5

Integrais

5.4 Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total

Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total

Nesta seção, vamos introduzir uma notação para primitivas, rever as fórmulas para as primitivas e então usá-las para calcular integrais definidas.

Também reformularemos o TFC2, para torná-lo mais facilmente aplicável a problemas da ciência e engenharia.

Integrais Indefinidas

Integrais Indefinidas

Ambas as partes do Teorema Fundamental estabelecem conexões entre as primitivas e as integrais definidas. A Parte 1 diz que *f* é contínua, então $\int_a^x f(t)$ *dt* é uma primitiva de *f*. A Parte 2 diz que $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser encontrado calculando-se *F*(*b*) – *F*(*a*), onde *F* é uma primitiva de *f*.

Precisamos de uma notação conveniente para primitivas que torne fácil trabalhar com elas. Em virtude da relação entre primitivas e integrais dada pelo Teorema Fundamental entre primitivas e integrais, a notação $\int f(x)\,dx$ é tradicionalmente usada para a primitiva de *f* e é chamada **integral indefinida.**

Integrais Indefinidas

Logo,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{significa} \quad F'(x) = f(x).}$$

Por exemplo, podemos escrever

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \quad \text{pois} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2.$$

Portanto, podemos olhar uma integral indefinida como representando toda uma *família* de funções (uma primitiva para cada valor da constante *C*).

Integrais Indefinidas

Você deve fazer uma distinção cuidadosa entre integral definida e indefinida. Uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um *número*, enquanto uma integral indefinida $\int f(x)\,dx$ é uma *função* (ou uma família de funções). A conexão entre elas é dada pela Parte 2 do Teorema Fundamental: se *f* é contínua em [*a*, *b*], então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

A eficiência do Teorema Fundamental depende de termos um suprimento de primitivas de funções.

Integrais Indefinidas

Cada fórmula pode ser verificada derivando-se a função do lado direito e obtendo-se o integrando. Por exemplo,

$$\int \sec^2 x\, dx = \text{tg } x + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}(\text{tg } x + C) = \sec^2 x.$$

Integrais Indefinidas

1 Tabelas de Integrais Indefinidas

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

A primitiva mais geral *sobre um dado intervalo* é obtida adicionando-se uma constante a uma dada primitiva.

Integrais Indefinidas

Adotamos a convenção de que quando uma fórmula para uma integral indefinida geral é dada, ela é válida somente em um intervalo. Assim, escrevemos

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

subentendendo que isso é válido no intervalo $(0, \infty)$ ou no intervalo $(-\infty, 0)$. Isso é verdadeiro apesar do fato de que a primitiva geral da função $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, é

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{se } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Exemplo 2

Calcule $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$.

Solução: Essa integral indefinida não é imediatamente reconhecível na Tabela 1, logo, usamos identidades trigonométricas para reescrever a função antes de integrá-la:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$

$$= \int \operatorname{cossec}\theta\ \operatorname{cotg}\theta\ d\theta = -\operatorname{cossec}\theta + C$$

Exemplo 5

Calcule $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt.$

Solução: Precisamos primeiro escrever o integrando em uma forma mais simples, efetuando a divisão:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$

$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Bigg]_1^9$$

$$= 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Bigg]_1^9$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

$$= \left(2 \cdot 9 + \tfrac{2}{3} \cdot 9^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(2 \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$

$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$

Aplicações

Aplicações

A Parte 2 do Teorema Fundamental diz que se *f* for contínua em [*a*, *b*], então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde *F* é qualquer primitiva de *f*. Isso significa que $F' = f$, de modo que a equação pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Aplicações

Sabemos que $F'(x)$ representa a taxa de variação de $y = F(x)$ em relação à x e $F(b) - F(a)$ é a variação em y quando x muda de a para b. [Observe que y pode, por exemplo, decrescer e, então, crescer novamente. Embora y possa variar nas duas direções, $F(b) - F(a)$ representa a *variação* líquida em y.] Logo, podemos reformular FTC2 em palavras da forma a seguir.

Teorema da Variação Total A integral de uma taxa de variação é a variação total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Aplicações

Esse princípio pode ser aplicado para todas as taxas de variação nas ciências naturais e sociais. Aqui estão alguns exemplos dessa ideia:

• Se $V(t)$ for o volume de água em um reservatório no instante t, então sua derivada $V'(t)$ é a taxa segundo a qual a água flui para dentro do reservatório no instante t. Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

é a variação na quantidade de água no reservatório entre os instantes de tempo t_1 e t_2.

