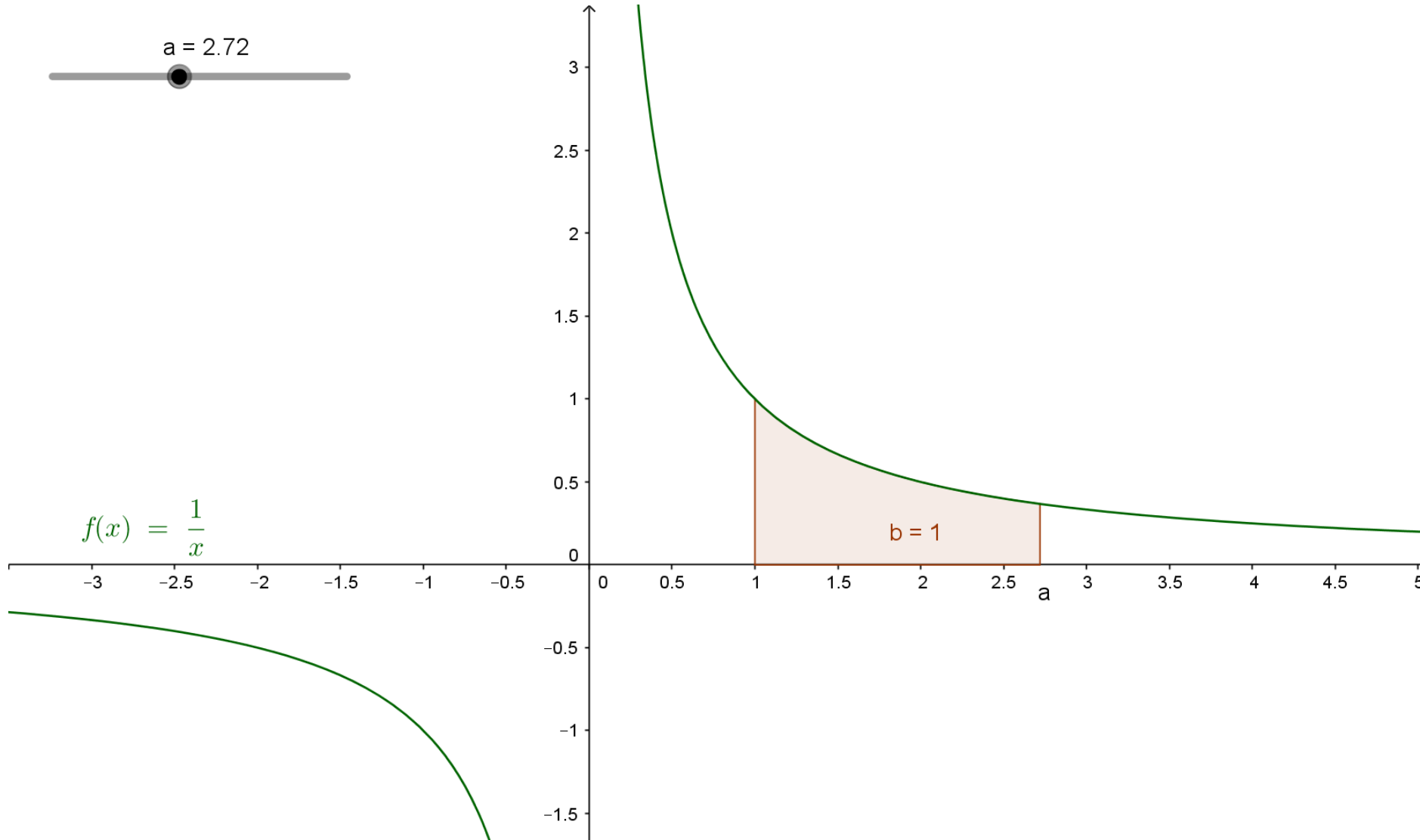
Antonio Carlos Brolezzi

brolezzi@ime.usp.br

Como foi criada a função logarítmica?



A função logarítmica foi definida como a medida da área sob o gráfico de uma função chamada hipérbole.

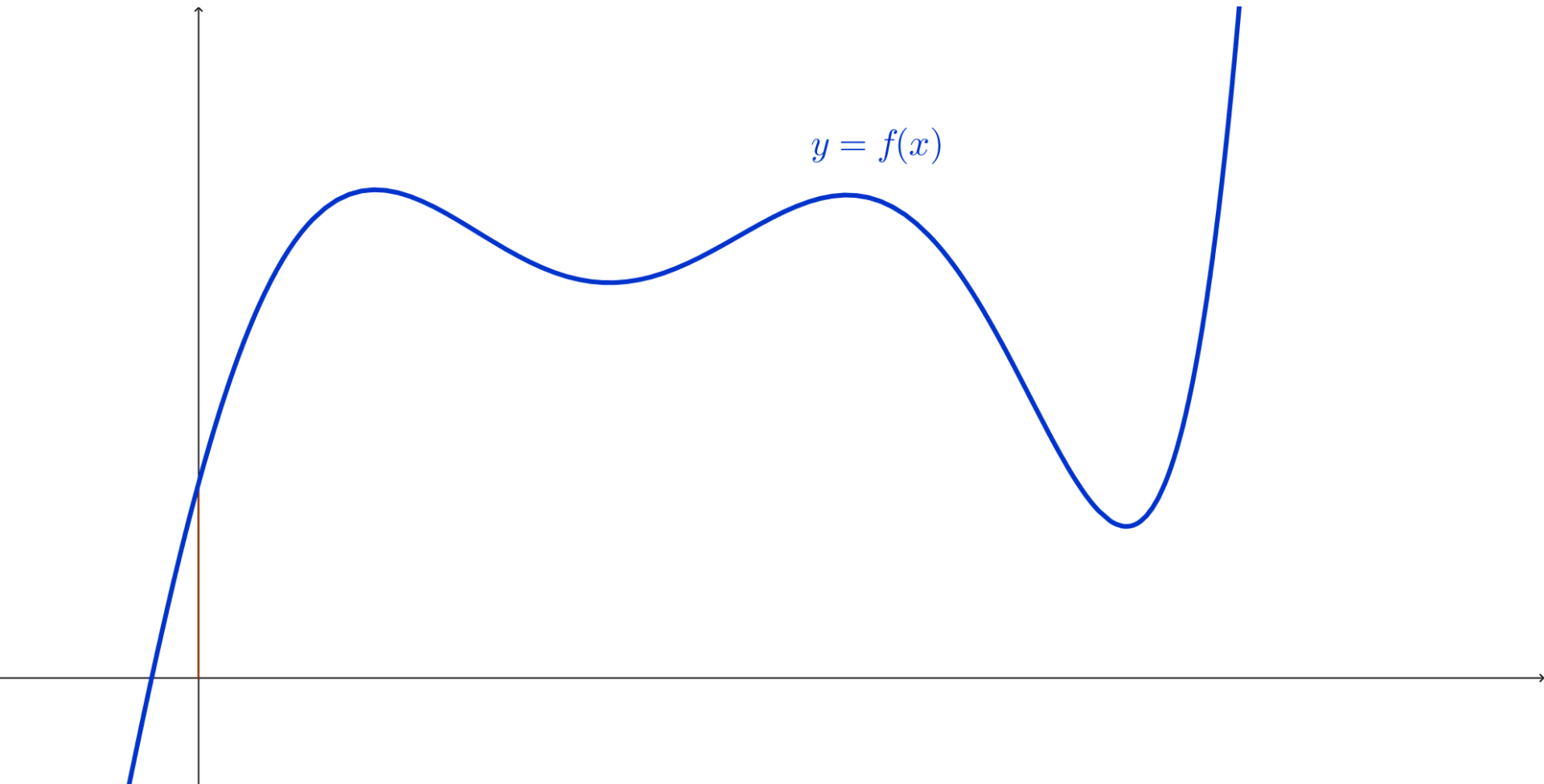


Área sob o gráfico de uma função?

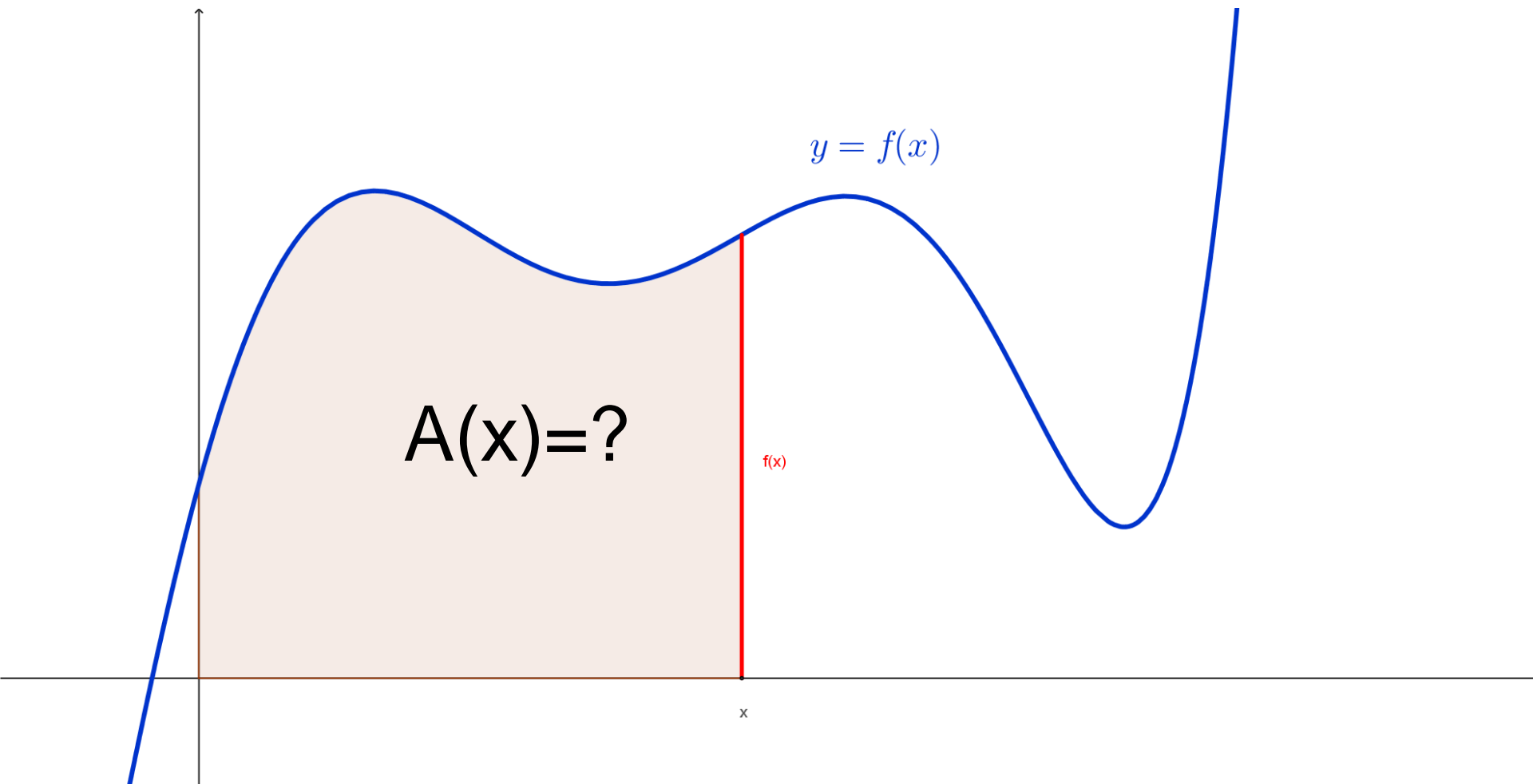
Mas isso não é uma integral?



