5 Integrais

5.3

O Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo

O nome Teorema Fundamental do Cálculo é apropriado, pois ele estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. Ele dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral.

A primeira parte do Teorema Fundamental lida com funções definidas por uma equação da forma

$$\boxed{1} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

onde *f* é uma função contínua em [*a*, *b*] e *x* varia entre *a* e *b*. Observe que *g* depende somente de *x*, que aparece como o limite superior variável da integral.

O Teorema Fundamental do Cálculo

Se x for um número fixado, então a integral $\int_a^x f(t)\,dt$ é um número definido. Se variamos x o número $\int_a^x f(t)\,dt$ também varia e define a função de x denotada por $g(x)$.

Se f for uma função positiva, então $g(x)$ pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x, onde x pode variar de a até b. (Imagine g como a função "área até aqui"; veja a Figura 1.)

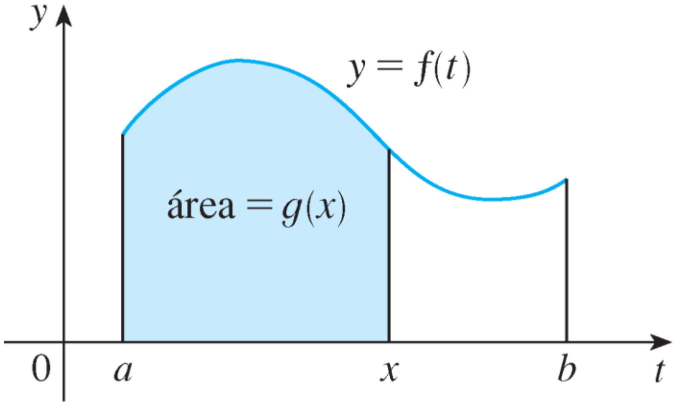


Figura 1

Exemplo 1

Se f é a função cujo gráfico é mostrado na Figura 2 e $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encontre os valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ e $g(5)$. A seguir, faça um esboço do gráfico de g.

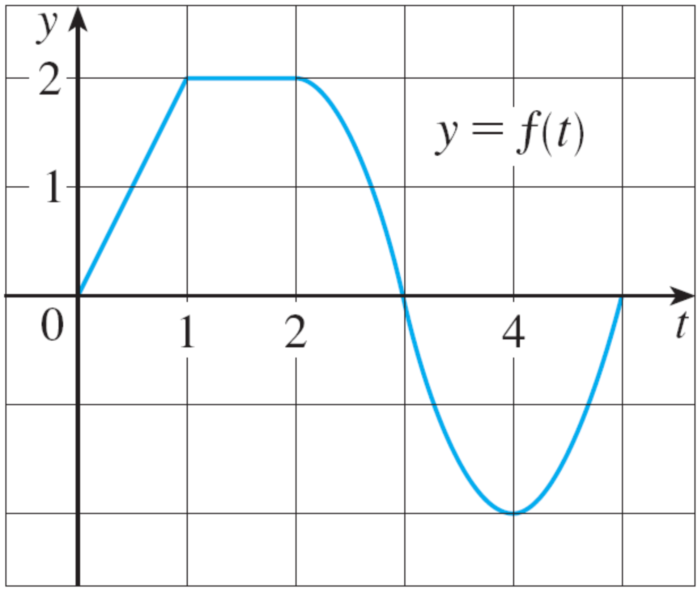


Figura 2

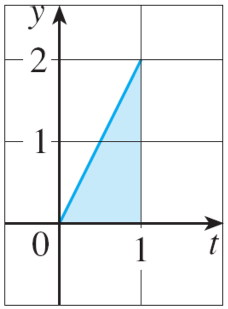
Exemplo 1 – *Solução*

Primeiro observamos que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. A partir da Figura 3, sabemos que *g*(1) é a área de um triângulo:

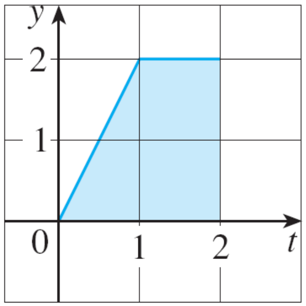
$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt \ \tfrac{1}{2} = (1 \cdot 2) = 1.$$

Para achar *g*(2), somamos *g*(1) à área de um retângulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3.$$



$g(1) = 1$



$g(2) = 3$

Figura 3

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Estimamos que a área abaixo da curva definida por *f* no intervalo de 2 a 3 é aproximadamente 1,3, assim

