6

Aplicações de Integração

6.1 Áreas entre as Curvas

Áreas entre as Curvas

Considere a região S que se encontra entre duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$. (Veja a Figura 1.)

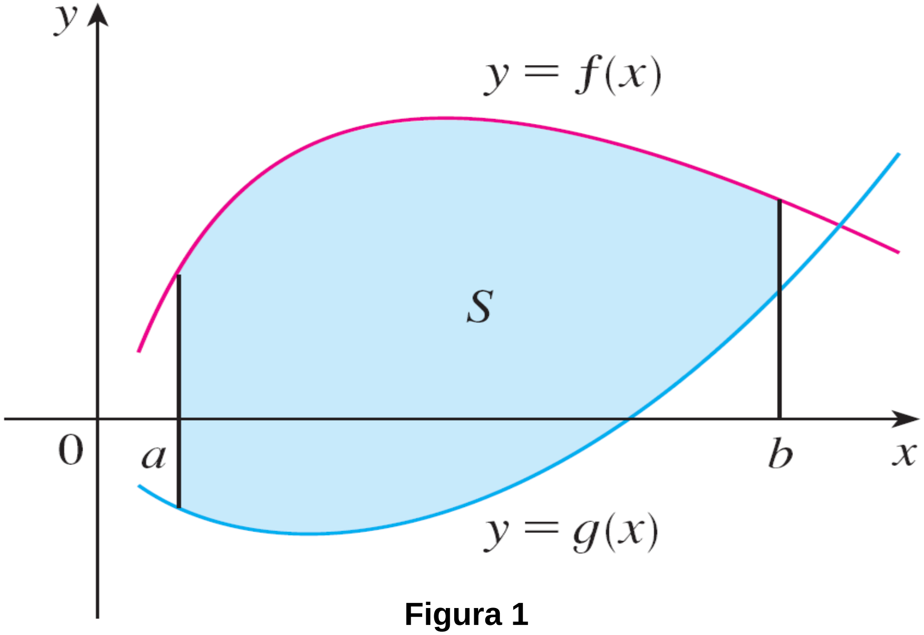
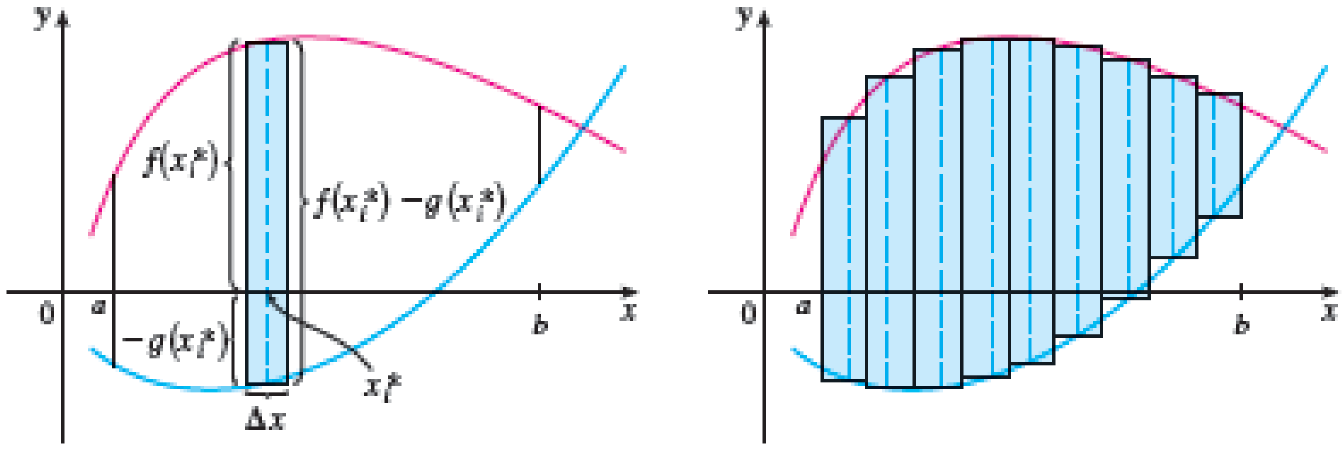


Figura 1

$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$

Áreas entre as Curvas

Dividimos S em n faixas de largura iguais e então aproximamos a i-ésima faixa por um retângulo com base Δx e altura $f(x_i*) - g(x_i*)$. (Veja a Figura 2. Se quiséssemos, poderíamos tomar todos os pontos amostrais, como as extremidades direitas. De modo que $x_i* = x_i$.)



