6

Aplicações de Integração

6.2 Volumes

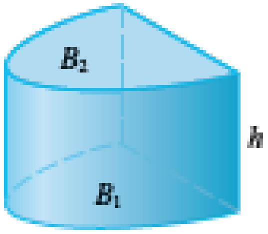
Volumes

Na tentativa de encontrar o volume de um sólido, nos deparamos com o mesmo tipo de problema que para calcular áreas. Temos uma ideia intuitiva do significado de volume, mas devemos torná-la precisa usando o cálculo para chegar à definição exata de volume.

Volumes

Começamos com um tipo simples de sólido chamado **cilindro** (ou, mais precisamente, um *cilindro reto*).

Como ilustrado na Figura 1(a), um cilindro é delimitado por uma região plana B_1, denominada **base**, e uma região congruente B_2 em um plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que unem B_1 a B_2.



(a) Cilindro $V = Ah$

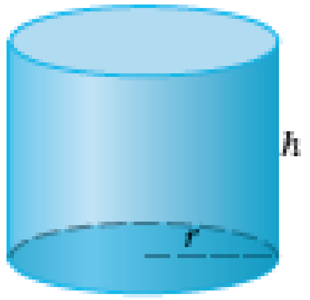
Figura 1(a)

Se a área da base é A e a altura do cilindro (distância de B_1 a B_2) é h, então, o volume V do cilindro é definido como

$$V = Ah$$

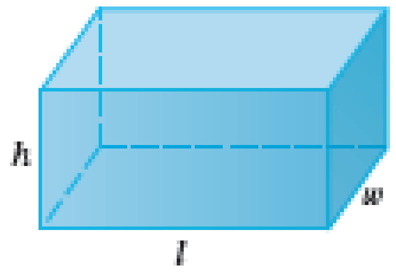
Volumes

Em particular, se a base é um círculo com raio *r*, então o cilindro é um cilindro circular com o volume $V = \pi r^2 h$ [veja a Figura 1(b)], e se a base é um retângulo com comprimento *l* e largura *w*, então o cilindro é uma caixa retangular (também chamado *paralelepípedo retangular*) com o volume $V = lwh$ [veja a Figura 1(c)].



(b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$

Figura 1(b)



(c) Caixa retangular $V = lwh$

Figura 1(c)

Volumes

Para um sólido *S* que não é um cilindro, nós primeiro "cortamos" *S* em pedaços e aproximamos cada parte por um cilindro. Estimamos o volume de *S* adicionando os volumes dos cilindros. Chegamos ao volume exato de *S* através de um processo de limite em que o número de peças torna-se grande.

Começamos interceptando *S* com um plano e a obtendo uma região plana que é chamada **secção transversal** de *S*.

Volumes

Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde $a \leq x \leq b$. (Veja a Figura 2. Pense em fatiar S com uma faca passando por x e calcule a área de uma fatia.) A área da secção transversal $A(x)$ irá variar quando x aumenta de a até b.

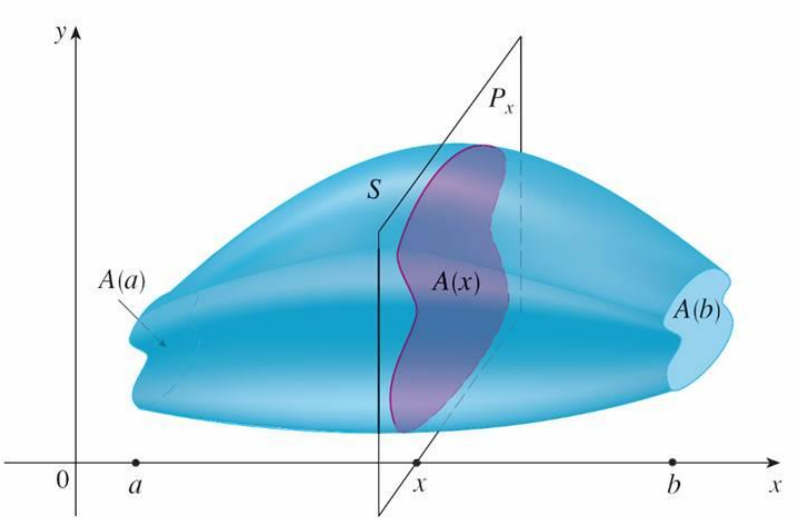


Figura 2

Volumes

Vamos dividir S em n “fatias” de larguras iguais Δx usando os planos P_{x_1}, P_{x_2}, . . . para fatiar o sólido. (Pense em fatiar um pedaço de pão.) Se escolhermos pontos amostrais x_i* em $[x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i-ésima fatia S_i (a parte de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i}) a um cilindro com área de base $A(x_i*)$ e “altura” Δx. (Veja a Figura 3.)

