

7

Técnicas de Integração

7.1

Integração por Partes

Integração por Partes

Cada regra de derivação tem outra correspondente de integração. Por exemplo, a Regra de Substituição para a integração corresponde à Regra da Cadeia para a derivação. Aquela que corresponde à Regra do Produto para a derivação é chamada *integração por partes*.

A Regra do Produto afirma que se f e g forem funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Integração por Partes

Na notação para integrais indefinidas, essa equação se torna

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)] dx = f(x)g(x)$$

ou

$$\int f(x)g'(x) dx + \int g(x)f'(x) dx = f(x)g(x)$$

Podemos rearranjar essa equação como

1

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx$$

A fórmula 1 é chamada **fórmula para integração por partes**.

Integração por Partes

Talvez seja mais fácil lembrar na seguinte notação. Seja $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então as diferenciais são $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e, assim, pela Regra da Substituição, a fórmula para a integração por partes torna-se

2

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Exemplo 1

Encontre $\int x \sen x \, dx$.

Solução Usando a Fórmula 1: Suponha que escolhamos $f(x) = x$ e $g'(x) = \sen x$. Então $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. (Para g podemos escolher qualquer antiderivada de g' .) Assim, utilizando a Fórmula 1, temos

$$\begin{aligned}\int x \sen x \, dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) \, dx \\ &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sen x + C.\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

continuação

É aconselhável verificar a resposta derivando-a. Se fizermos isso, obteremos $x \operatorname{sen} x$, como esperado.

Solução Usando a Fórmula 2: Sejam

$$u = x, \quad dv = \operatorname{sen} x \, dx.$$

Então,
$$du = dx, \quad v = -\operatorname{cos} x,$$

Exemplo 1 – Solução

continuação

de modo que

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \int \overbrace{x}^u \overbrace{\operatorname{sen} x \, dx}^{dv} = \overbrace{x}^u \overbrace{(-\cos x)}^v - \int \overbrace{(-\cos x)}^u \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Integração por Partes

Se combinarmos a fórmula de integração por partes com a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, poderemos calcular integrais definidas por partes. Calculando ambos os lados da Fórmula 1 entre a e b , supondo que f' e g' contínuas, e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

6

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx$$