(a) Retângulo típico
(b) Retângulos aproximantes

Figura 2

Áreas entre as Curvas

A soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\, \Delta x$$

é, portanto, uma aproximação do que intuitivamente pensamos como a área de *S*.

Esta aproximação parece tornar-se cada vez melhor quando $n \to \infty$. Portanto, definimos a **área** *A* da região*S* como o valor-limite da soma das áreas desses retângulos de aproximação.

Áreas entre as Curvas

$\boxed{1}$ $$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

Reconhecemos o limite em $\boxed{1}$ assim como a integral definida de $f - g$. Portanto, temos a seguinte fórmula para a área.

$\boxed{2}$ **A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$, $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, é**

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Observe que no caso especial onde $g(x) = 0$, S é a região sob o gráfico de f e a nossa definição geral de área $\boxed{1}$ se reduz à nossa definição anterior.

Áreas entre as Curvas

No caso em que *f* e *g* forem ambas positivas, você pode ver na Figura 3 por que $\boxed{2}$ é verdadeira:

$$A = [\text{área sob } y = f(x)] - [\text{área sob } y = g(x)]$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

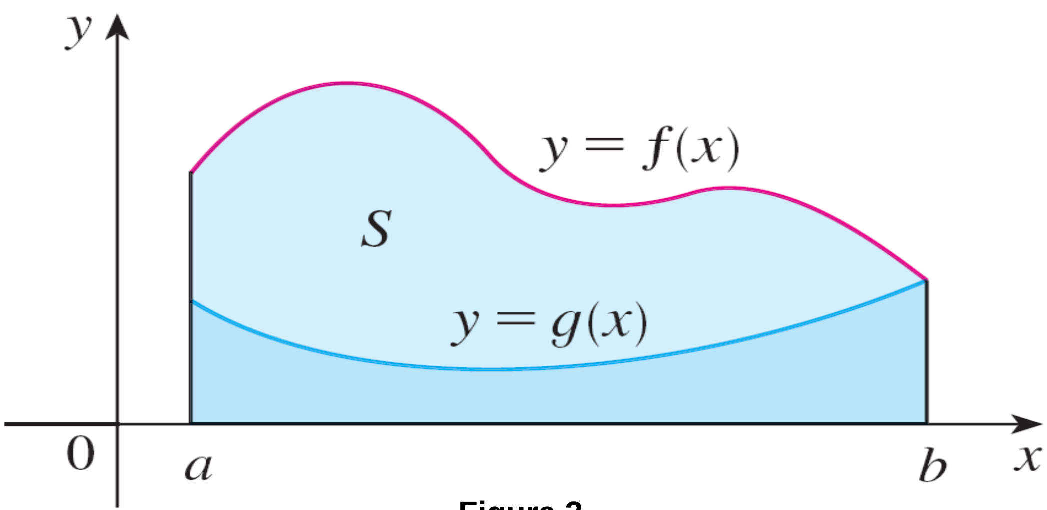


Figura 3

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Exemplo 1

Encontre a área da região limitada acima por $y = e^x$, limitada abaixo por $y = x$, e limitada nos lados por $x = 0$ e $x = 1$.

Solução: A região é mostrada na Figura 4. A curva limitante superior é $y = e^x$ e a curva limitante inferior é $y = x$.

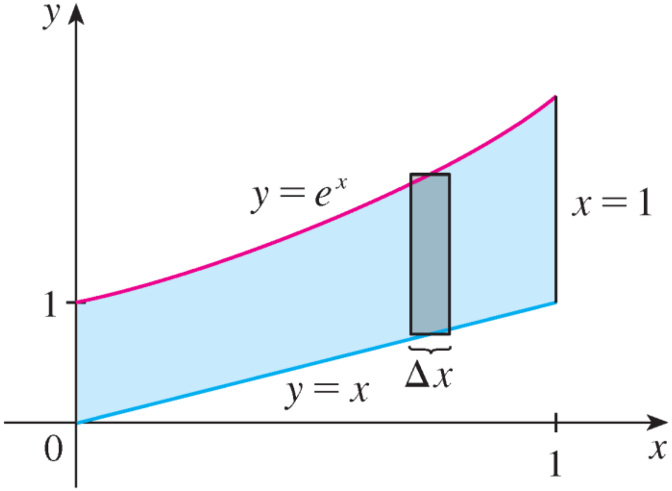


Figura 4

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Então, usamos a fórmula da área $\boxed{2}$ com $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ e $b = 1$:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$

$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1{,}5$$

Áreas entre as Curvas

Na Figura 4 desenhamos um retângulo aproximante típico com largura Δx que nos lembra o procedimento pelo qual a área é definida em $\boxed{1}$. Em geral, quando determinamos uma integral para uma área, é útil esboçar a região para identificar a curva superior y_T, a curva inferior y_B, e um retângulo aproximante típico, como na Figura 5.