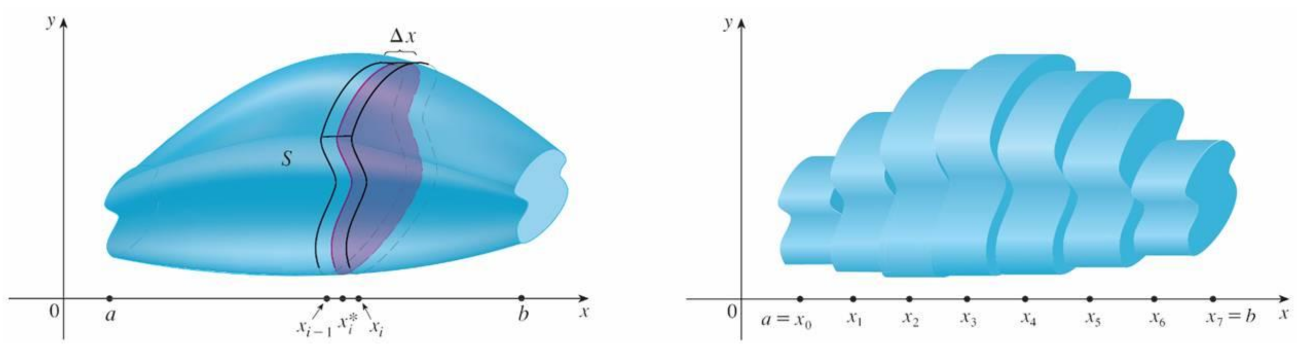


Figura 3

Volumes

O volume desse cilindro é $A(x_i{*})\ \Delta x$, assim uma aproximação para a nossa concepção intuitiva de volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\ \Delta x.$$

Adicionando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\ \Delta x$$

Volumes

Esta aproximação parece quando $n \to \infty$. (Pense nas fatias tornando-se cada vez mais finas.) Portanto, *definimos* o volume como o limite dessas somas quando $n \to \infty$. Mas reconhecemos o limite da soma de Riemann como uma integral definida, e dessa forma temos a seguinte definição.

Definição de volume Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*) \, \Delta x = \int_a^b A(x) \, dx.$$

Volumes

Quando usamos a fórmula de volume $V = \int_a^b A(x)\,dx$, é importante lembrar que *A*(*x*) é a área de uma secção transversal móvel, obtida fatiando em *x* perpendicularmente ao eixo *x*.

Observe que, para um cilindro, a área da secção transversal é constante: *A*(*x*) = *A* para todo *x*. Então, nossa definição de volume resulta em $V = \int_a^b A\,dx = A(b - a)$; isso coincide com a fórmula *V* = *Ah*.

Exemplo 1

Mostre que o volume de uma esfera de raio *r* é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Solução: Se colocarmos a esfera de maneira que o seu centro se encontre na origem então o plano P_x intercepta a esfera em um círculo cujo raio (Teorema de Pitágoras) é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

(Veja a Figura 4.)

Portanto, a área da secção transversal é

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

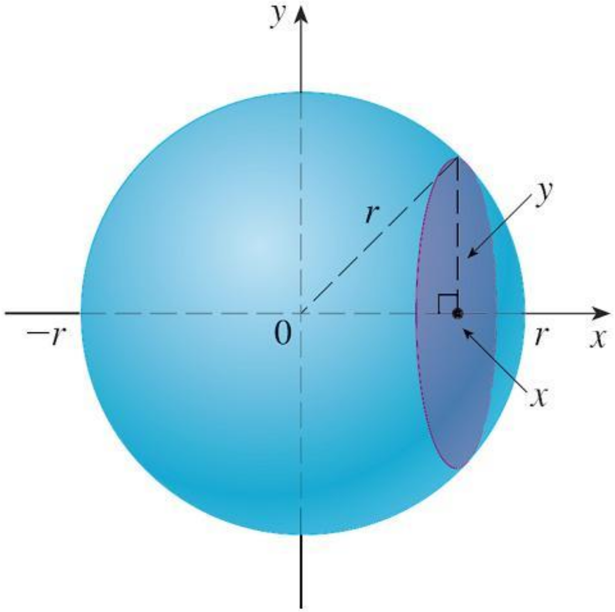


Figura 4

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Usando a definição de volume com *a* = –*r* e *b* = *r*, temos