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1{,}3 = 4{,}3.$$

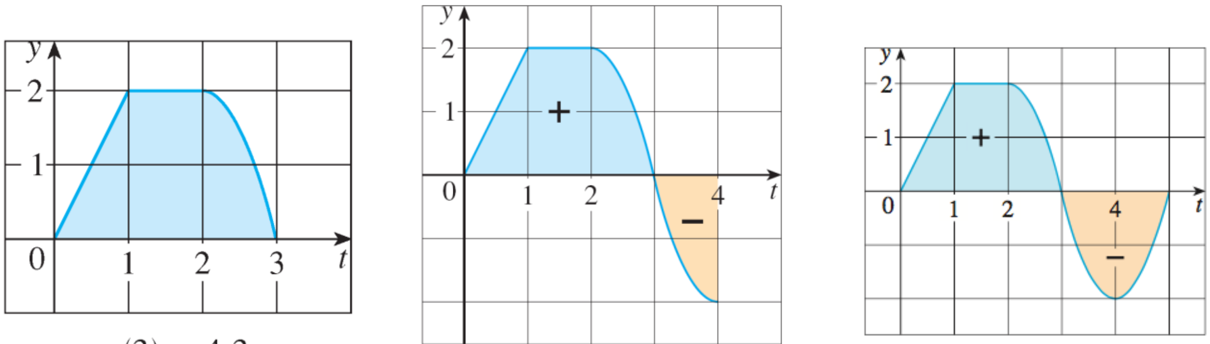
Para $t > 3$, $f(t)$ é negativa e, dessa forma, começamos a subtrair as áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4{,}3 + (-1{,}3) = 3{,}0,$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1{,}3) = 1{,}7.$$

Exemplo 1 – *Solução*

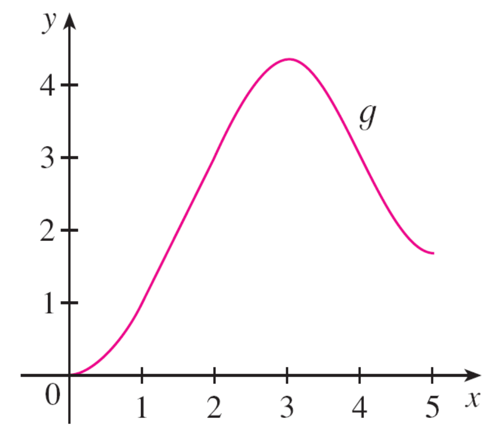
continuação



$g(3) \approx 4{,}3$ $g(4) \approx 3$ $g(5) \approx 1{,}7$

Figura 3

Usamos esses valores para fazer o esboço do gráfico de *g* na Figura 4. Observe que, pelo fato de *f*(*t*) ser positiva para *t* < 3, continuamos adicionando área para *t* < 3 e assim *g* está aumentandoé crescente até *x* = 3, onde atinge o seu valor máximo. Para *x* > 3, *g* decresce porque *f*(*t*) é negativa.



$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Figura 4

O Teorema Fundamental do Cálculo

Se tomarmos $f(t) = t$ e $a = 0$, então, $g(x) = \int_0^x t\,dt = \dfrac{x^2}{2}$.

Observe que $g'(x) = x$, isto é, $g' = f$. Em outras palavras, se g for definida como a integral de f pela Equação 1, então g é uma primitiva de f, pelo menos nesse caso. E se esboçarmos a derivada da função g mostrada na Figura 4 pelas inclinações estimadas das tangentes, teremos um gráfico semelhante ao de f na Figura 2. Portanto, suspeitamos que $g' = f$, também, no Exemplo 1.

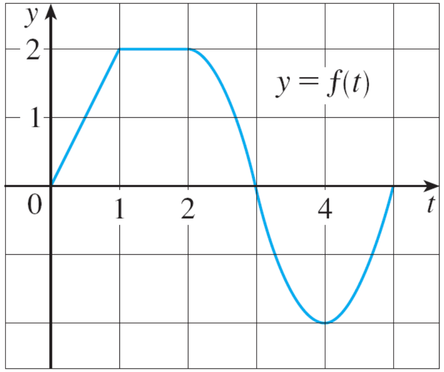


Figura 2

O Teorema Fundamental do Cálculo

Para ver por que isso pode ser verdadeiro em geral, consideramos qualquer função contínua f com $f(x) \geq 0$. Então $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x, como na Figura 1.

A fim de calcular $g'(x)$ a partir da definição de derivada, primeiro observamos que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ é obtida subtraindo áreas, de forma que reste a área sob o gráfico de f de x até $x + h$ (a área em destaque na Figura 5).

