7 Técnicas de Integração

7.8 Integrais Impróprias

Integrais Impróprias

Nessa seção, estendemos o conceito de integral definida para o caso em que o intervalo é infinito e também para o caso onde *f* tem uma descontinuidade infinita em [*a*, *b*]. Em ambos os casos, a integral é chamada de integral *imprópria*.

Tipo 1: Intervalos Infinitos

Tipo 1: Intervalos Infinitos

Considere a região infinita S que está sob a curva $y = 1/x^2$, acima do x e à direita da reta $x = 1$. Você poderia pensar que, como S tem extensão infinita, sua área deve ser infinita, mas vamos olhar mais de perto. A área da parte de S que está à esquerda da reta $x = t$ (sombreado na Figura 1) é

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t$$

$$= 1 - \frac{1}{t}$$

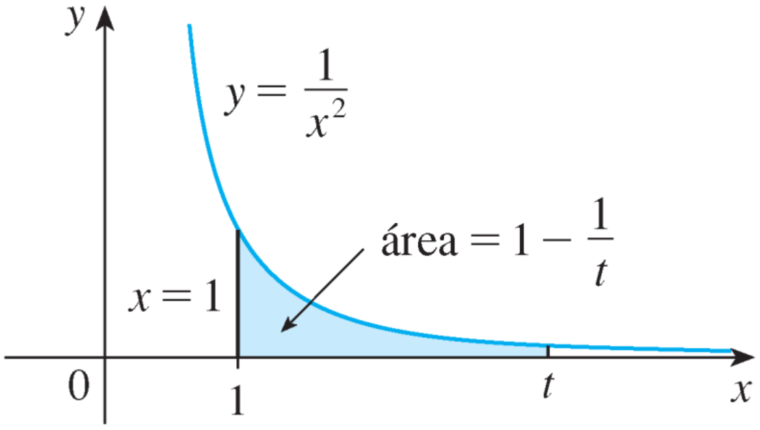

Figura 1

Tipo 1: Intervalos Infinitos

Observe que $A(t) < 1$ independentemente de quão grande t sela escolhido. Também observamos que

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

A área da região sombreada se aproxima de 1 quando $t \to \infty$ (veja a Figura 2), assim, dizemos que a área da região infinita S é igual a 1 e escrevemos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

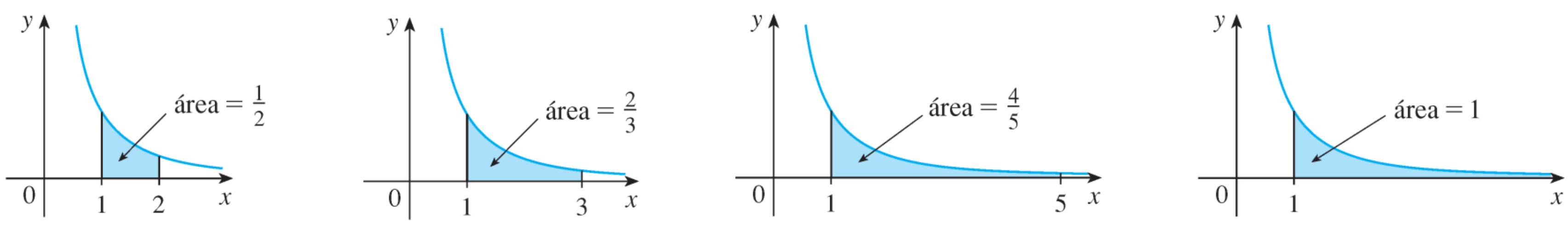

Figura 2

Tipo 1: Intervalos Infinitos

Usando esse exemplo como um guia, definimos a integral de f (não necessariamente uma função positiva) sobre um intervalo infinito como o limite das integrais sobre os intervalos finitos.

1 Definição de uma Integral Imprópria do Tipo 1

(a) Se $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para cada número $t \geqslant a$, então

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número).

