7 Técnicas de Integração

7.3 Substituição Trigonométrica

Substituição Trigonométrica

Para encontrar a área de um círculo ou uma elipse, uma integral da forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ aparece, onde $a > 0$. Se ela fosse $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, a substituição $u = a^2 - x^2$ poderia ser eficaz, mas, como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ mais difícil. Se mudarmos a variável de x para θ pela substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$, então a identidade $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2 \theta$ permite que nos livremos da raiz, porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\,|\cos\theta|$$

Substituição Trigonométrica

Observe a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual a nova variável é uma função da antiga) e a substituição $x = a \operatorname{sen}\theta$ (a variável antiga é uma função da nova).

Em geral, podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$, usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificarmos nossos cálculos, presumimos que g tenha uma função inversa, isto é, g é injetora. Nesse caso, se substituirmos u por x e x por t na Regra de Substituição, obteremos

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Substituição Trigonométrica

Esse tipo de substituição é chamado de *substituição inversa*.

Podemos fazer a substituição inversa $x = a \text{ sen } \theta$ desde que esta defina uma função injetora. Isso pode ser conseguido pela restrição de θ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Substituição Trigonométrica

Na tabela a seguir listamos as substituições trigonométricas que são eficazes para as expressões radicais dadas em razão de certas identidades trigonométricas.

Tabela de Substituições Trigonométricas

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \operatorname{tg}^2\theta$

Em cada caso, a restrição de θ é imposta para assegurar que a função que define a substituição seja injetora.

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx.$

Solução: Seja $x = 3 \text{ sen } \theta$, onde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Então $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$ e

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \text{ sen}^2\theta} = \sqrt{9 \cos^2\theta} = 3\,|\cos \theta| = 3 \cos \theta$$

(Observe que $\cos \theta \geq 0$ porque $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.)

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Assim, a Regra de Substituição Inversa fornece

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx = \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2\theta} 3 \cos \theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} d\theta = \int \operatorname{cotg}^2\theta \, d\theta$$

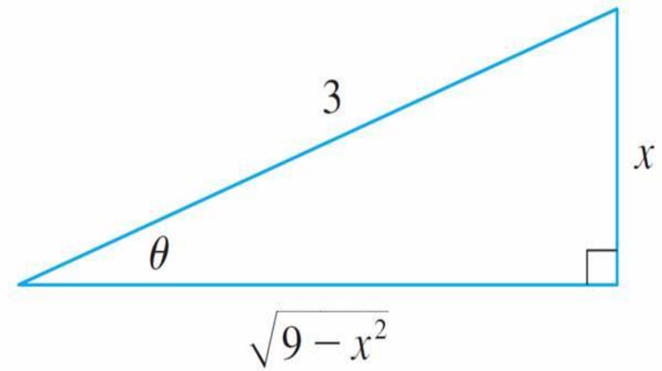
$$= \int (\operatorname{cossec}^2 \theta - 1) d\theta$$

$$= -\operatorname{cotg} \theta - \theta + C.$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Como esta é uma integral indefinida, devemos retornar à variável original x. Isso pode ser feito usando identidades trigonométricas para expressar cotg θ em termos de sen $\theta = x/3$ ou desenhando um diagrama, como mostrado na Figura 1, onde θ é interpretado como um um ângulo de um triângulo retângulo.



sen $\theta = \dfrac{x}{3}$

Figura 1

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Como sen $\theta = x/3$, marcamos o lado oposto e a hipotenusa como tendo comprimentos x e 3. Pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento do lado adjacente $\sqrt{9 - x^2}$, assim podemor ler simplesmente o valor de cotg θ a da figura:

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

(Embora $\theta > 0$ no diagrama, essa expressão para cotg θ é válida quando $\theta < 0$.) Como sen $\theta = x/3$, temos $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/3)$, logo