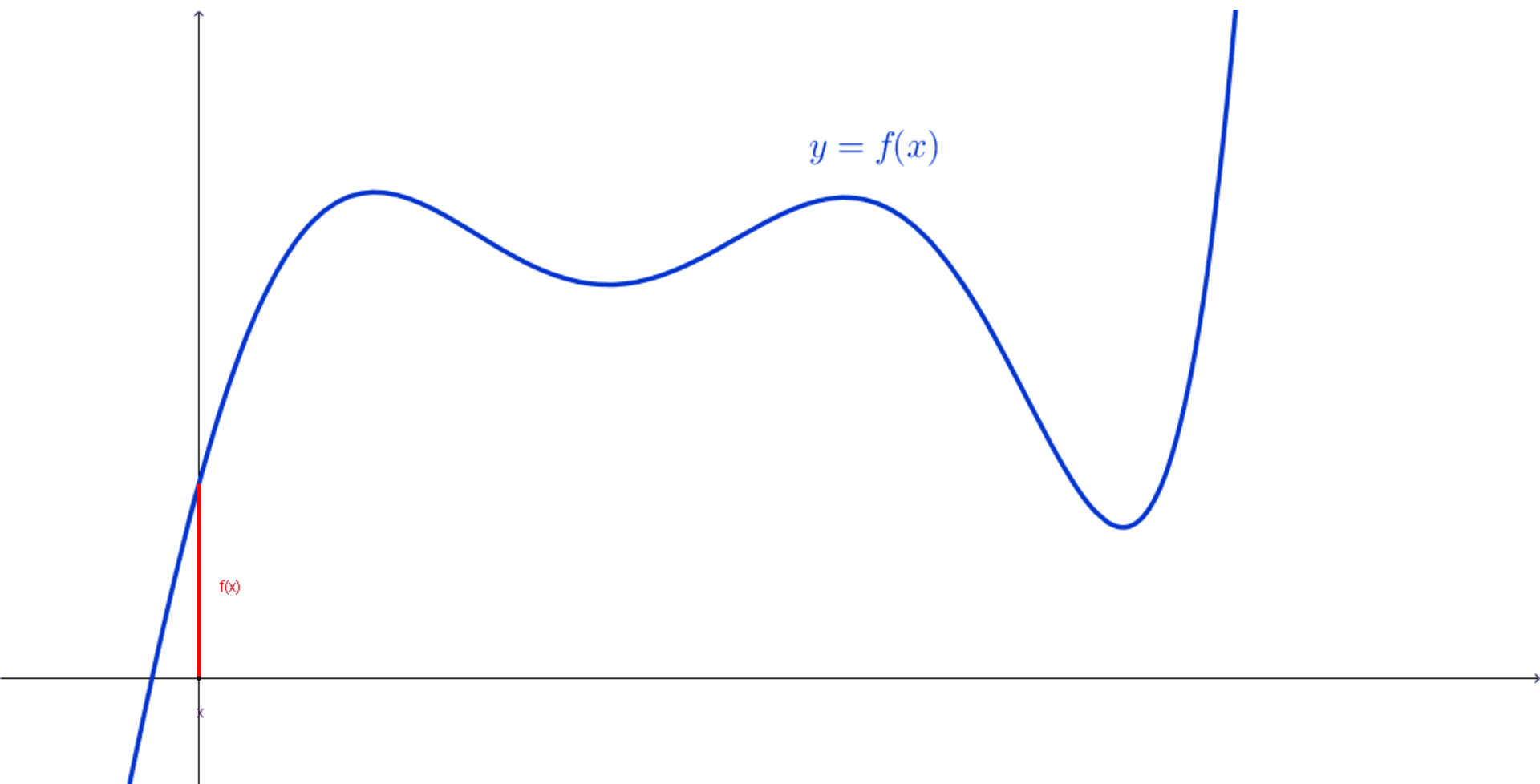
Para entender o que é integral, é preciso pensar em como varia a área de definida sob o gráfico de uma função.



Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?



A variação instantânea da área $A(x)$ é
 $A'(x)=f(x)$.



Por volta de 1640, Pierre de Fermat (1601-1665) estabeleceu que a área sob a curva $y = x^n$, entre $x = 0$ e $x = a$, é dada por

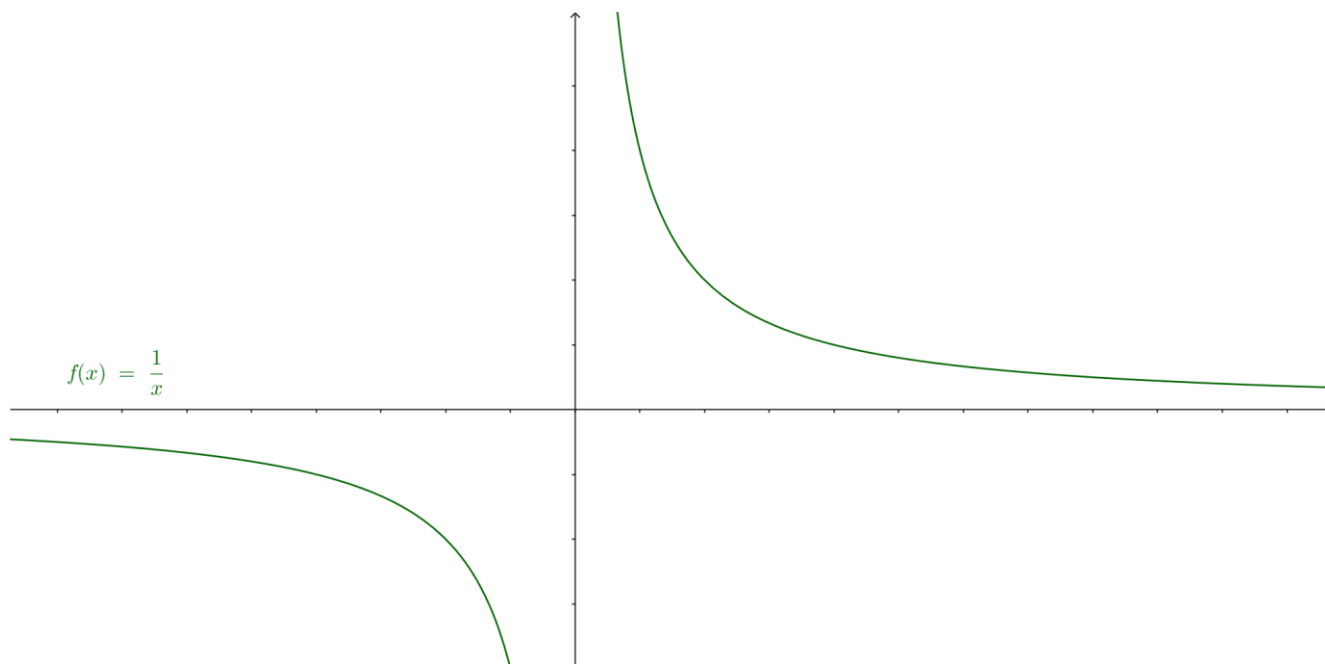
$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Ou seja, se $y = x^2$, então a função $y = \frac{x^3}{3}$ fornece a área sob a curva entre 0 e x .



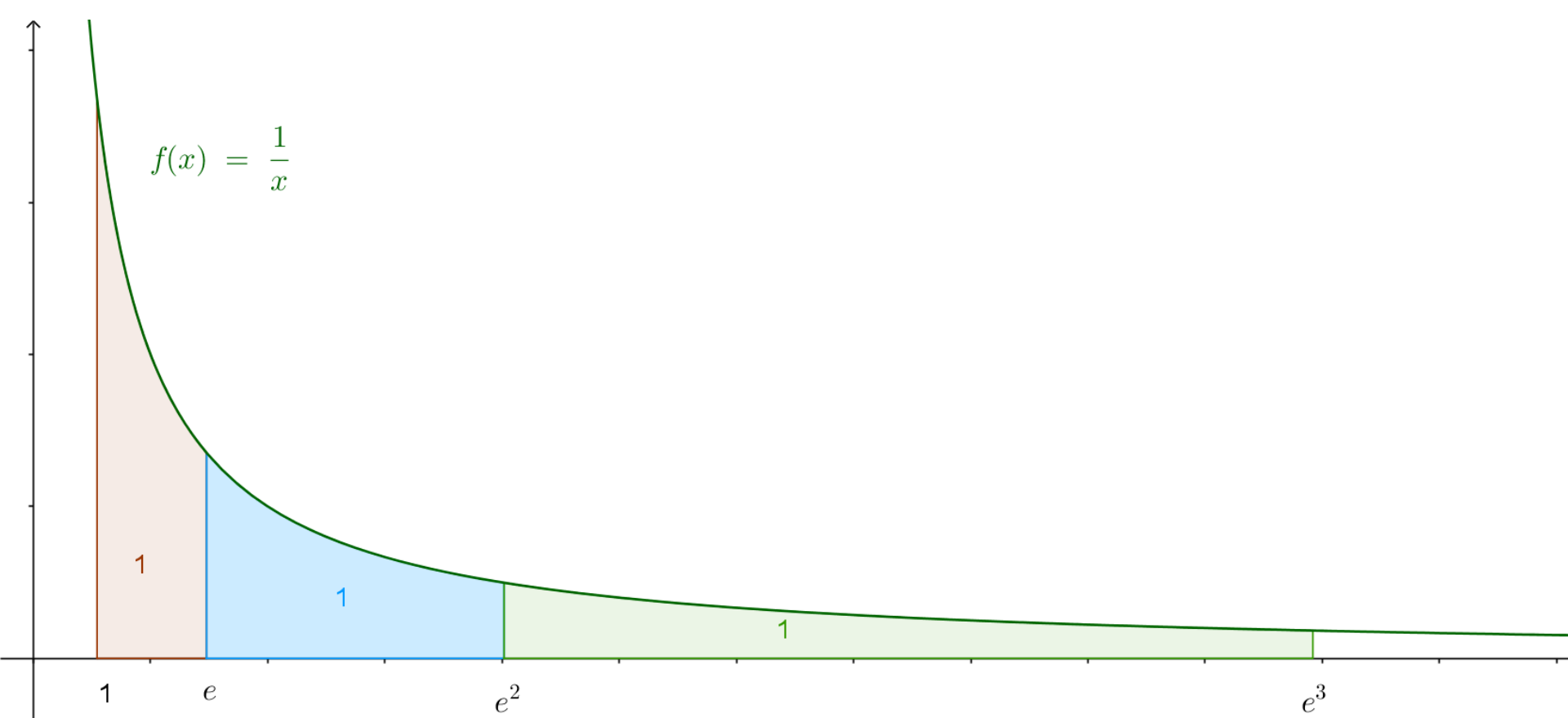
Mas, e se $n = - 1$?

A curva $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, tem como gráfico uma hipérbole. Se fizermos $A = \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{a^0}{0}$ temos uma indeterminação.