(b) Se $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para cada número $t \leqslant b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número).

As integrais impróprias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ são chamadas **convergentes** se os limites correspondentes existem e **divergentes** se os limites não existem.

(c) Se ambas $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ são convergentes, então definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Na parte (c), qualquer número real a pode ser usado (veja o Exercício 76).

Tipo 1: Intervalos Infinitos

Qualquer uma das integrais impróprias na Definição 1 pode ser interpretada como uma área, desde que *f* seja uma função positiva. Por exemplo, no caso (a), se $f(x) \geq 0$ e a integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ for convergente, então definimos a área da região $S = \{(x, y) \mid x \geq a,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ na Figura 3 como

$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Isso é apropriado porque $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é o limite como $t \to \infty$ da área sob o gráfico de *f* de *a* a *t*.

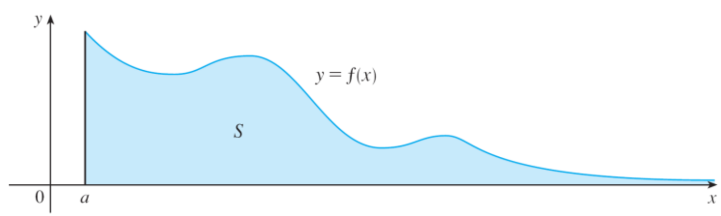

Figura 3

Exemplo 1

Determine se a integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é convergente ou divergente.

Solução: De acordo com a parte (a) da Definição 1, temos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty}\ln t = \infty$$

O limite não existe como um número finito e, assim, a integral imprópria $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é divergente.

Tipo 1: Intervalos Infinitos

Vamos comparar o resultado do Exemplo 1 com o exemplo dado no início desta seção:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge,} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge.}$$

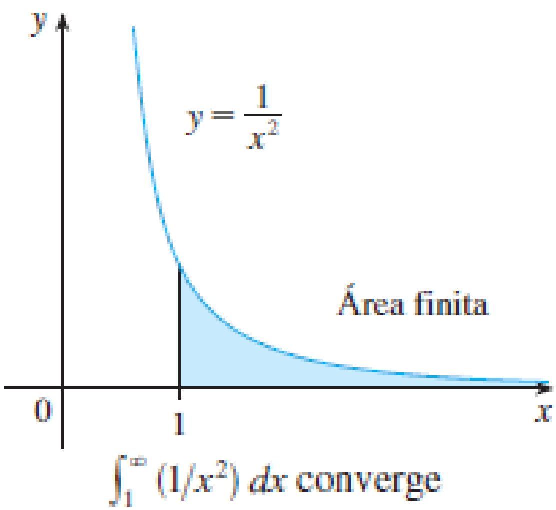

Figura 4

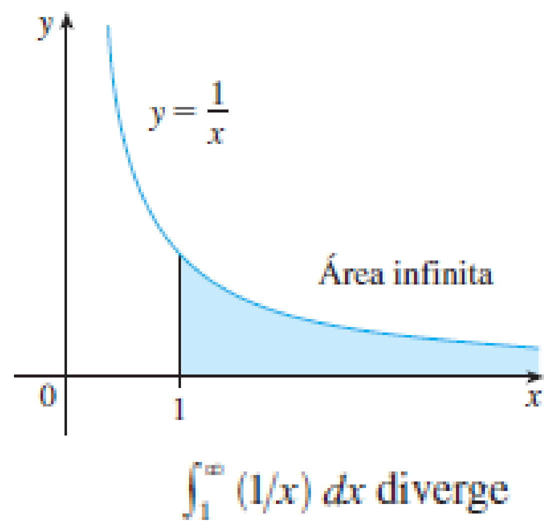

Figura 5

Tipo 1: Intervalos Infinitos

Geometricamente, isso quer dizer que, embora as curvas $y = 1/x^2$ e $y = 1/x$ pareçam muito semelhantes para $x > 0$, a região sob $y = 1/x^2$ à direita de $x = 1$ (a região sombreada na Figura 4) tem uma área finita, enquanto a região correspondente sob $y = 1/x$ (na Figura 5) tem uma área infinita. Observe que $1/x^2$ e $1/x$ se aproximam de 0 quando $x \to \infty$, mas $1/x^2$ se aproxima mais rápido de 0 que $1/x$. Os valores de $1/x$ não diminuem rápido o suficiente para que sua integral tenha um valor finito.