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

Exemplo 2

Encontre a área delimitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

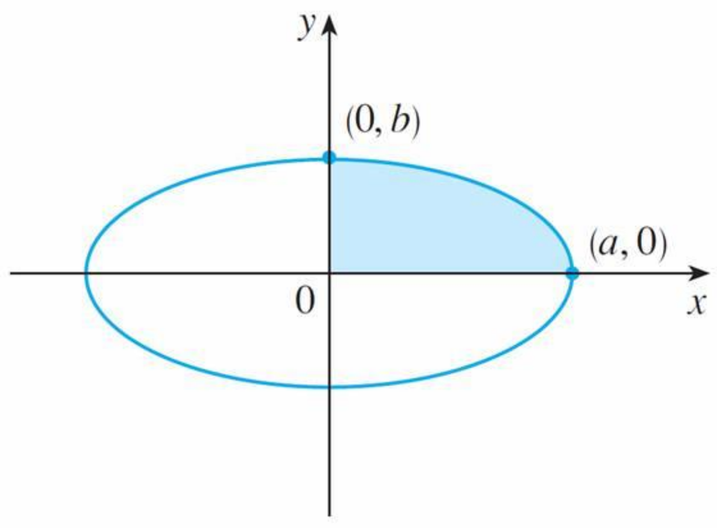
Solução: Isolando *y* na equação da elipse, temos

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \qquad \text{ou} \qquad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Como a elipse é simétrica em relação a ambos os eixos, a área total A é quatro vezes a área do primeiro quadrante (veja a Figura 2).



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Figura 2

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

A parte da elipse no primeiro quadrante é dada pela função

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

e, assim,

$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Para calcularmos essa integral, substituímos $x = a \operatorname{sen} \theta$. Então $dx = a \cos \theta \, d\theta$.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Para mudarmos os limites de integração, notamos que quando $x = 0$, sen $\theta = 0$, logo $\theta = 0$; quando $x = a$, sen $\theta = 1$, assim, $\theta = \pi/2$. Além disso

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos\theta| = a\cos\theta$$

Já que $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Portanto,

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2ab\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi ab$$

Mostramos que a área de uma elipse com semieixos *a* e *b* é πab. Em particular, considerando $a = b = r$, demonstramos a famosa fórmula que diz que a área de um círculo de raio *r* é πr^2.

Substituição Trigonométrica

OBSERVAÇÃO Como a integral no Exemplo 2 era uma integral definida, mudamos os limites da integração e não tivemos que converter de volta à variável x original.

Exemplo 3

Encontre $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx.$

Solução: Se $x = 2 \operatorname{tg} \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Então $dx = 2 \sec^2\theta \, d\theta$ e

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4(\operatorname{tg}^2\theta+1)} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2|\sec\theta| = 2\sec\theta$$

Assim, temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{4\operatorname{tg}^2\theta \cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Para calcularmos essa integral trigonométrica, colocamos tudo em termos de sen θ e cos θ:

$$\frac{\sec \theta}{\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Portanto, fazendo a substituição u = sen θ, temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4 \operatorname{sen} \theta} + C$$

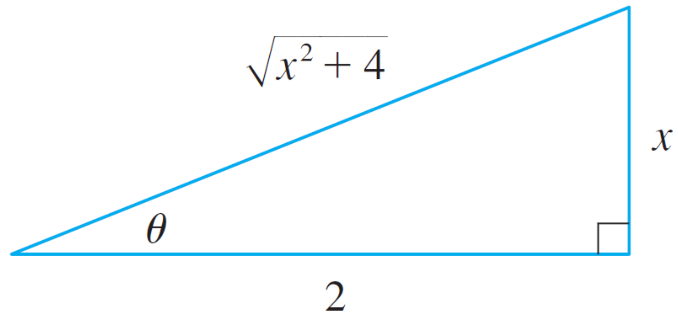
$$= -\frac{\operatorname{cossec} \theta}{4} + C$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Usamos a Figura 3 para determinar que cossec $\theta = \sqrt{x^2 + 4}/x$ e, assim,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C$$



$$\operatorname{tg}\,\theta = \frac{x}{2}$$

Figura 3

Exemplo 5

Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, onde $a > 0$.