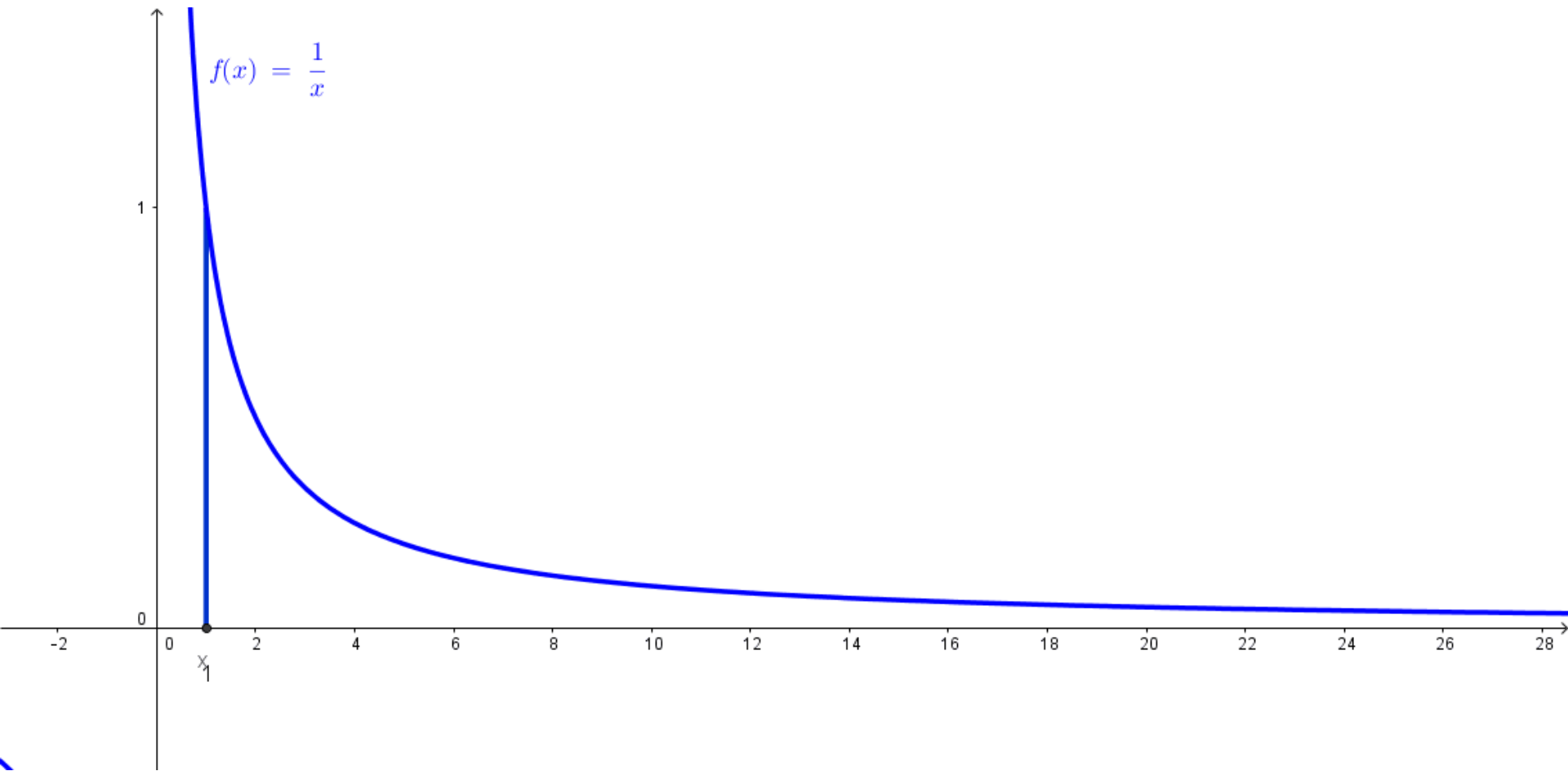


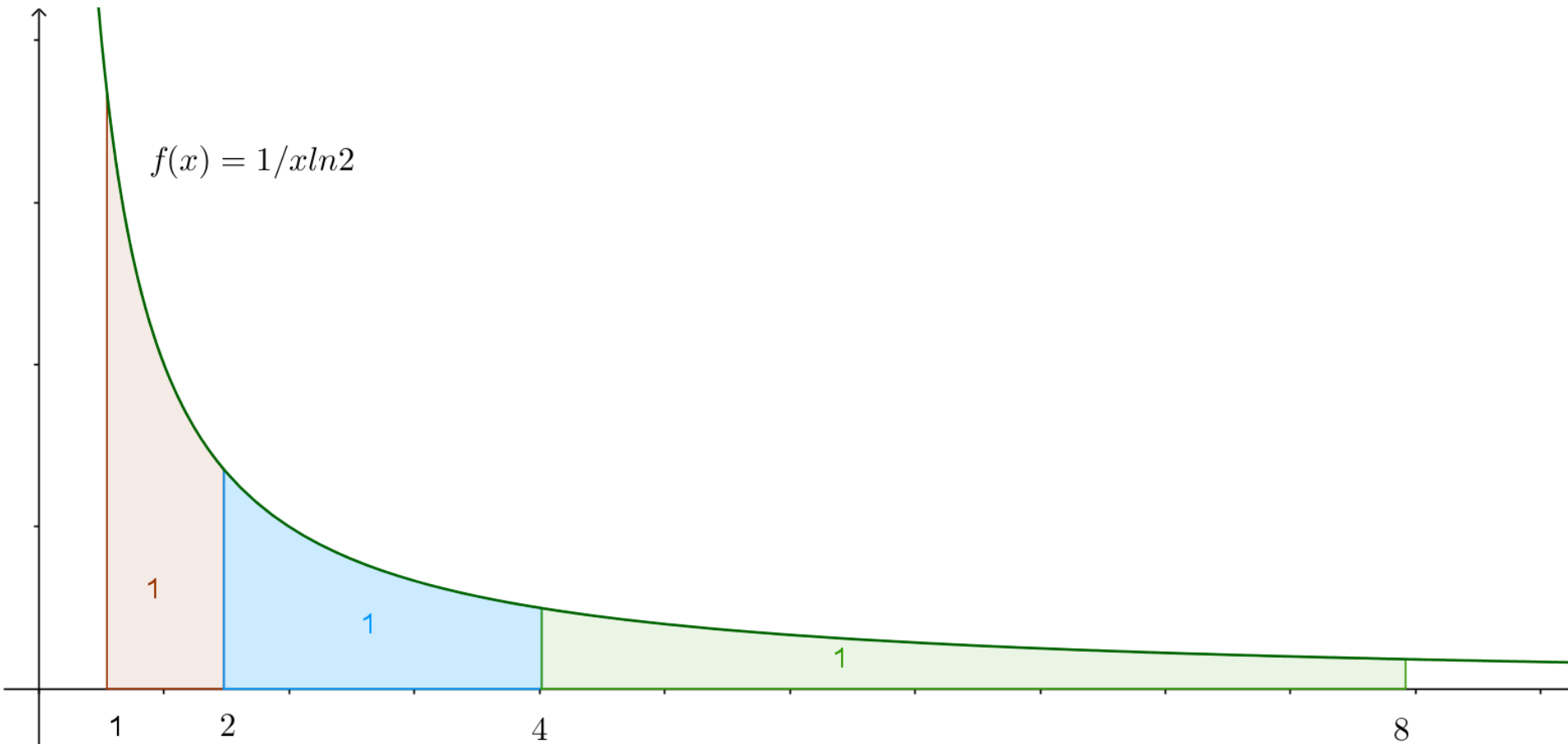
Em 1647, o jesuíta belga
Gregorius de Saint
Vicent (1584-1667),
notou que áreas
correspondentes a
abscissas que formam
uma PG, formam uma
PA.



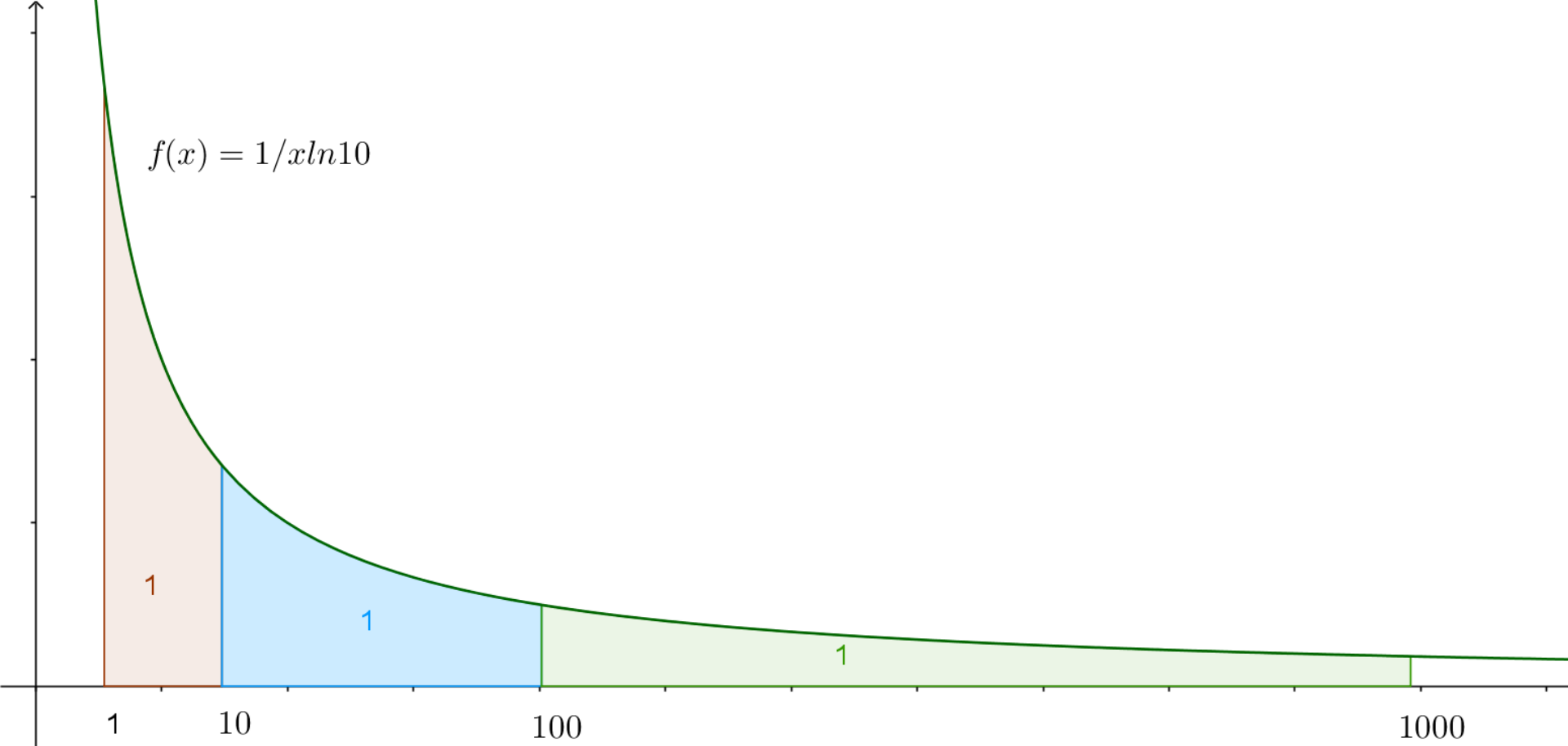


(gráfico fora de escala)





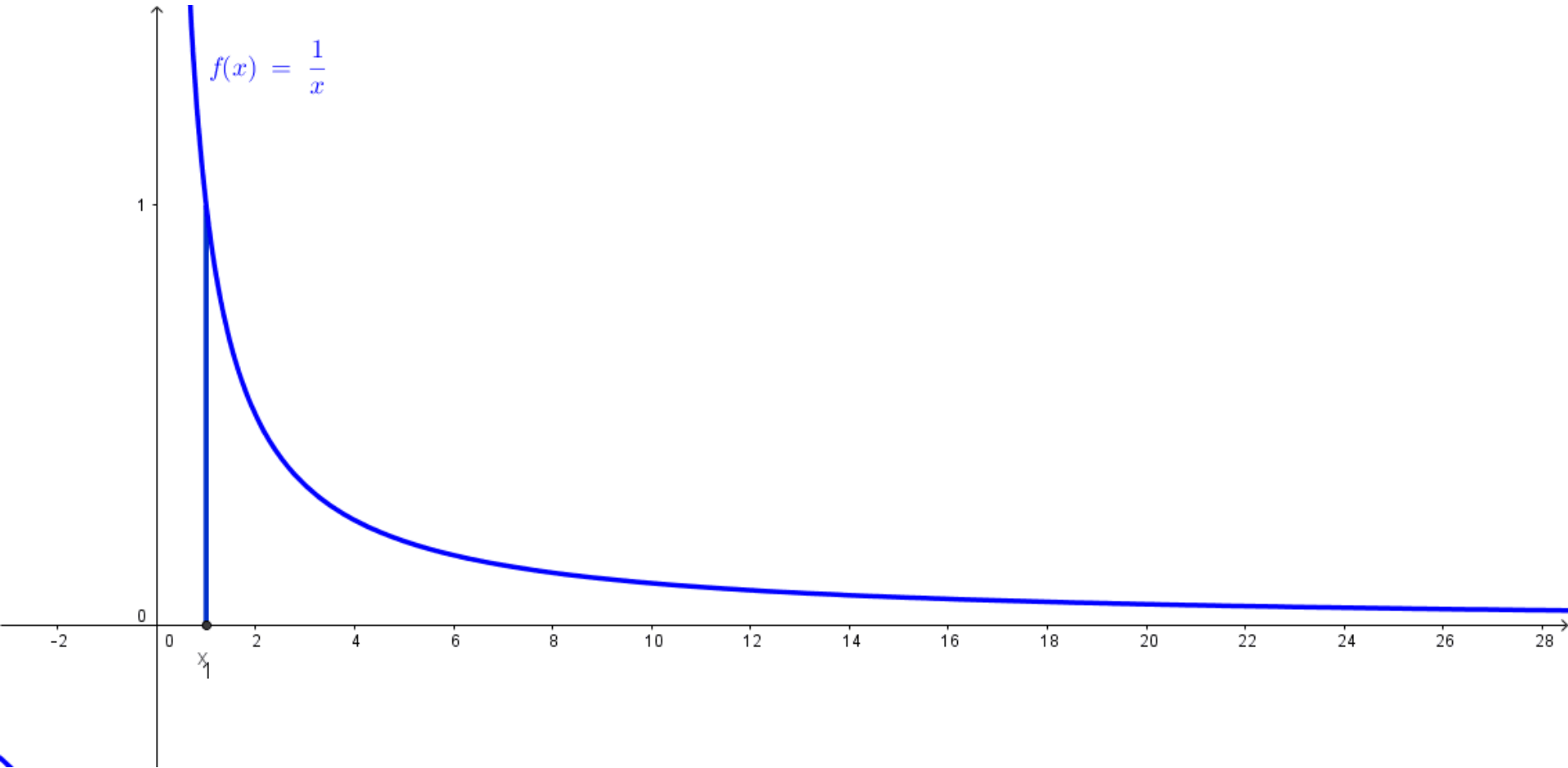
(gráfico fora de escala)



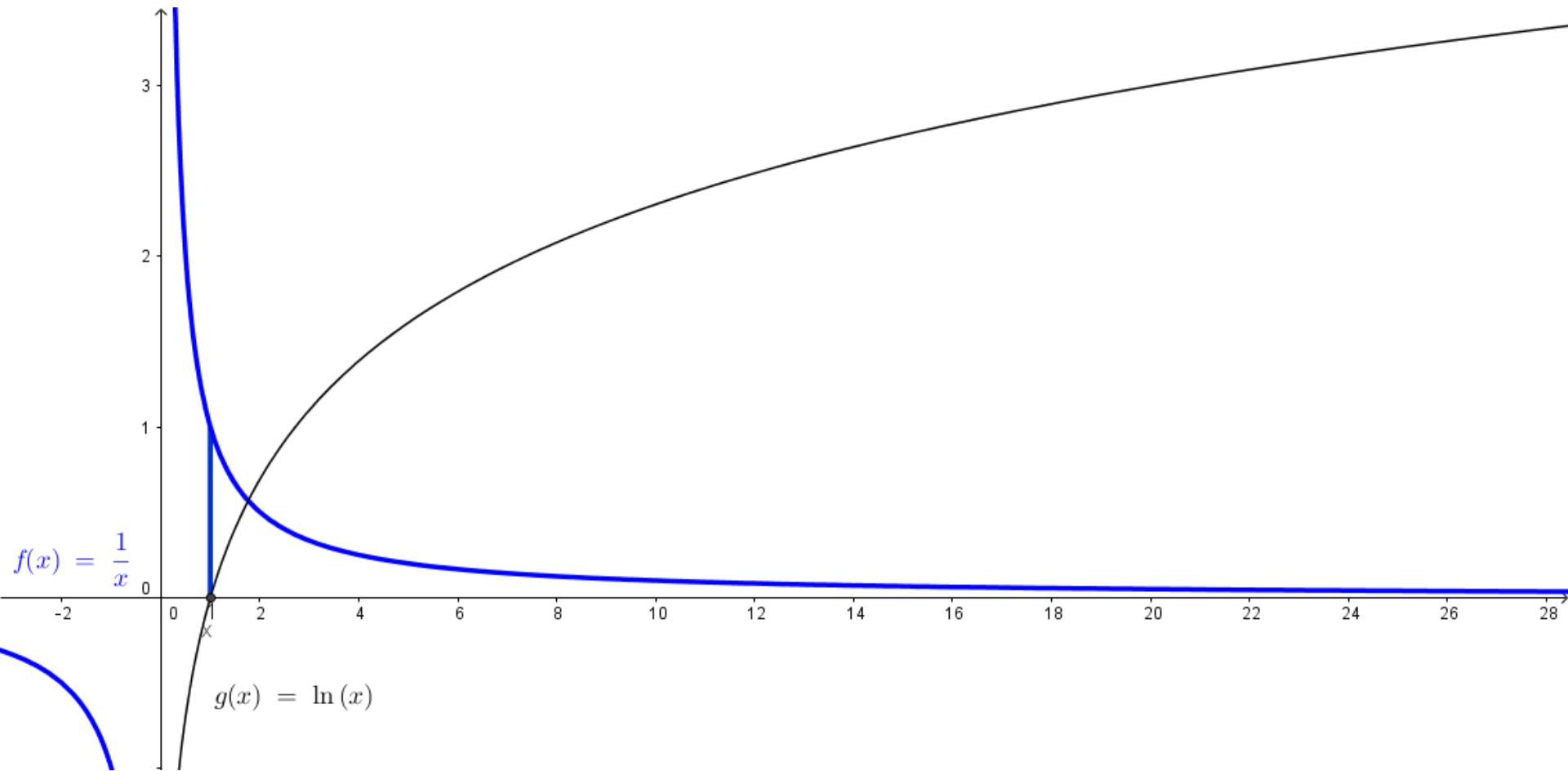
(gráfico fora de escala)

Quem percebeu que havia logaritmos nessa história foi o aluno de Saint Vicent, chamado Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667).