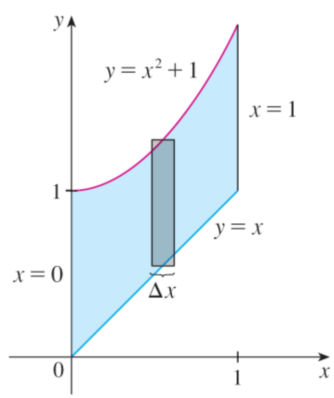


Figura 4

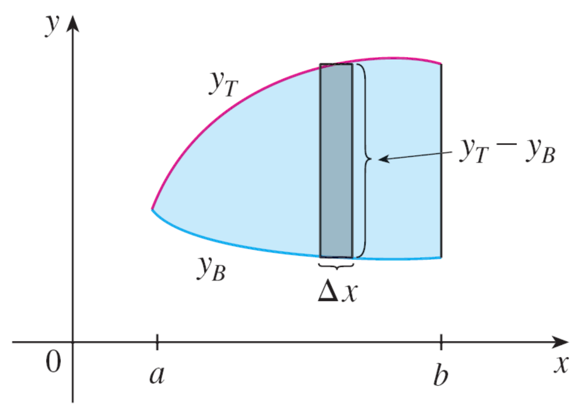


Figura 5

Áreas entre as Curvas

Então, a área de um retângulo típico é $(y_T - y_B)\,\Delta x$ e a equação

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (y_T - y_B)\,\Delta x = \int_a^b (y_T - y_B)\,dx$$

resumem o procedimento de adição (no sentido de limite) das áreas de todos os retângulos típicos.

Observe que na Figura 5 o limite esquerdo se reduz a um ponto, enquanto na Figura 3 o limite direito é que se reduz a um ponto.

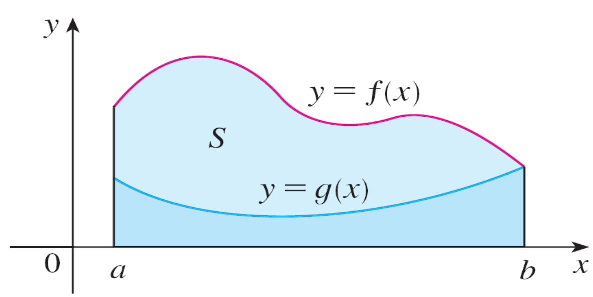


Figura 3

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Áreas entre as Curvas

Para encontrarmos a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ onde $f(x) \geq g(x)$ para alguns valores x, mas $g(x) \geq f(x)$ para outros valores de x, então dividimos determinada

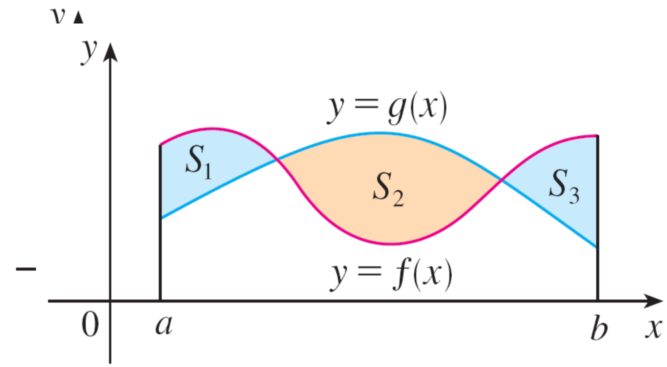


Figura 11

região S em várias regiões $S_1, S_2, \ldots$ com áreas $A_1, A_2, \ldots$ como mostrado na Figura 11. Em seguida, definimos a área da região S como a soma das áreas das regiões menores $S_1, S_2, \ldots$, ou seja, $A = A_1 + A_2 + \ldots$. Uma vez que

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{onde} \quad f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{onde} \quad g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

Áreas entre as Curvas

temos a seguinte expressão para A.

$\boxed{3}$ A área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre $x = a$ e $x = b$ é

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Quando calculamos a integral em $\boxed{3}$, contudono entanto, ainda temos que dividi-la em integrais correspondentes a A_1, A_2,……

Exemplo 6

Encontre a área da região delimitada pelas curvas $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.