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$$

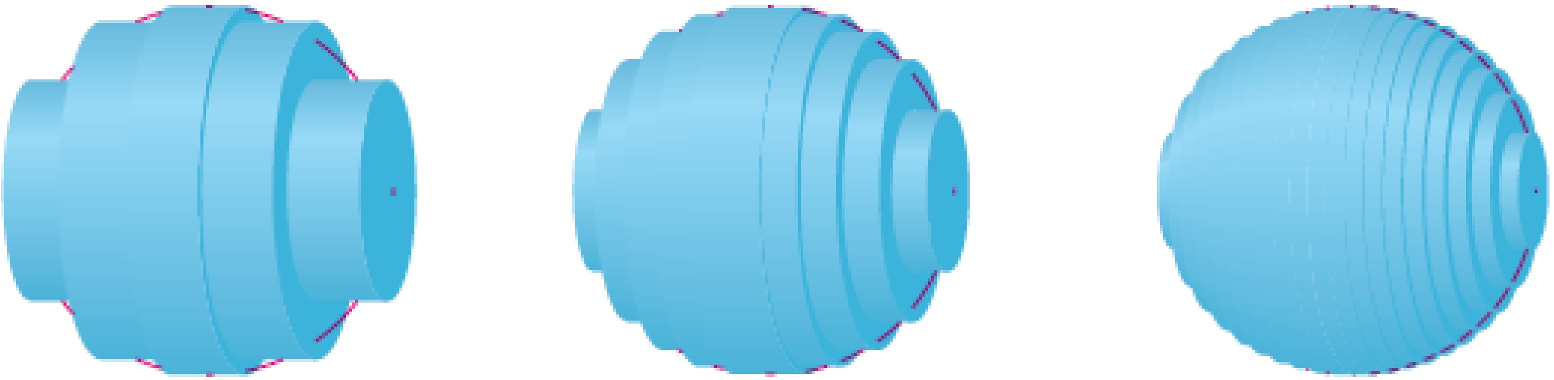
$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(O integrando é par.)}$$

$$= 2\pi \left[r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right)$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Volumes

A Figura 5 ilustra a definição de volume quando o sólido é uma esfera com raio r = 1. Pelo resultado do Exemplo 1, sabemos que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi$, que é aproximadamente 4,18879.



(a) Usando 5 discos, $V \approx 4{,}2726$ (b) Usando 10 discos, $V \approx 4{,}2097$ (c) Usando 20 discos, $V \approx 4{,}1940$

Figura 5

Aproximando o volume de uma esfera com raio 1

Volumes

Aqui as fatias são cilindros circulares, ou *discos*, e as três partes da Figura 5 mostram as interpretações geométricas das somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\overline{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \overline{x}_i^2)\,\Delta x$$

quando n = 5, 10 e 20 se escolhermos os pontos amostrais x_i* como os pontos médios $\overline{x}_i$. Observe que à medida que aumentamos o número de cilindros de aproximantes, a soma de Riemann correspondente se torna mais próxima do volume verdadeiro.

Volumes

Os sólidos são todos chamados de **sólidos de revolução** porque são obtidos pela rotação de uma região em torno de um eixo. Em geral, calculamos o volume de um sólido de revolução usando a fórmula básica da definição

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

e encontramos a área da seção transversal $A(x)$ ou $A(y)$ por uma das seguintes maneiras:

• Se a secção transversal é um disco, encontramos o raio do disco (em termos de x ou y) e usamos

$$A = \pi(\text{raio})^2.$$

Volumes

- Se a secção transversal é uma arruela, encontramos o raio interno r_{int} e o raio externo r_{ext} a partir de um esboço (como na Figura 10), e calculamos a área da arruela subtraindo a área do disco interno da área do disco externo:

$$A = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2 .$$

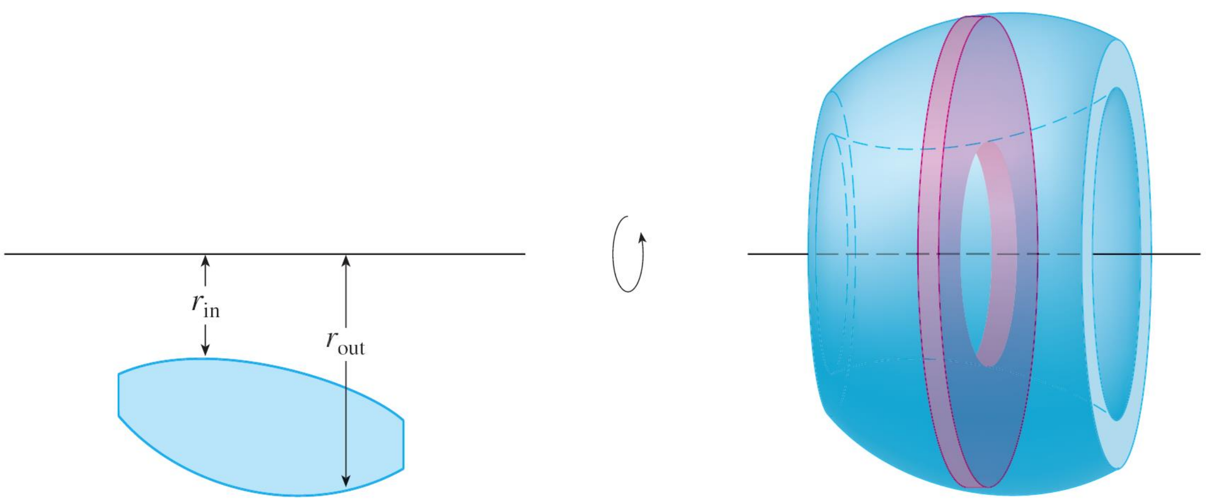


Figura 10