Solução 1: Seja $x = a \sec \theta$, onde $0 < \theta < \pi/2$ ou $\pi < \theta < 3\pi/2$. Então $dx = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$ e

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2\theta} = a\,|\operatorname{tg} \theta| = a \operatorname{tg} \theta$$

Portanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec \theta \, \operatorname{tg} \theta}{a \operatorname{tg} \theta} \, d\theta = \int \sec \theta \, d\theta = \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C$$

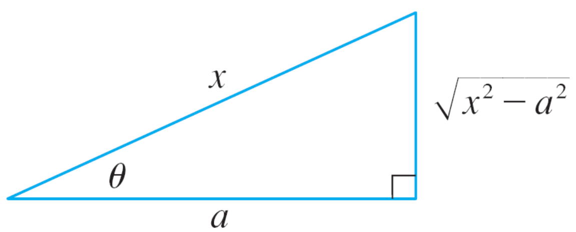
Exemplo 5 – *Solução* 1

continuação

O triângulo da Figura 4 mostra que tg $\theta = \sqrt{x^2 - a^2}/a$, de modo que, temos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C$$

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| - \ln a + C$$



$$\sec \theta = \frac{x}{a}$$

Figura 4

Exemplo 5 – *Solução* 1

continuação

Escrevendo $C_1 = C - \ln a$, temos

$$\boxed{1} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C_1$$

Exemplo 5 – *Solução 2*

continuação

Para $x > 0$, a substituição hiperbólica $x = a \cosh t$ também pode ser usada. Usando a identidade $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, temos

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \operatorname{senh}^2 t} = a \operatorname{senh} t$$

Como $dx = a \operatorname{senh} t\, dt$, obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \operatorname{senh} t\, dt}{a \operatorname{senh} t} = \int dt = t + C$$

Exemplo 5 – *Solução* 2

continuação

Como cosh $t = x/a$, temos $t = \cosh^{-1}(x/a)$ e

$$\boxed{2} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Substituição Trigonométrica

OBSERVAÇÃO Como o Exemplo 5 ilustra, as substituições hiperbólicas podem ser utilizadas no lugar das substituições trigonométricas e elas, às vezes, nos levam a respostas mais simples. Mas geralmente usamos substituições trigonométricas, porque as identidades trigonométricas são mais familiares que as identidades hiperbólicas.

Exemplo 6

Encontre $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx$.

Solução: Primeiro observamos que $(4x^2 + 9)^{3/2} = (\sqrt{4x^2+9})^3$ portanto, a substituição trigonométrica é apropriada. Embora $\sqrt{4x^2+9}$ não seja exatamente uma expressão da tabela de substituições trigonométricas, ela se torna parte delas quando fazemos a substituição preliminar $u = 2x$.

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Quando combinamos esta com a substituição da tangente, temos $x = \frac{3}{2}\tan\theta$, que resulta em $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ e

$$\sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{9\,\text{tg}^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Quando $x = 0$, tg $\theta = 0$, assim $\theta = 0$; quando $x = 3\sqrt{3}/2$, tg $\theta = \sqrt{3}$, logo $\theta = \pi/3$. Portanto,

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\,\text{tg}^3\theta}{27\sec^3\theta}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\text{tg}^3\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Agora substituímos $u = \cos\theta$, de forma que $du = -\text{sen}\,\theta\, d\theta$. Quando $\theta = 0$, $u = 1$; quando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx = -\frac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{u^2}\,du$$

$$= \frac{3}{16}\int_1^{1/2} (1-u^{-2})\,du = \frac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2}$$

$$= \frac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2}+2\right) - (1+1)\right] = \frac{3}{32}$$