6

Aplicações de Integração

6.3

Volumes por Cascas Cilíndricas

Volumes por Cascas Cilíndricas

Vamos considerar o problema de encontrar o volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo *y* da região delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$. (Veja a Figura 1.)

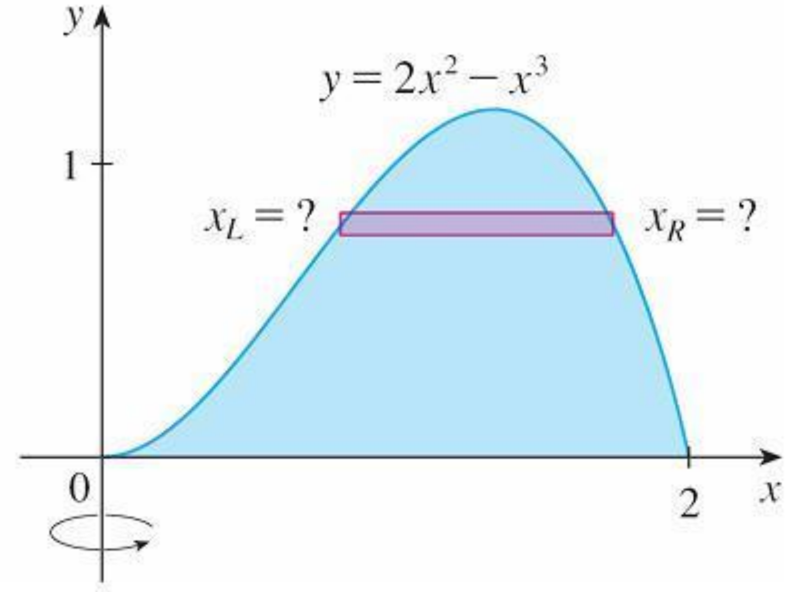

Figura 1

Se a fatiarmos perpendicularmente ao eixo *y*, obteremos uma arruela.

Volumes por Cascas Cilíndricas

No entanto, para calcularmos os raios interno e externo da arruela, teríamos de resolver a equação cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para x em termos de y, o que não é fácil.

Felizmente, existe um método chamado **método das cascas cilíndricas**, que é mais fácil de usar em casos como esse. A Figura 2 mostra uma casca cilíndrica com raio interno r_1, raio externo r_2, e altura h.

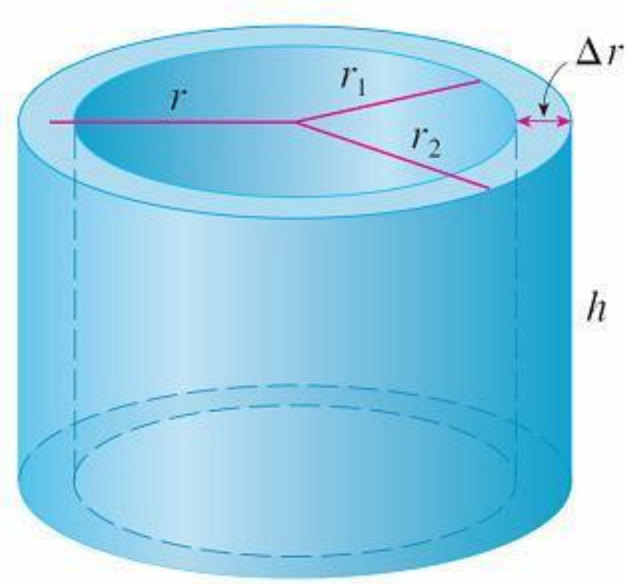

Figura 2

Volumes por Cascas Cilíndricas

Seu volume V é calculado subtraindo o volume V_1 do cilindro interno a partir do volume V_2 do cilindro externo:

$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$

$$= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1).$$

Volumes por Cascas Cilíndricas

Se fizermos $\Delta r = r_2 - r_1$ (a espessura da casca) e $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (o raio médio da casca), então a fórmula para o volume de uma casca cilíndrica se torna

1

$$\boxed{V = 2\pi rh\,\Delta r}$$

e pode ser memorizada como

V = [circunferência] [altura] [espessura].

Volumes por Cascas Cilíndricas

Agora, considere S o sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = f(x)$ [onde $f(x) \geq 0$], $y = 0$, $x = a$ e $x = b$, onde $b > a \geq 0$. (Veja a Figura 3.)