Aplicações

• Se [C](t) for a concentração do produto de uma reação química no instante t, então a taxa de reação é a derivada d[C]/dt. Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\, dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

é a variação na concentração de C entre os instantes t_1 e t_2.

Aplicações

- Se a massa de uma barra medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x for $m(x)$, então a densidade linear $\rho(x) = m'(x)$. Logo

$$\int_a^b \rho(x)\, dx = m(b) - m(a)$$

é a massa do segmento da barra que está entre $x = a$ e $x = b$.

Aplicações

- Se a taxa de crescimento populacional for *dn*/*dt*, então

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

é a alteração total da população no período de tempo de t_1 a t_2. (A população cresce quando ocorrem nascimentos e decresce quando ocorrem óbitos. A variação total leva em conta tanto nascimentos quanto mortes.)

Aplicações

- Se $C(x)$ é o custo de produzir x unidades de uma mercadoria, então o custo marginal é a derivada de $C'(x)$. Logo,

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

é o crescimento do custo quando a produção está aumentando de x_1 a x_2 unidades.

Aplicações

- Se um objeto se move ao longo de uma reta com a função de posição $s(t)$,então sua velocidade é $v(t) = s'(t)$, logo

$$\boxed{2} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

é a mudança de posição, ou *deslocamento*, da partícula durante o período de tempo de t_1 a t_2. Isso era verdadeiro para o caso onde o objeto move-se no sentido positivo, mas agora demonstramos que é sempre verdade.

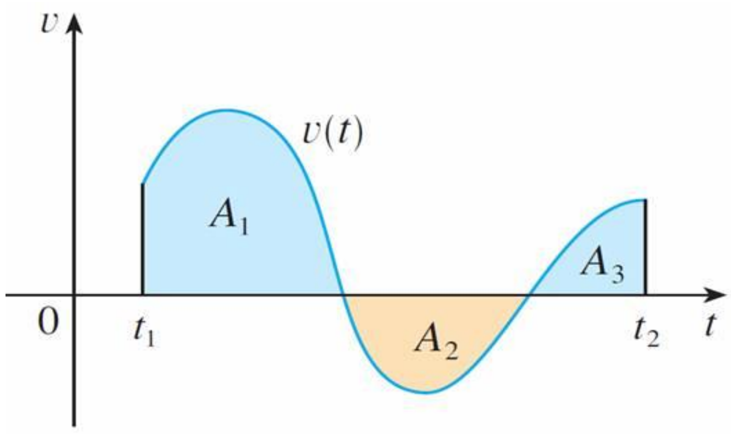
Aplicações

Se quisermos calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos de considerar os intervalos quando $v(t) \geq 0$ (a partícula move-se para a direita) e também os intervalos quando $v(t) \leq 0$ (a partícula move-se para a esquerda). Em ambos os casos a distância é calculada integrando-se $|v(t)|$, a velocidade escalar. Portanto,

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = \text{distância total percorrida.}$$

Aplicações

A Figura 3 mostra como o deslocamento e a distância percorrida podem ser interpretados em termos de áreas sob uma curva velocidade.



$$\text{Deslocamento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{Distância} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$$

Figura 3

Aplicações

- A aceleração do objeto é $a(t) = v'(t)$, logo

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

é a mudança na velocidade do instante t_1 até t_2.

Exemplo 6

Uma partícula move-se ao longo de uma reta de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida em metros por segundo).

(a) Encontre o deslocamento da partícula durante o período de tempo $1 \leq t \leq 4$.

(b) Encontre a distância percorrida durante esse período de tempo.

Exemplo 6 – *Solução*

(a) Pela Equação 2, o deslocamento é

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Isso significa que a partícula moveu-se 4,5 m para a esquerda.

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

(b) Observe que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$, logo, $v(t) \leq 0$ no intervalo [1, 3] e $v(t) \geq 0$ em [3, 4]. Assim, da Equação 3, a distância percorrida é

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt$$

$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$

$$= \frac{61}{6} \approx 10{,}17 \text{ m}$$