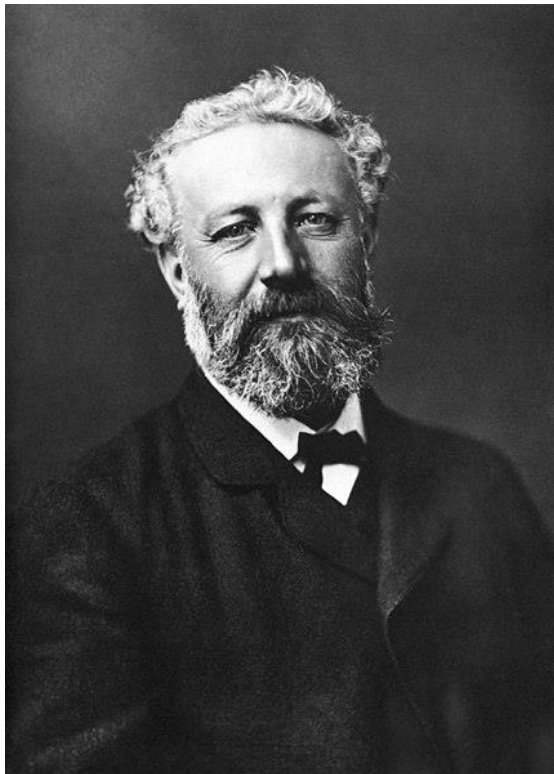
Que função expressa a área sob $f(x)=1/x$,
de 1 a x ?



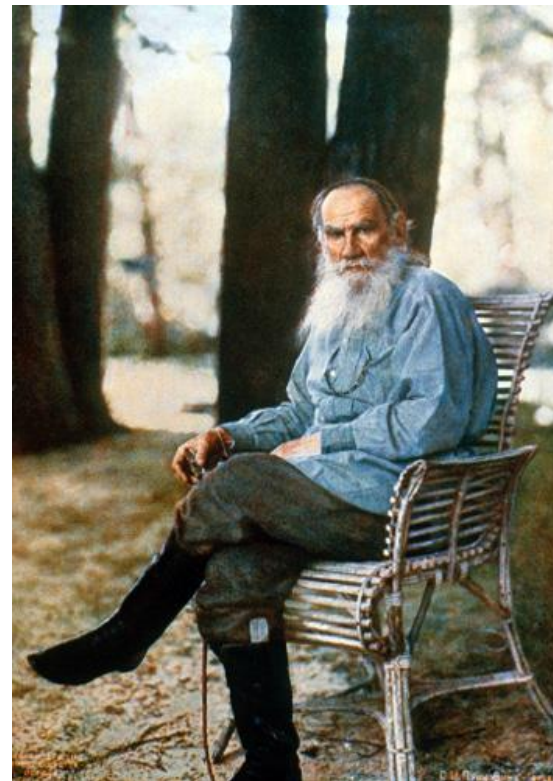
A função área é $A(x)=\ln x$ (logaritmo natural, base e)



$e \cong 2,7 1828 1828 4590 4523$



Júlio Verne (1828-1905)

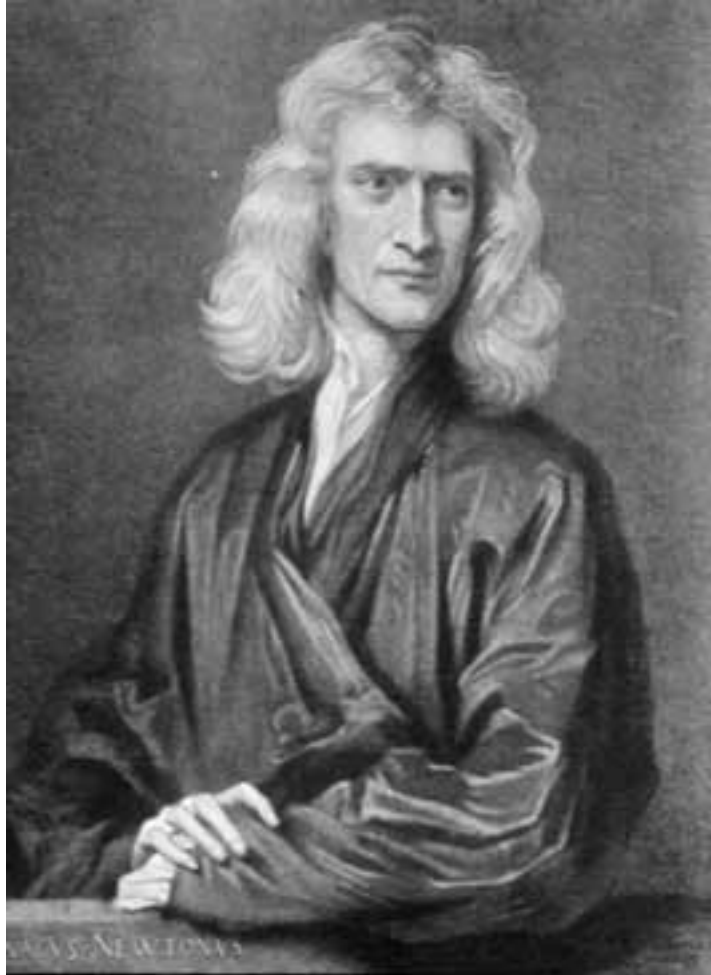


León Tolstoi (1828-1910)

$e \cong 2,7$ 1828 1828 4590 4523

Em 1687 Newton publica *Philosophiae naturalis principia mathematica*

O maior tratado científico já escrito.



Sir Isaac Newton 1642 (Woolsthorpe)-1727 (London)

Newton teria criado o Cálculo Diferencial e Integral entre 1665 e 1666, quando o Trinity College foi fechado por causa da peste.



Sir Isaac Newton 1642 (Woolsthorpe)-1727 (London)

Já se faziam derivadas e integrais antes dele, mas ele percebeu que se tratavam de coisas inversas e - o mais importante - percebeu o valor do Cálculo.



Sir Isaac Newton 1642 (Woolsthorpe)-1727 (London)

Newton deixou cerca de 5000 páginas de manuscritos sem publicação.



Sir Isaac Newton 1642 (Woolsthorpe)-1727 (London)

Em 1673 Leibniz viajou a Londres, onde comprou um livro de Barrow e tornou-se membro da Royal Society. Dizem que teria lido manuscritos de Newton.



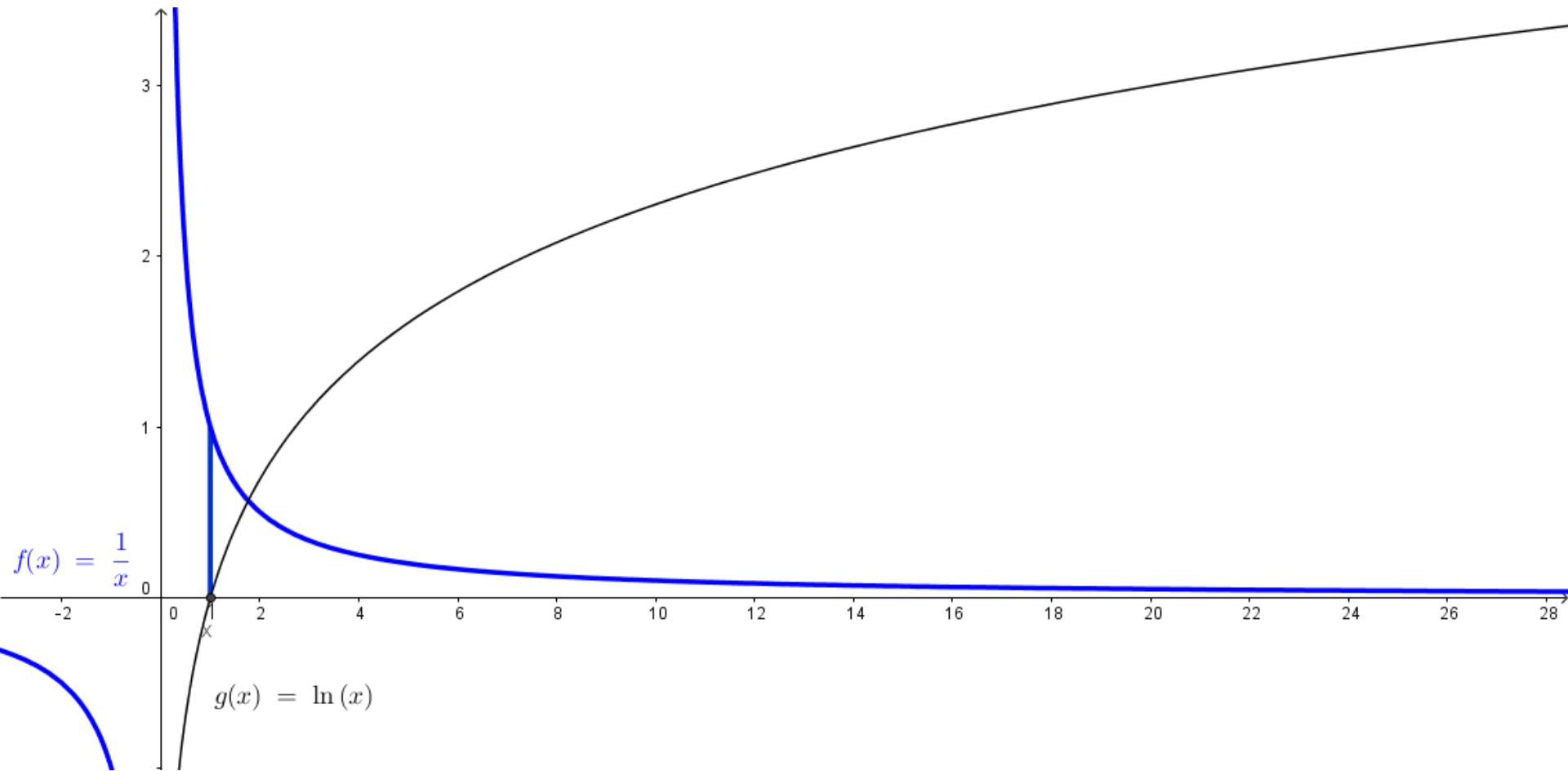
Gottfried Wilhelm von Leibniz 1646 (Leipzig)-1716 (Hannover)

Em 1676 Leibniz cria o Cálculo com uma notação bem diferente de Newton. Sua notação prevaleceu até hoje.