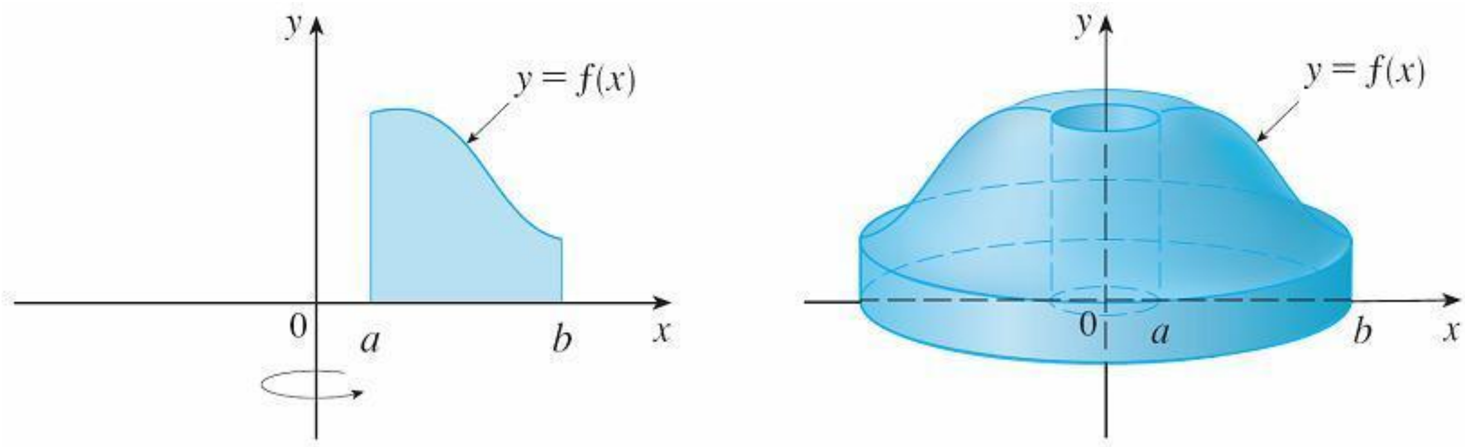

Figura 3

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ da mesma largura Δx e consideramos $\bar{x}_i$ o ponto médio do i-ésimo subintervalo.

Volumes por Cascas Cilíndricas

Se o retângulo com base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(\bar{x}_i)$ é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica com raio médio $\bar{x}_i$, altura $f(\bar{x}_i)$, e espessura Δx (veja a Figura 4), assim, pela Fórmula 1 seu volume é

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$

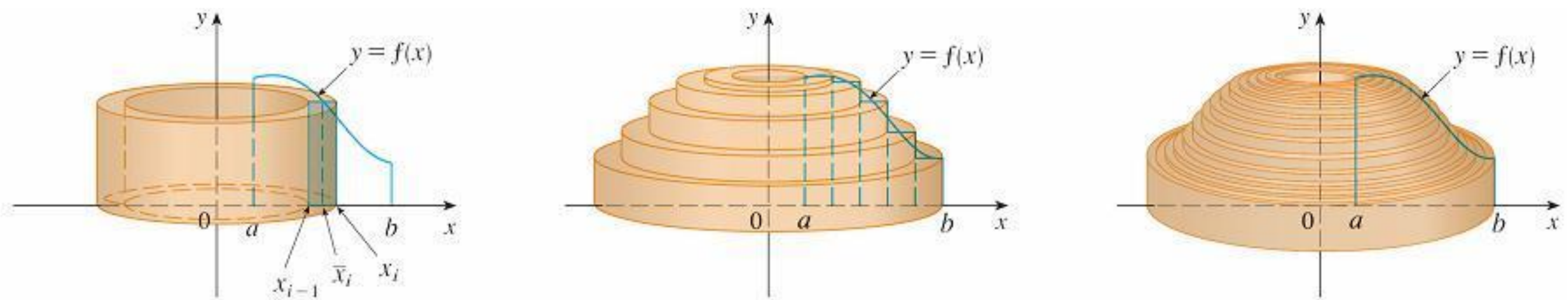

Figura 4

Volumes por Cascas Cilíndricas

Portanto, uma aproximação para o volume *V* de *S* é dada pela soma dos volumes dessas cascas:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor quando $n \to \infty$. Mas, pela definição de uma integral, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Volumes por Cascas Cilíndricas

Então, a seguinte definição parece plausível:

$\boxed{2}$ O volume do sólido na Figura 3, obtido pela rotação em torno do eixo y da região sob a curva $y = f(x)$ de a até b, é

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx, \qquad \text{onde } 0 \leq a < b\,.$$

Volumes por Cascas Cilíndricas

A melhor maneira para se lembrar da Fórmula 2 é pensar em uma casca típica, cortada e achatada como na Figura 5, com raio x, circunferência $2\pi x$, altura $f(x)$, e espessura Δx ou dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferência}} \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espessura}}$$