Resumindo, temos:

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Tipo 2: Integrados Descontínuos

Tipo 2: Integrados Descontínuos

Suponha que *f* seja uma função contínua positiva em um intervalo finito [*a*, *b*) mas tenha uma assíntota vertical em *b*. Seja *S* a região delimitada sob o gráfico de *f* e acima do eixo *x* entre *a* e *b*. (Para as integrais Tipo 1, as regiões se estendem indefinidamente em uma direção horizontal. Aqui a região é infinita em uma direção vertical.) A área da parte de *S* entre *a* e *t* (a região sombreada na Figura 7) é

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

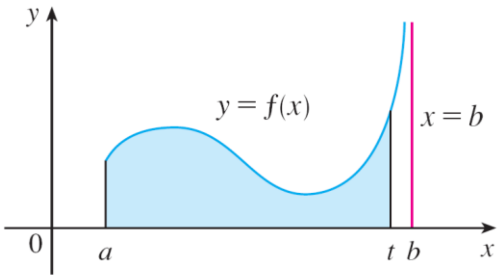

Figura 7

Tipo 2: Integrados Descontínuos

Se acontecer de $A(t)$ se aproximar de um número A quando $t \to b^-$, então dizemos que a área da região S é A e escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Usamos essa equação para definir uma integral imprópria do Tipo 2, mesmo quando f não for uma função positiva, não importando o tipo de descontinuidade que f tenha em b.

Tipo 2: Integrados Descontínuos

3 Definição de uma Integral Imprópria do Tipo 2

(a) Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

se esse limite existir (como um número).

(b) Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

se esse limite existir (como um número).

A integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamada **convergente** se o limite correspondente existir e **divergente** se o limite não existir.

(c) Se f tiver uma descontinuidade em c, onde $a < c < b$, e ambas integrais impróprias $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ forem convergentes, então definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Exemplo 5

Encontre $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx.$

Solução: Observamos primeiro que a integral dada é imprópria, porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tem a vertical assíntota $x = 2$. Como a descontinuidade infinita ocorre no extremo esquerdo de [2, 5], usamos a parte (b) da Definição 3:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

$$= \lim_{t \to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}$$

Então, a integral imprópria dada é convergente e, como o integrando é positivo, podemos interpretar o valor da integral como a área da região sombreada na Figura 10.

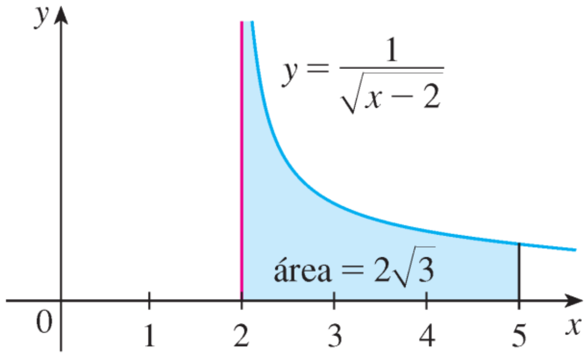

Figura 10

Um Teste de Comparação para Integrais Impróprias

Um Teste de Comparação para Integrais Impróprias

Algumas vezes é impossível encontrar o valor exato de uma integral imprópria, mas ainda assim é importante saber se ela é convergente ou divergente. Nesses casos, o teorema seguinte é útil. Apesar de afirmarmos isso para as integrais do Tipo 1, um teorema análogo é verdadeiro para as integrais do Tipo 2.