Gottfried Wilhelm von Leibniz 1646 (Leipzig)-1716 (Hannover)

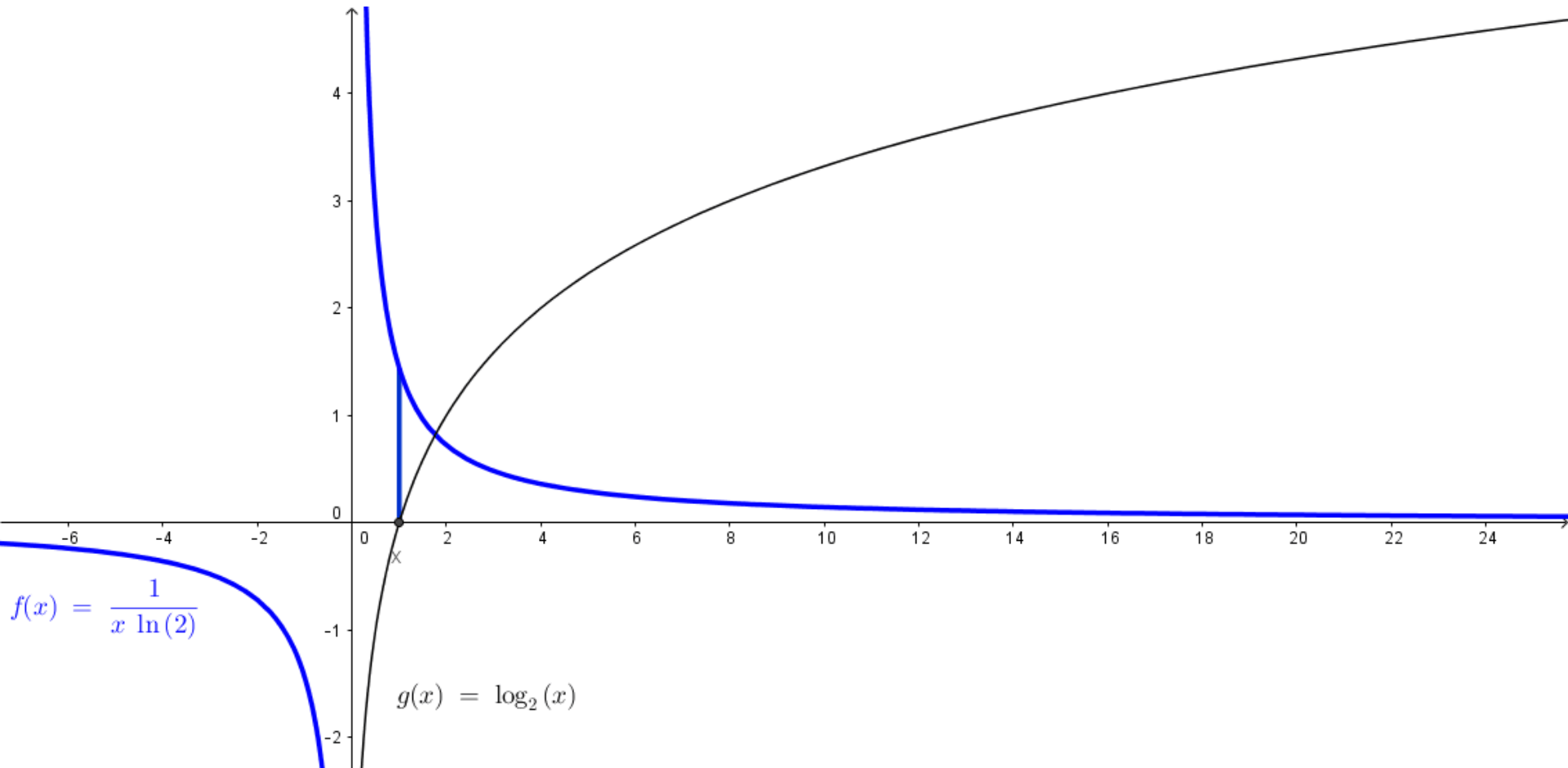
A função área é $A(x)=\ln x$ (logaritmo natural, base e)



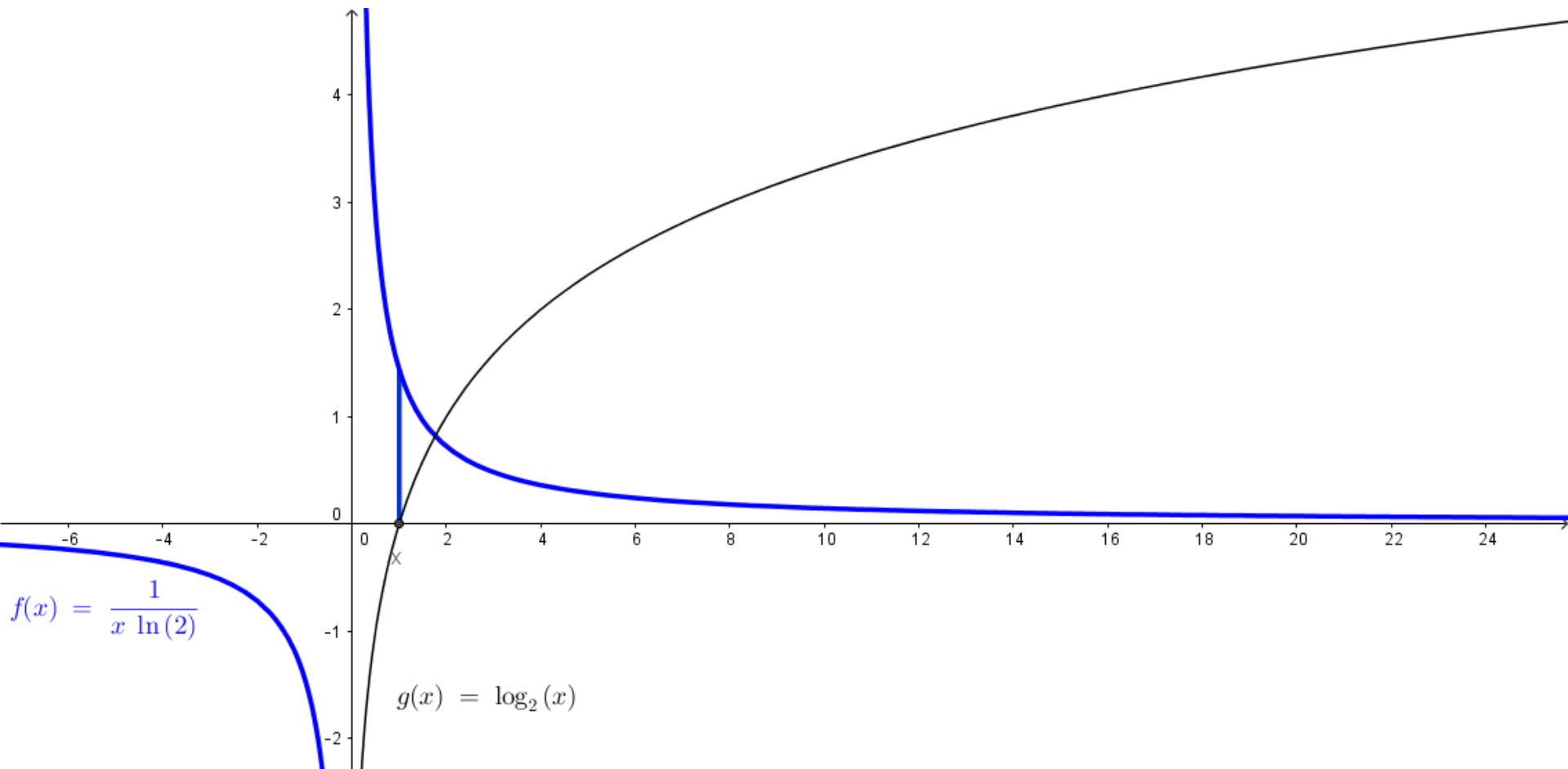
$e \cong 2,7\ 1828\ 1828\ 4590\ 4523$

Que função expressa a área sob

$$f(x) = \frac{1}{x \ln 2}, \text{ de } 1 \text{ a } x?$$

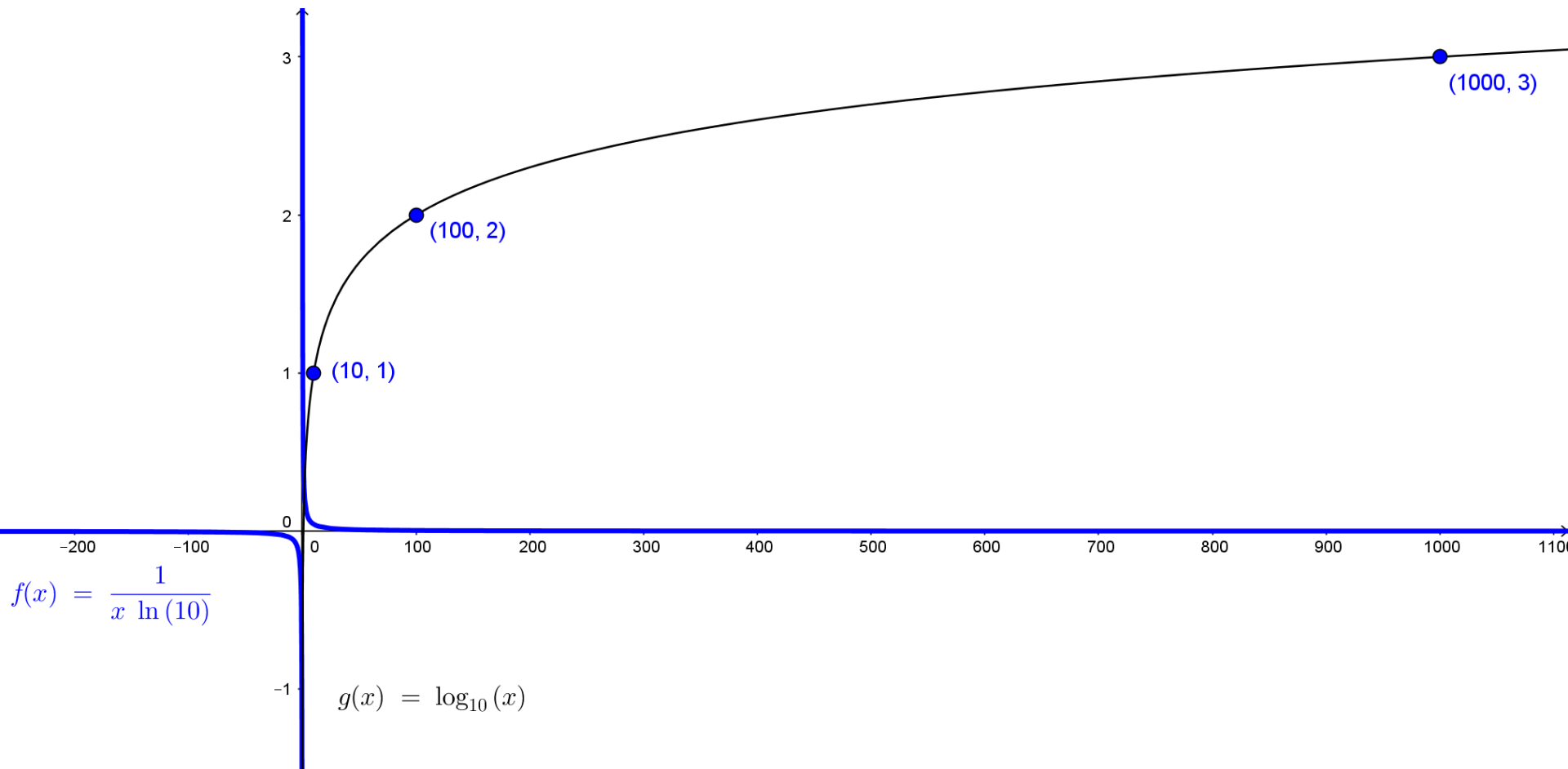


A função área é $A(x) = \log_2 x$
(função logarítmica na base 2)

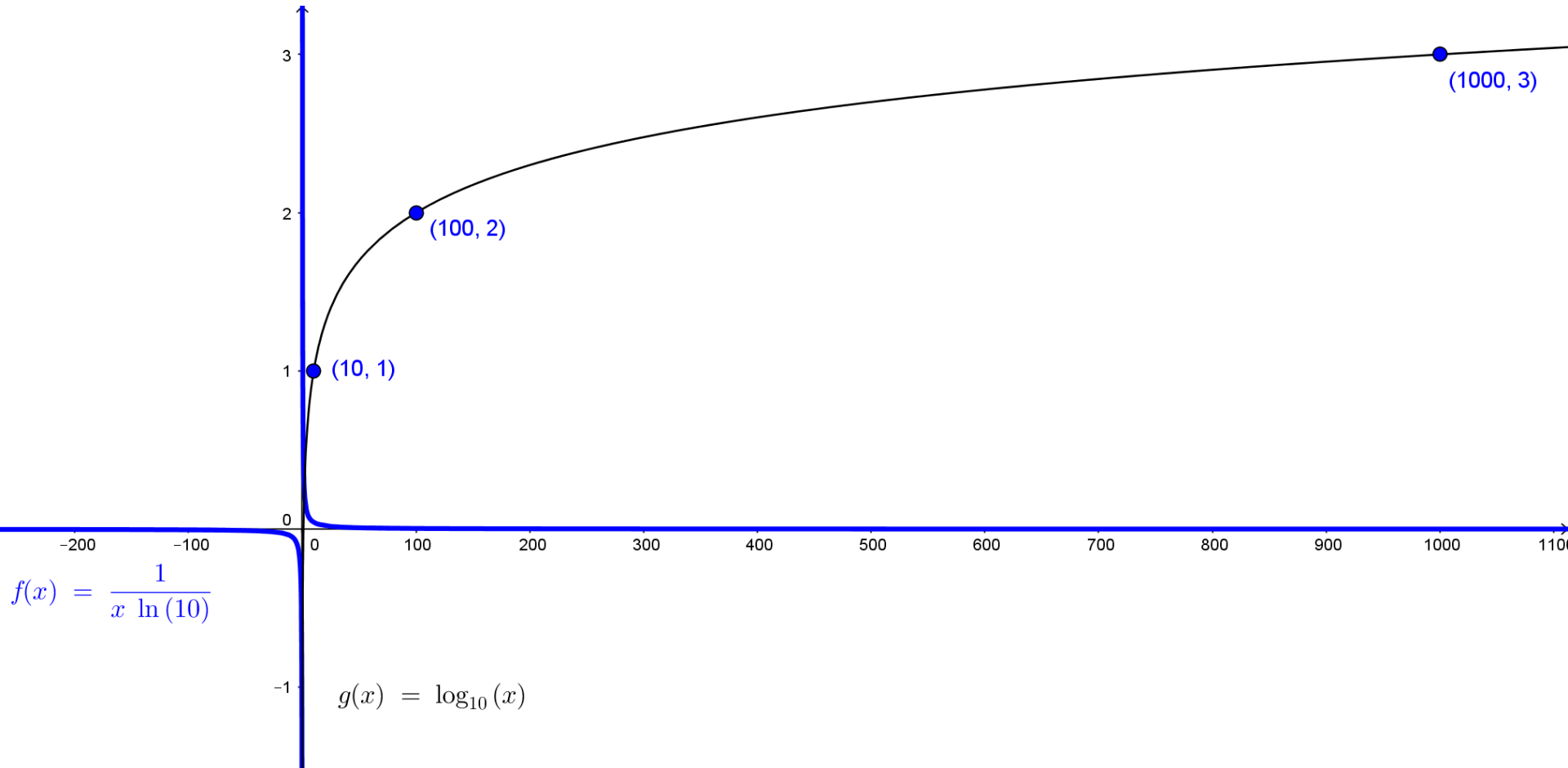


Que função expressa a área sob

$$f(x) = \frac{1}{x \ln 10}, \text{ de } 1 \text{ a } x?$$



A função área é $A(x) = \log_{10} x$
(função logarítmica na base 10)