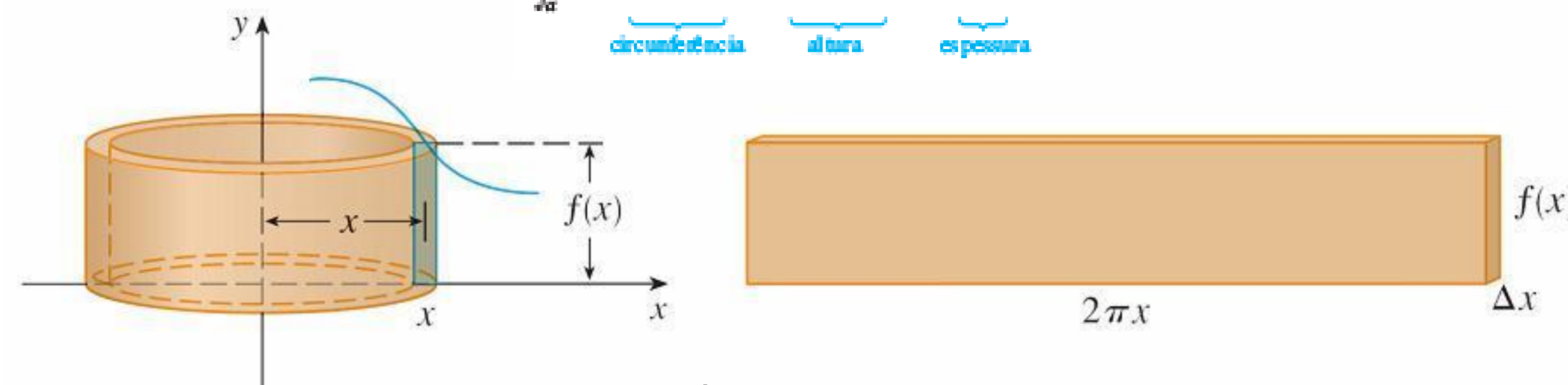

Figura 5

Esse tipo de argumento será útil em outras situações, tais como quando giramos em torno de outras retas além do eixo y.

Exemplo 1

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.

Solução: Do esboço da Figura 6, vemos que uma casca típica tem raio x, circunferência $2\pi x$ e altura $f(x) = 2x^2 - x^3$.

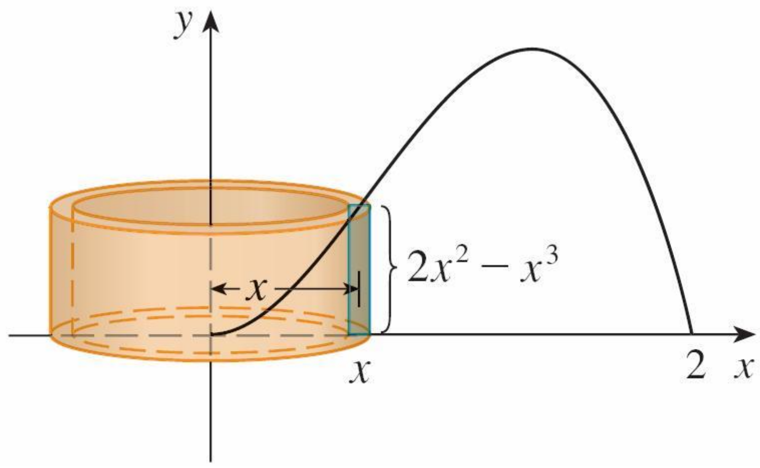

Figura 6

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Então, pelo método das cascas, o volume é

$$V = \int_0^2 \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferência}} \underbrace{(2x^2 - x^3)}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espessura}} = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\, dx$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

Pode-se verificar que o método das cascas fornece a mesma resposta que o método das fatias.

Discos e Anéis Versus Cascas Cilíndricas

Ao calcular o volume de um sólido de revolução, como sabemos se usamos o método dos discos (ou anel) ou das cascas cilíndricas? Existem várias considerações a serem levadas em conta: a região é mais facilmente descrita por curvas fronteira em cima e em baixo da forma $y = f(x)$ ou por fronteiras à esquerda e à direita da forma $x = t(x)$? Com qual escolha é mais fácil trabalhar? Os limites de integração são mais fáceis de encontrar para uma variável do que para a outra? A região requer o uso de duas integrais separadas ao usar x como variável, mas apenas uma integral em y? Somos capazes de calcular a integral que encontramos com nossa escolha de variável?

Discos e Anéis Versus Cascas Cilíndricas

Se decidirmos que é mais fácil trabalhar com uma variável do que com a outra, então isso determina qual método usar. Desenhe um retângulo amostral na região, correspondendo a uma seção transversal do sólido. A espessura do retângulo, ou x ou y, corresponde à variável de integração. Se você imaginar o retângulo girando, ele se torna um disco (anel) ou uma casca.