Solução: Os pontos de intersecção ocorrem quando $\text{sen } x = \cos x$, isto é, quando $x = \pi/4$ (considerando que $0 \le x \le \pi/2$). A região é esboçada na Figura 12. Observe que $\cos x \ge \text{sen } x$ quando $0 \le x \le \pi/4$, mas $\text{sen } x \ge \cos x$ quando $\pi/4 \le x \le \pi/2$.

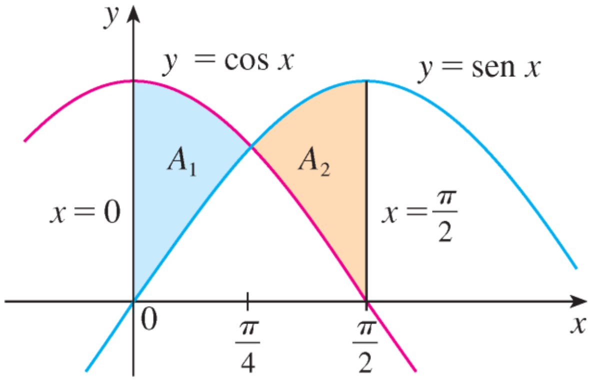


Figura 12

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Portanto, a área requerida é

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x|\, dx = A_1 + A_2 \\
&= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\
&= \Big[\operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Neste exemplo particular, poderíamos ter economizado algum trabalho por perceber que a região é simétrica em torno de $x = \pi/4$ e, assim,

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx$$

Áreas entre as Curvas

Algumas regiões são mais bem tratadas considerando x como uma função de y. Se uma região é delimitada por curvas com equações $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ e $y = d$, em que f e g são contínuas e $f(y) \geq g(y)$ para $c \leq y \leq d$ (veja a Figura 13), então sua área é

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

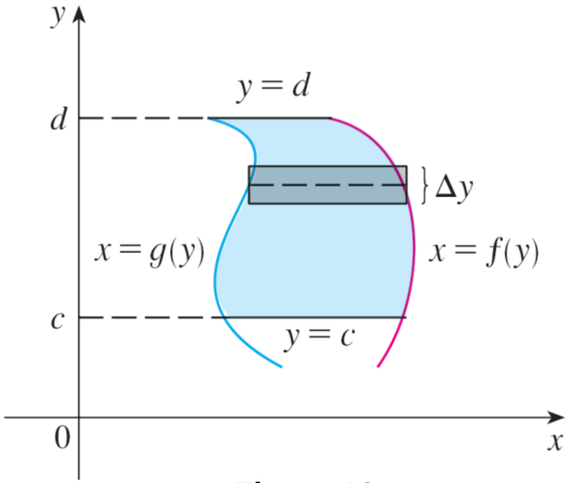


Figura 13

Áreas entre as Curvas

Se escrevermos x_R para o limite à direita e x_L para o limite à esquerda, então, como ilustrada a Figura 14 ilustra, teremos

$$A = \int_c^d (x_R - x_L)\, dy$$

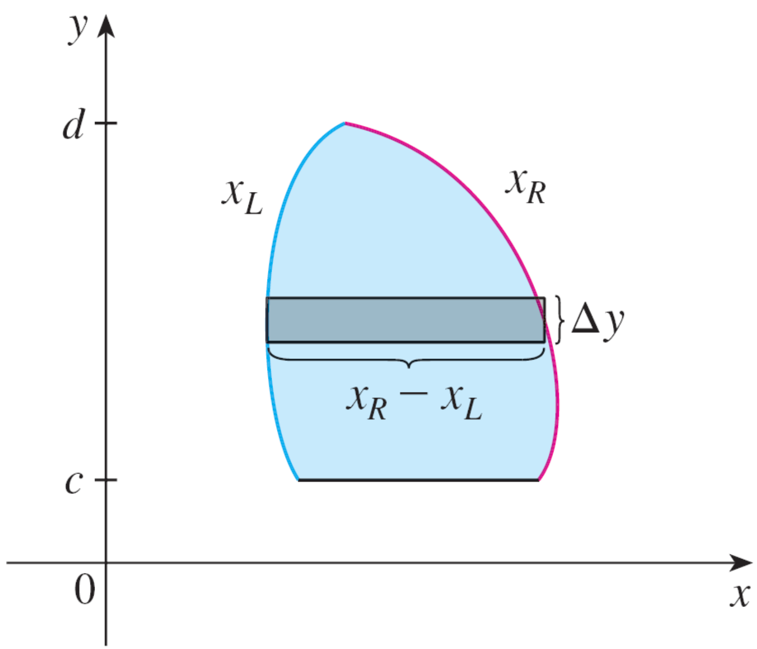


Figura 14