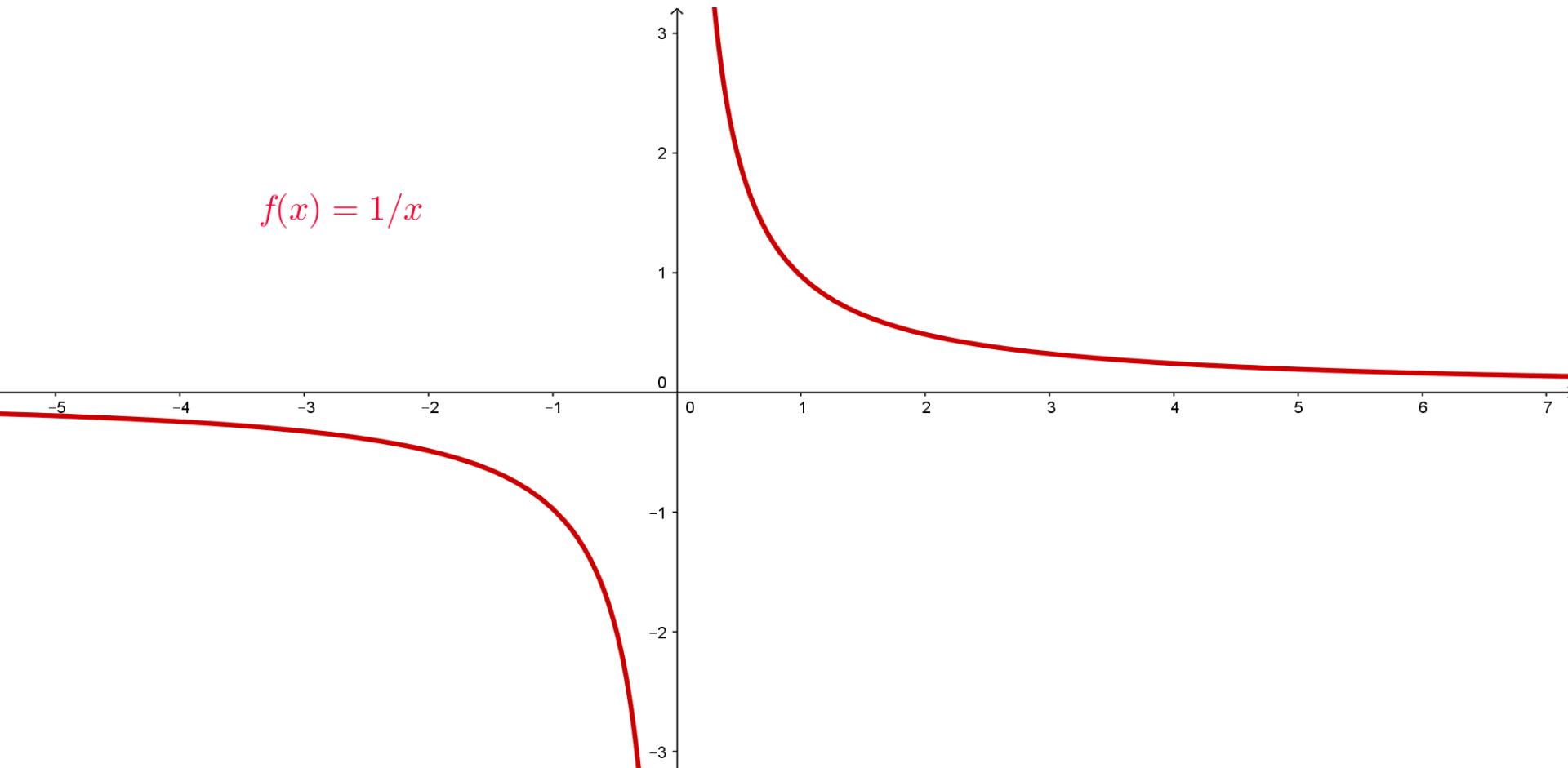


A integral indefinida da função

$f(x) = \frac{1}{x \ln a}$, com $a > 0$, $a \neq 1$, é a função

$$g(x) = \log_a |x|$$

(função logarítmica na base a do módulo de x)

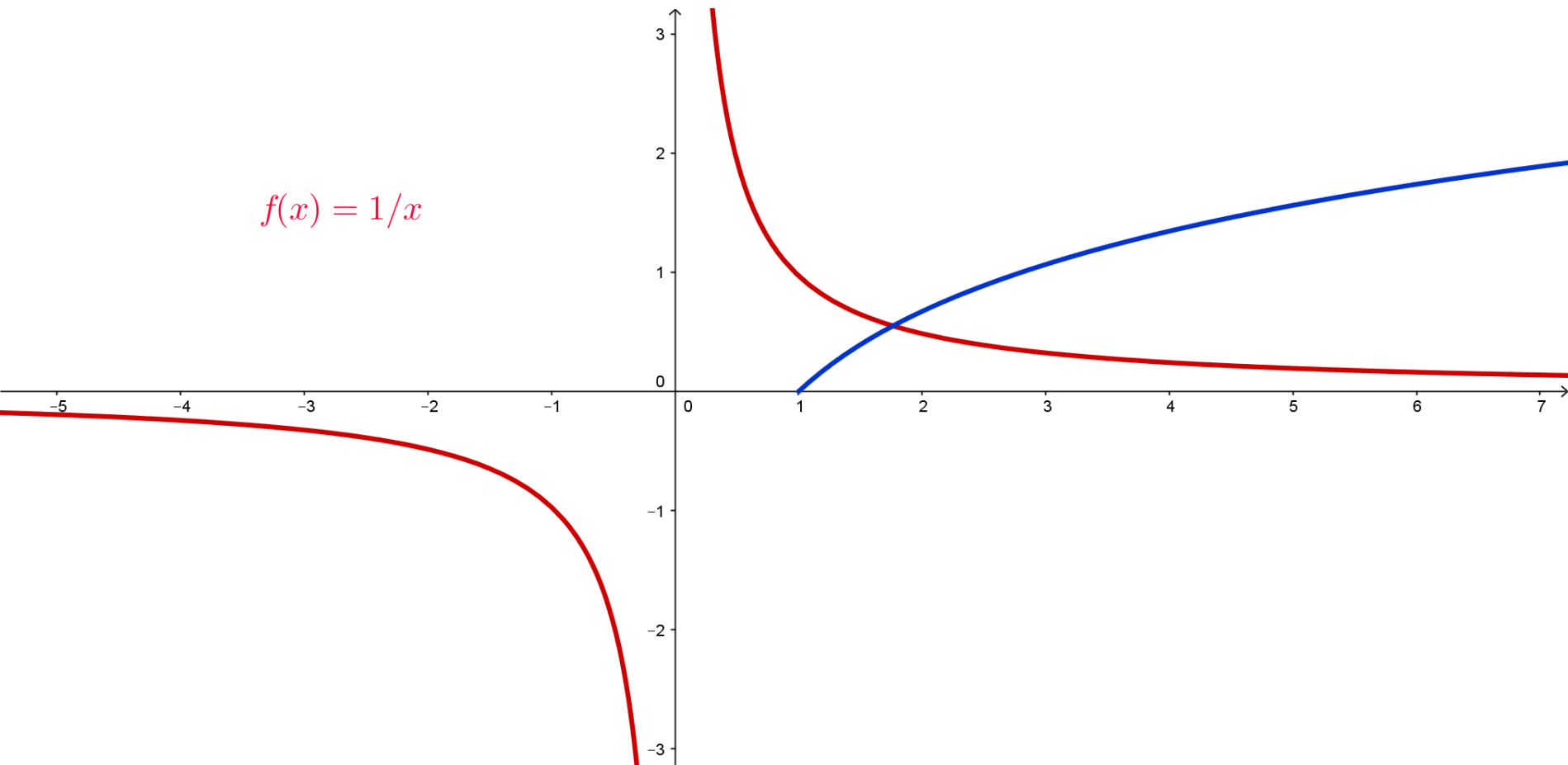


A integral indefinida da função

$f(x) = \frac{1}{x \ln a}$, com $a > 0$, $a \neq 1$, é a função

$$g(x) = \log_a |x|$$

(função logarítmica na base a do módulo de x)

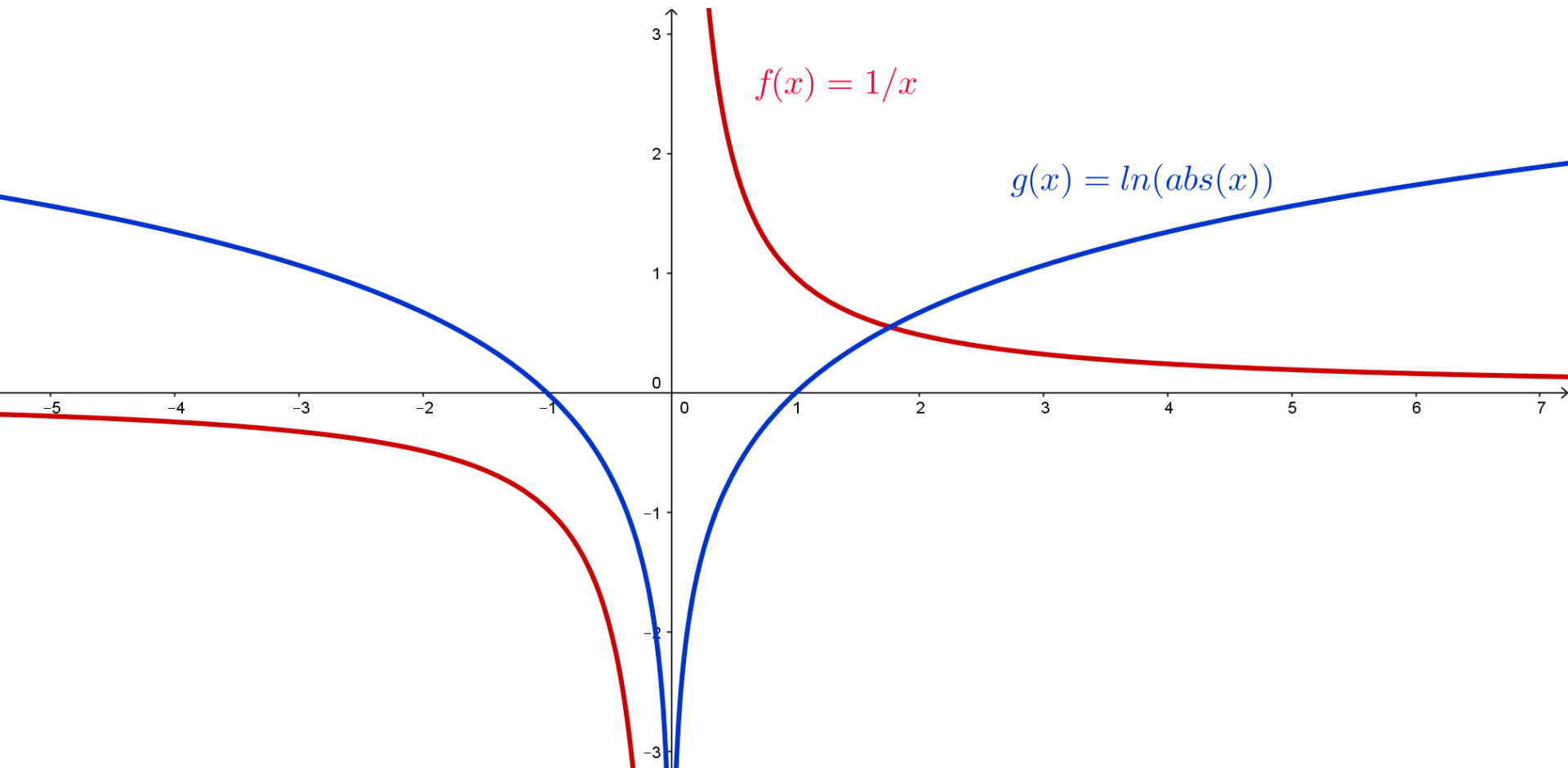


A integral indefinida da função

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ é a função}$$

$$g(x) = \ln|x|$$

(função logarítmica natural, base e)