TEOREMA DE COMPARAÇÃO Suponha que f e g sejam funções contínuas com $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

(a) Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

(b) Se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é divergente.

Um Teste de Comparação para Integrais Impróprias

Omitiremos a demonstração do Teorema da Comparação, mas a Figura 12 o faz parecer plausível.

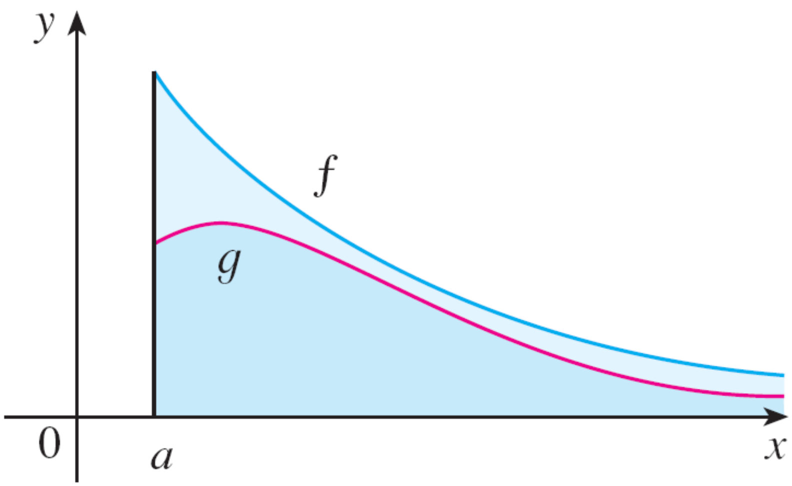

Figura 12

Se a área sob a curva superior $y = f(x)$ for finita, então a área sob a curva inferior $y = g(x)$ também o é.

Um Teste de Comparação para Integrais Impróprias

E se a área sob $y = g(x)$ for infinita, então a área sob $y = f(x)$. [Observe que a recíproca não é necessariamente verdadeira: se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ for convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ pode ou não pode ser convergente, e se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ for divergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ pode ou não ser divergente.]

Exemplo 9

Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ é convergente.

Solução: Não podemos calcular a integral diretamente porque a primitiva de e^{-x^2} não é uma função elementar.

Escrevemos

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

e observamos que a primeira integral do lado direito é apenas uma integral definida ordinária.

Exemplo 9 – *Solução*

continuação

Na segunda integral, usamos o fato de que para $x \geq 1$ temos $x^2 \geq x$, assim $-x^2 \leq -x$ e, portanto, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. (Veja a Figura 13.) A integral de e^{-x} é calculada facilmente:

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

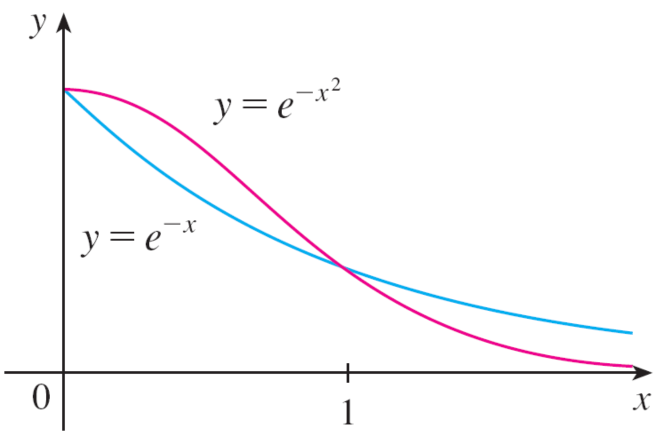

Figura 13

Exemplo 9 – *Solução*

continuação

Então, tomando $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = e^{-x^2}$ no Teorema de Comparação, vemos que $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ é convergente. Segue que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ é convergente.