5 Integrais

5.5 A Regra da Substituição

A Regra da Substituição

Por causa do Teorema Fundamental, é importante sermos capazes de encontrar primitivas. Porém, nossas fórmulas de primitivação não mostram como calcular as integrais do tipo

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

Para encontrarmos essa integral usamos a estratégia de resolução de problemas de *introduzir alguma coisa extra.* Aqui o "alguma coisa extra" é uma nova variável; mudamos da variável *x* para uma nova variável *u*.

A Regra da Substituição

Suponha que façamos u igual a quantidade sob o sinal de raiz em $\boxed{1}$, $u = 1 + x^2$. Então a diferencial de u é $du = 2x dx$.

Observe que se dx na notação de integral for interpretada como uma diferencial, então a diferencial $2x\,dx$ ocorrerá em $\boxed{1}$; portanto, formalmente, sem justificar nossos cálculos, podemos escrever

$$\boxed{2} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, 2x\, dx = \int \sqrt{u}\, du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

A Regra da Substituição

Mas agora podemos verificar que temos a resposta correta usando a Regra da Cadeia para derivar a função final da Equação 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}+C\right]=\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x=2x\sqrt{x^2+1}$$

Em geral, esse método funciona sempre que temos uma integral que possa ser escrita na forma $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$.

A Regra da Substituição

Observe que se $F' = f$, então

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C,$$

pois, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))\, g'(x).$$

Se fizermos a "mudança de variável" ou "substituição" $u = g(x)$, então, da Equação 3 temos

$$\int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\, du$$

ou, escrevendo $F' = f$, obtemos

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du.$$

A Regra da Substituição

Assim, demonstramos a regra a seguir.

$\boxed{4}$ **Regra da Substituição** Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Observe que a Regra da Substituição para a integração foi demonstrada usando a Regra da Cadeia para a derivação.

Note também que se $u = g(x)$, então $du = g'(x)\,dx$, portanto uma forma de se recordar a Regra da Substituição é imaginar dx e du em $\boxed{4}$ como diferenciais.

Assim, a Regra de Substituição diz que: **é permitido operar com *dx* e *du* após sinais de integração como se fossem diferenciais.**

Exemplo 1

Encontre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$.

Solução: Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$ porque sua diferencial é $du = 4x^3\, dx$, que, à parte do fator constante 4, ocorre na integral. Assim, usando $x^3\, dx = \frac{1}{4}\, du$ e a Regra da Substituição, temos

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx = \int \cos u \cdot du\, \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \int \cos u\, du$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} u + C$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(x^4 + 2) + C.$$

Observe que no estágio final retornamos para a variável original x.

Integrais Definidas

Integrais Definidas

Existem dois métodos para se calcular uma integral *definida* por substituição. Um deles consiste em se calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundamental. Por exemplo,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{2x+1}\,dx\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4$$

$$= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}$$

Outro método, geralmente preferível, consiste em alterar os limites de integração ao mudar a variável.

Integrais Definidas

6 **Regra da Substituição para as Integrais Definidas** Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Exemplo 7

Calcule $\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx$ usando $\boxed{6}$.

Solução: Seja $u = 2x + 1$ e $dx =$ $d\frac{1}{2}$.

Para encontrarmos os novos limites de integração observamos que

quando $x = 0$, $u = 2(0) + 1 = 1$

e

quando $x = 4$, $u = 2(4) + 1 = 9$.

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Portanto, $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big]_1^9$$

$$= \frac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{26}{3}$$

Observe que quando usamos $\boxed{6}$ *não* retornamos à variável *x* após a integração. Simplesmente calculamos a expressão em *u* entre os valores apropriados de *u*.

Simetria

Simetria

O próximo teorema usa a Regra de Substituição para Integrais Definidas $\boxed{6}$ para simplificar o cálculo de integrais de funções que possuem propriedades de simetria.

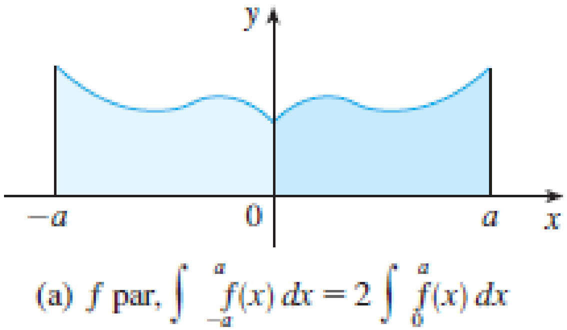
$\boxed{7}$ **Integrais de Funções Simétricas** Suponha que f seja contínua em $[-a, a]$.

(a) Se f é par $[f(-x) = f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

(b) Se f é ímpar $[f(-x) = -f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Simetria

O Teorema 7 está ilustrado na Figura 3.



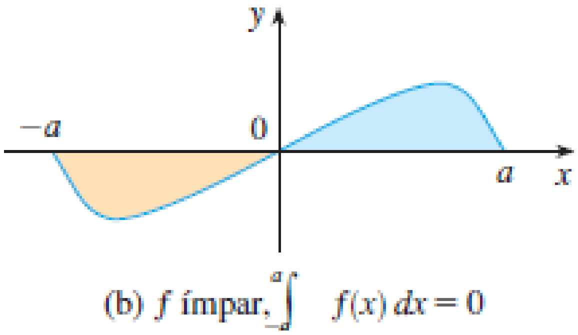


Figura 3

Quando *f* é positiva e par, a parte (a) diz que a área sob $y = f(x)$ de $-a$ até a é o dobro da área de 0 até a em virtude da simetria.

Simetria

Lembre-se de que uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser expressa como o área acima do eixo *x* e abaixo de $y = f(x)$ menos a área abaixo do eixo *x* e acima da curva. Assim, a parte (b) diz que a integral é 0, pois as áreas se cancelam.

Exemplo 10

Uma vez que $f(x) = x^6 + 1$ satisfaz $f(-x) = f(x)$, é par, e portanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \frac{284}{7}$$

Exemplo 11

Já que $f(x) = (\text{tg } x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e por conseguinte

$$\int_{-1}^{1} \frac{\text{tg } x}{1 + x^2 + x^4}\, dx = 0 \cdot$$