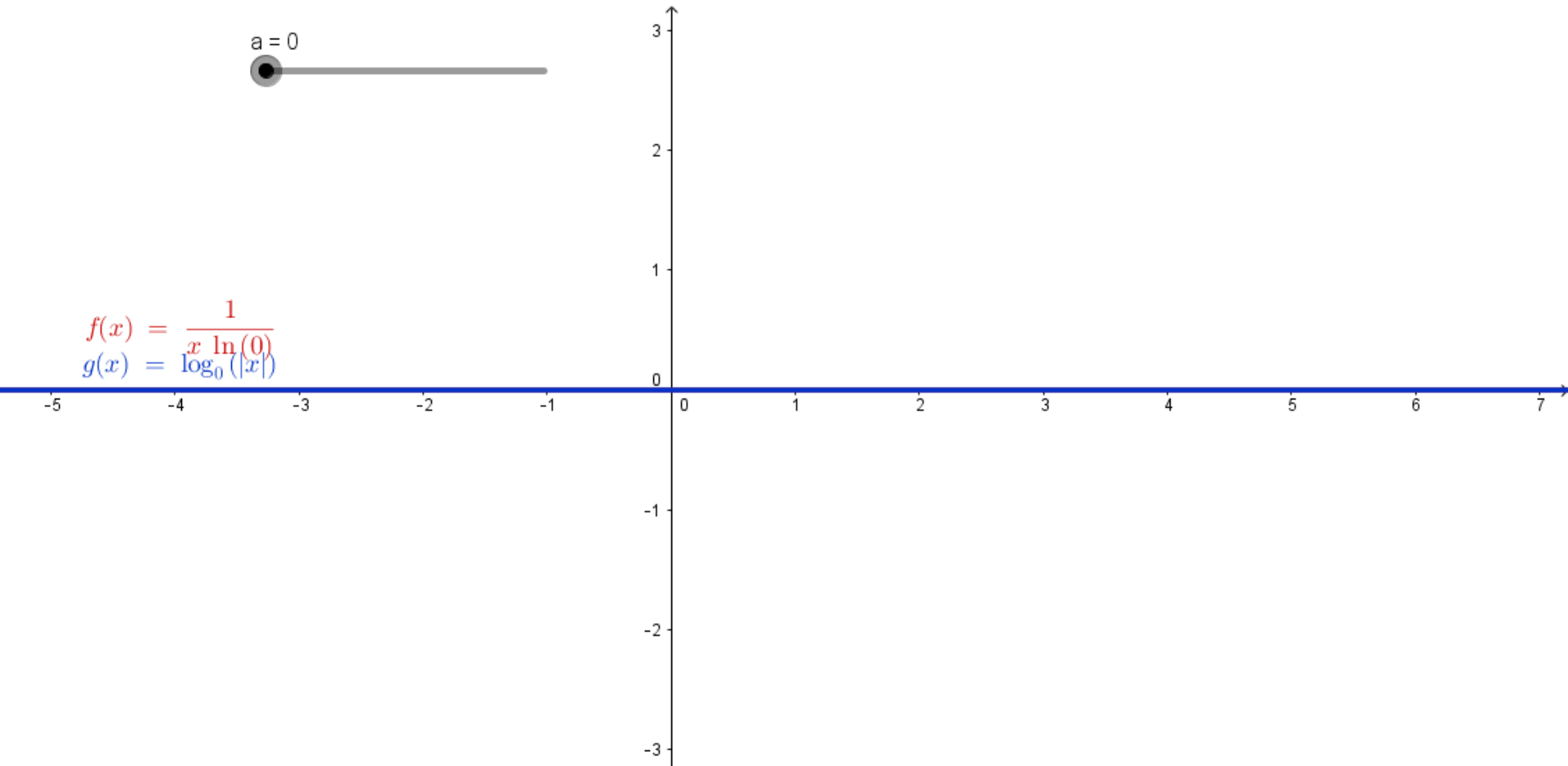


A integral indefinida da função

$$f(x) = \frac{1}{x \ln a}, \text{ com } a > 0, a \neq 1, \text{ é a função}$$

$$g(x) = \log_a |x|$$

(função logarítmica na base a do módulo de x)



Exemplos de escalas logarítmicas

Nossa sensibilidade é afetada de modo logaritmico. Ou seja, percebemos variações de grandezas que nos afetam não de modo linear, mas de modo exponencial.

Por exemplo, nosso ouvido percebe uma mudança de pressão que indica um aumento considerável de sons, quando este passa a uma próxima potência de 10.



Quando a pressão sonora passa de uma potência de 10 a outra, a escala de decibéis assinala uma mudança linear, mais fácil de acompanhar.



Quando a pressão sonora passa de uma potência de 10 a outra, a escala de decibéis assinala uma mudança linear, mais fácil de acompanhar.



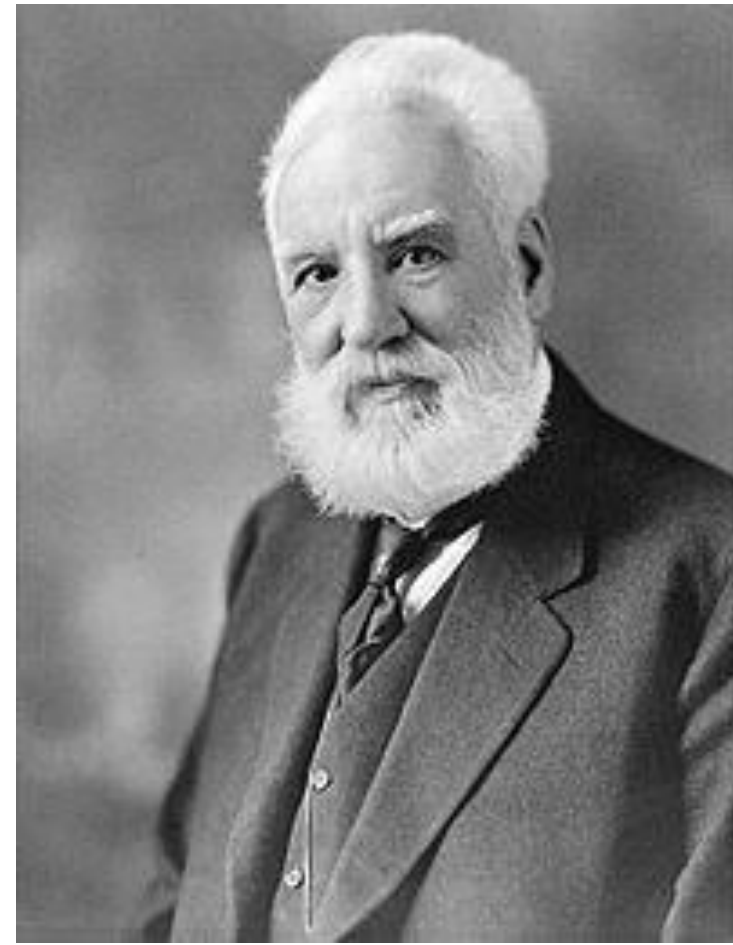
Decibel e Escala Logarítmica

Decibel é a razão logarítmica entre duas potências ou intensidades e é dado pela expressão:

$$P_{dB} = 10 \times \log_{10} (P_x/P_y)$$

ou

$$I_{dB} = 10 \times \log_{10} (I_x/I_y)$$



Alexander Graham Bell (1847 — 1922).

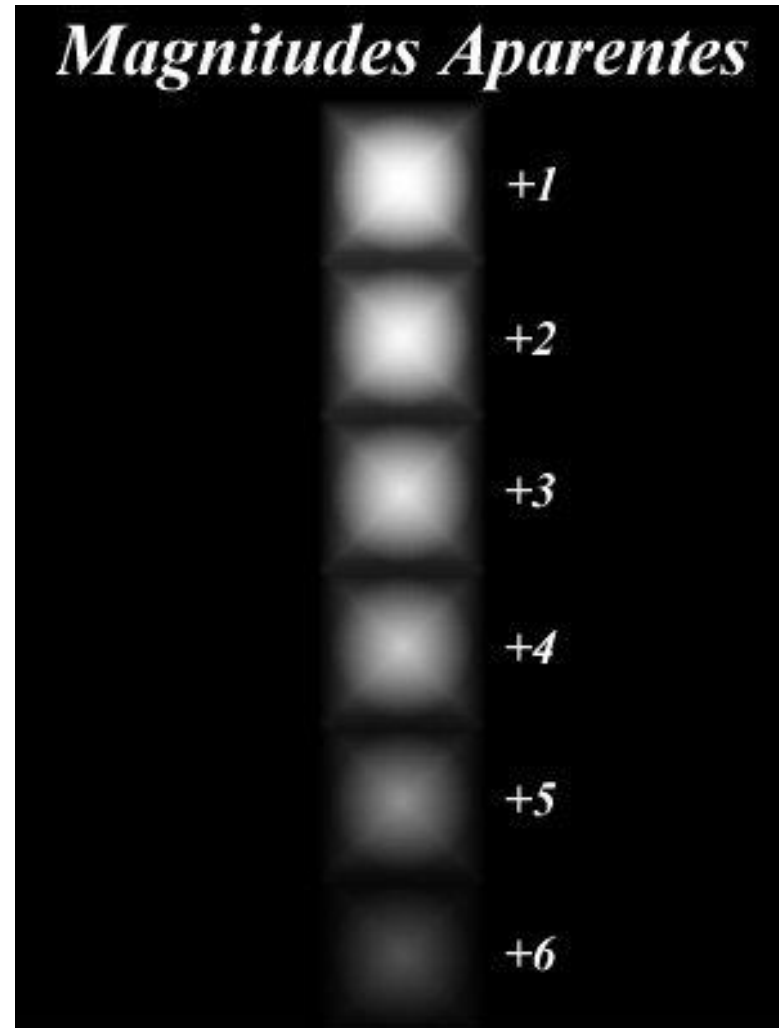
Magnitude aparente das estrelas

Magnitude aparente é uma escala para comparação do brilho das estrelas desenvolvida pelo astrônomo grego Hiparco há mais de 2000 anos.



Hiparco (190-120 aC)

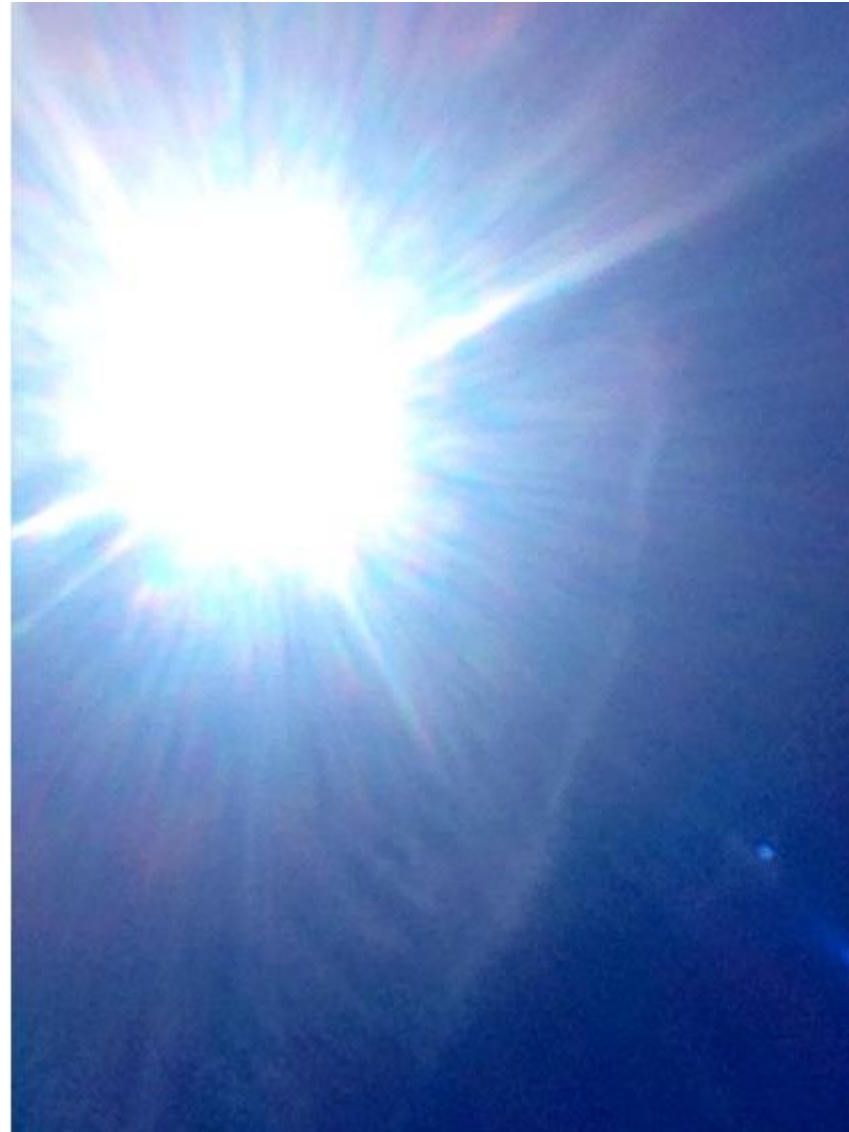
Ele alocou às estrelas mais brilhantes do céu uma magnitude $m=1$, às um pouco menos brilhantes do que as primeiras uma magnitude $m=2$, e assim por diante, até que todas as estrelas visíveis por ele tivessem valores de magnitude de 1 a 6, sendo este último valor atribuído às estrelas menos brilhantes do céu.



Magnitude aparente das estrelas

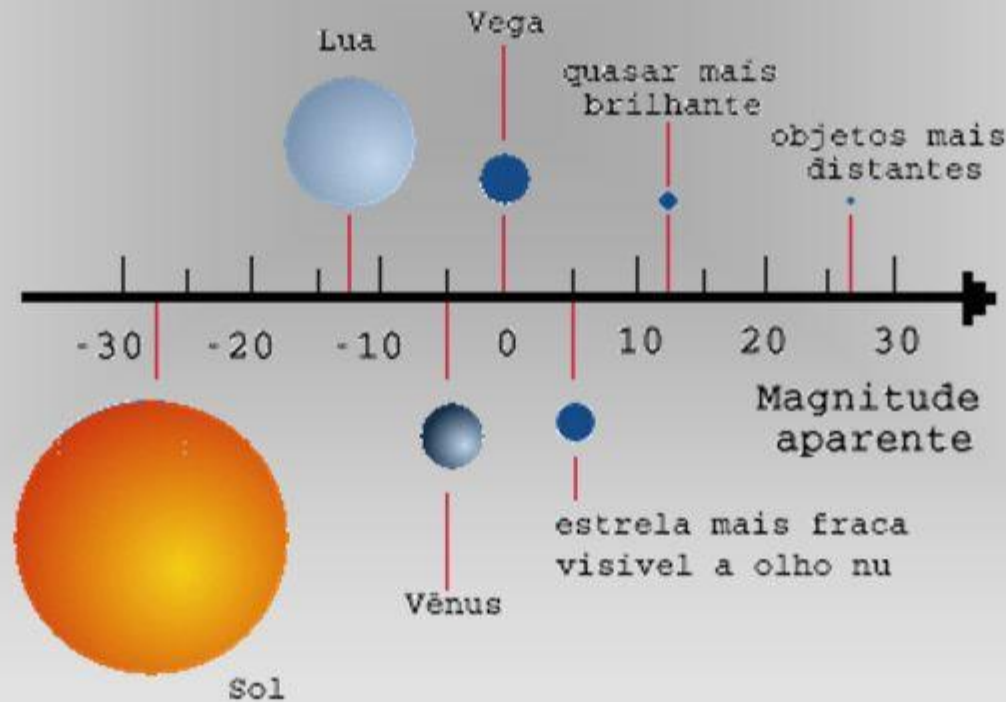
Portanto, o sistema de magnitude é baseado no quanto brilhantes são as estrelas a olho nu.

Posteriormente a escala de Hiparco foi estendida para magnitudes além de 6 e abaixo de 1, inclusive negativas.



Magnitude Aparente

Magnitude de um astro obtida através da observação, independentemente de seu fluxo radiante intrínseco. Exprime o brilho aparente.



Magnitude aparente das estrelas

Hoje em dia a diferença entre as magnitudes das estrelas se expressa com logaritmos:

$$(m_i - m_j) = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{F_i}{F_j} \right)$$



Hiparco (190-120 aC)

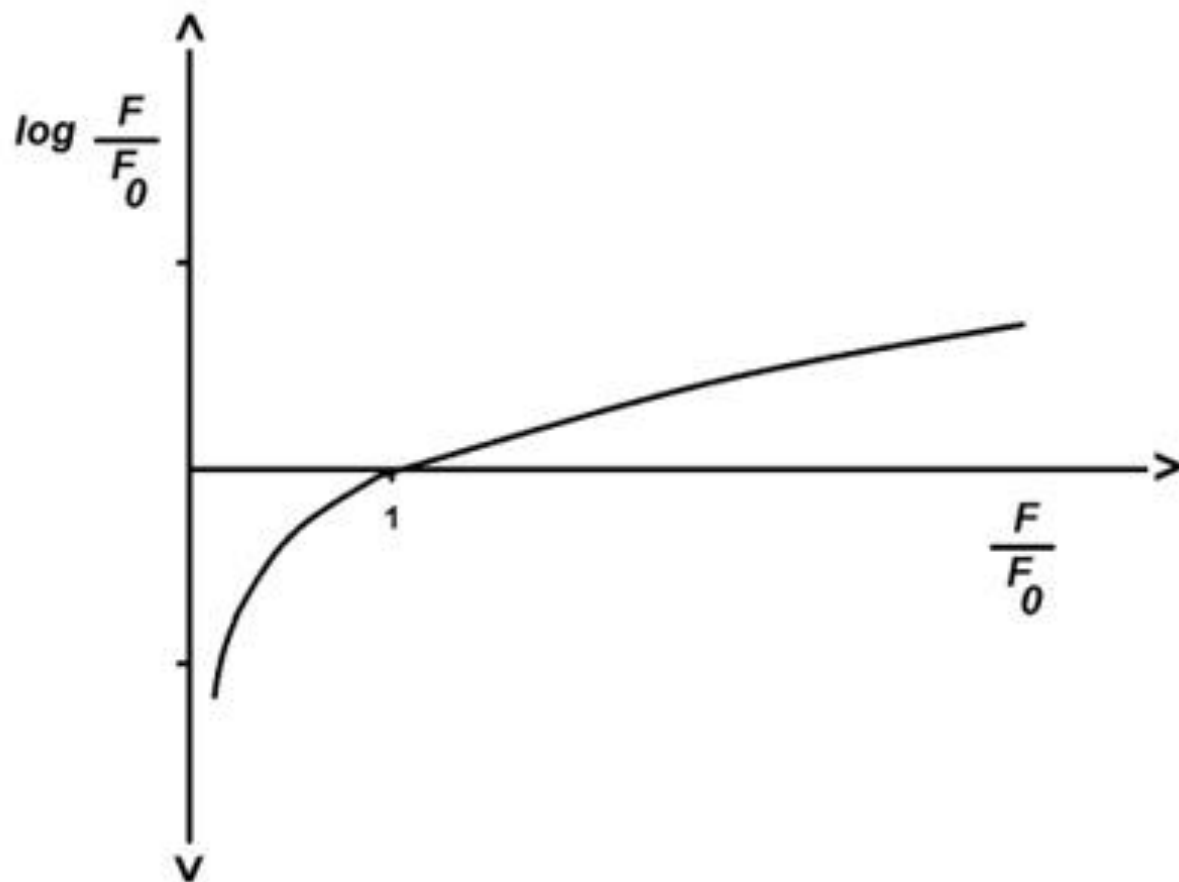


Figura 1 - O logaritmo do fluxo da luz estelar F , função que cresce suavemente conforme F aumenta. Hipparcos e seus seguidores adotaram implicitamente esta forma ao definir um intervalo (escala) de magnitudes visíveis, posteriormente matematicamente esgrimida na Eq. (1), a qual continua sendo utilizada até hoje. Quando o fluxo F resulta menor que aquele da referência F_0 , a função é negativa e a magnitude aparente m cresce numericamente.

Escala Richter

A **escala Richter**, atribui um número único para quantificar o nível de energia liberada por um terremoto.



Charles Francis Richter (1900 — 1985),
sismólogo americano.

Escala Richter

A **escala Richter**, atribui um número único para quantificar o nível de energia liberada por um terremoto.



É uma escala logarítmica, de base 10.

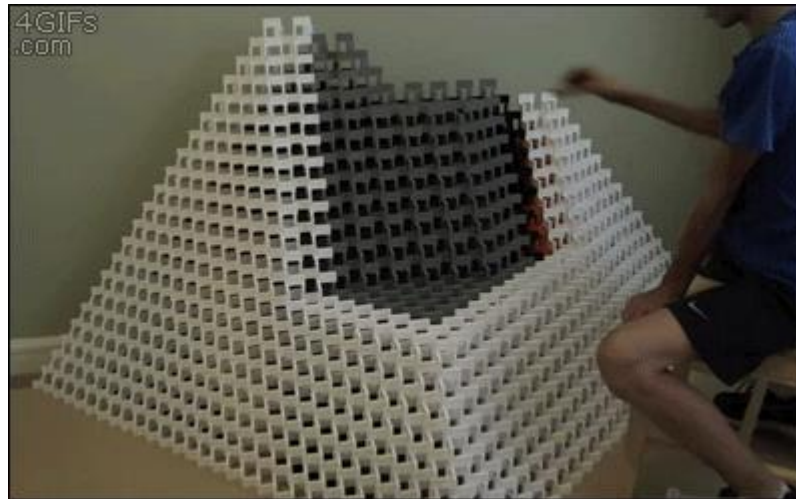
Escala Richter

O número do terremoto é obtido calculando o logaritmo da amplitude horizontal combinada (amplitude sísmica) do maior deslocamento a partir do zero em um tipo particular de sismógrafo.



Escala Richter

Pelo fato de ser um escala logarítmica, um terremoto que mede 5 na escala Richter tem uma amplitude sísmica 10 vezes maior do que uma que mede 4. Em termos de energia, um terremoto de grau 7 libera cerca de 30 vezes a energia de um sismo de grau 6.



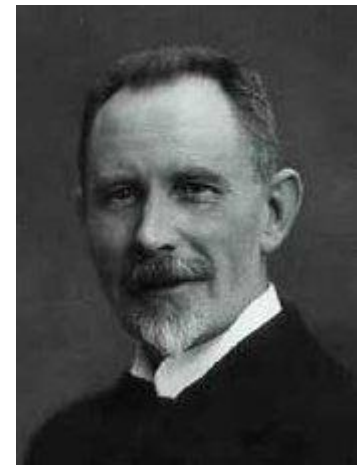
Escala de pH

pH é uma medida do **potencial hidrogeniônico** a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa.



Escala de pH

O termo **pH** foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Søren Peter Lauritz Sørensen (1868-1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas.



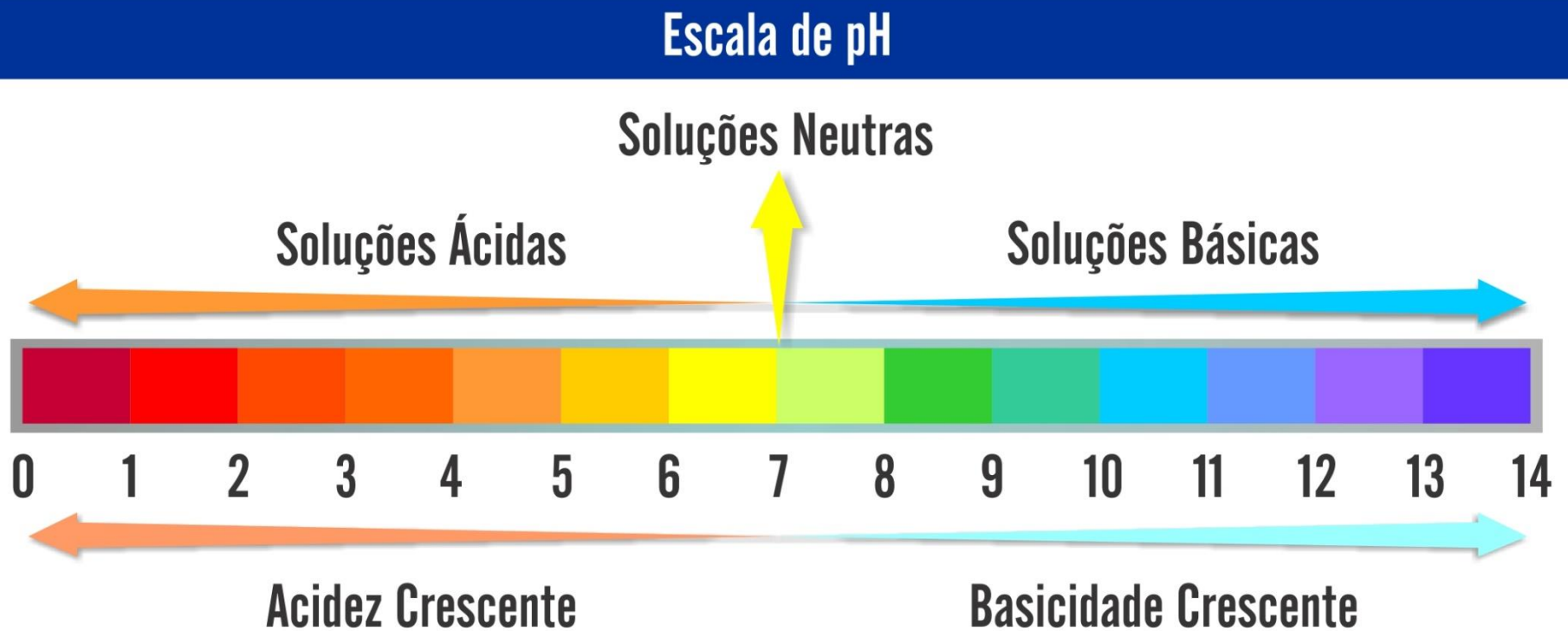
Escala de pH

O "p" vem do alemão *potenz*, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H⁺).

$$\text{pH} = -\log_{10} [a_{\text{H}^+}]$$

Escala de pH

O "p" vem do alemão *potenz*, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H^+).



Alguns valores comuns de pH

Substância	pH
Ácido de bateria	<1.0
Suco gástrico	2.0
Sumo de limão	2.4
refrigerante tipo Cola	2.5
Vinagre	2.9
Sumo de laranja ou maçã	3.5
Cerveja	4.5
Café	5.0
Chá	5.5
Chuva ácida	< 5.6
Saliva pacientes com câncer (canoro)	4.5-5.7
Leite	6.5
Água pura	7.0
Saliva humana	6.5-7.4
Sangue	7.34 - 7.45
Água do mar	8.0
Sabonete de mão	9.0 - 10.0
Amônia caseira	11.5
"Água sanitária"	12.5
Hidróxido de sódio caseiro	13.5