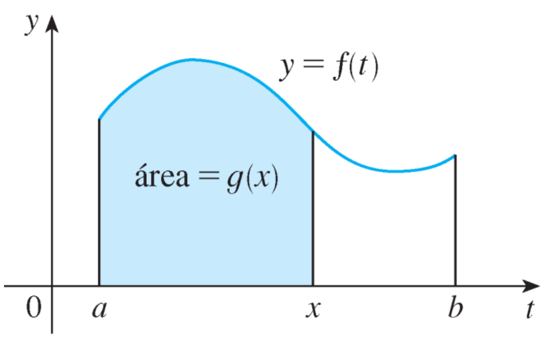


Figura 1

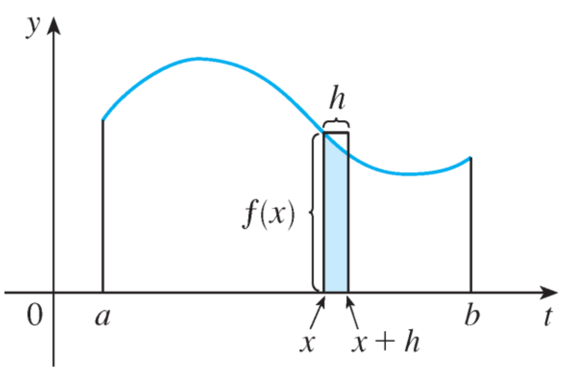


Figura 5

O Teorema Fundamental do Cálculo

Para h pequeno, pode-se ver pela figura que essa área é aproximadamente igual à área do retângulo com altura $f(x)$ e largura h:

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x),$$

logo,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

Intuitivamente, portanto, esperamos que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

O Teorema Fundamental do Cálculo

O fato de isso ser verdadeiro, mesmo quando *f* não é necessariamente positiva, é a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1 Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

O Teorema Fundamental do Cálculo

Usando a notação de Leibniz para as derivadas, podemos escrever o TFC1 como

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

quando *f* é contínua. Grosseiramente falando, a Equação 5 nos diz que se primeiro integramos *f* e então derivamos o resultado, retornamos à função original *f*.

Exemplo 2

Encontre a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt.$

Solução: Uma vez que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ contínua, Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo fornece

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

Exemplo 3

Embora uma fórmula da forma $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ possa parecer uma maneira estranha de definir uma função, livros de física, química e estatística estão repletos dessas funções. Por exemplo, a **função de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)\,dt$$

é assim chamada em homenagem ao físico francês Augustin Fresnel (1788-1827), famoso por seus estudos em óptica.

Essa função apareceu pela primeira vez na teoria de difração das ondas de luz de Fresnel, porém mais recentemente foi aplicada no planejamento de autoestradas.

Exemplo 3

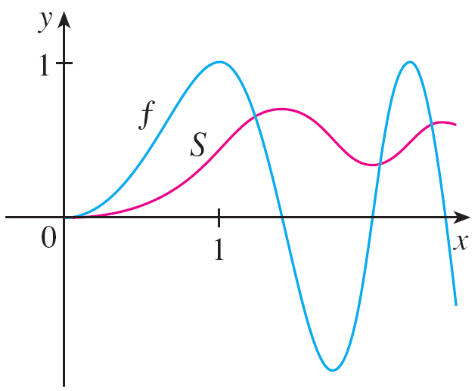
continuação

A parte 1 do Teorema Fundamental nos diz como derivar a função de Fresnel:

$$S'(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$$

Isso significa que podemos aplicar todos os métodos do cálculo diferencial para analisar *S*.

A Figura 7 mostra os gráficos de $f(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$ e a da função Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.



$f(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$

$S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\,dt$

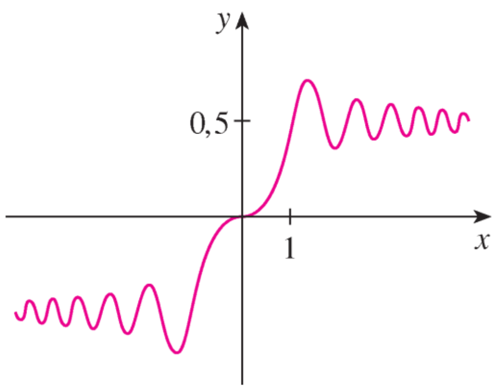
Figura 7

Exemplo 3

continuação

Um computador foi usado para construir um gráfico *S*, calculando o valor dessa integral para vários valores de *x*.

De fato, parece que se $S(x)$ é a área sob o gráfico de f de 0 até x [até $x \approx 1{,}4$, quando $S(x)$ torna-se uma diferença de áreas]. A Figura 8 mostra uma parte maior do gráfico de *S*.



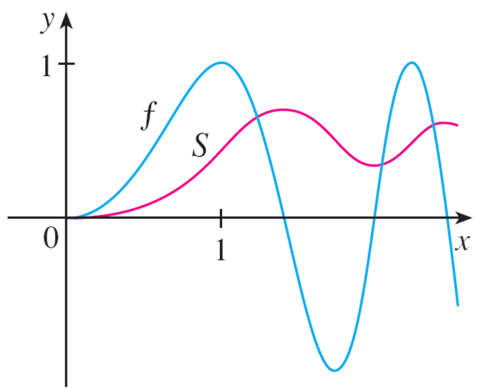
A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

Figura 8

Exemplo 3

continuação

Se começarmos agora com o gráfico de S in da Figura 7 e pensarmos sobre como deve ser sua derivada, parece razoável que $S'(x) = f(x)$. [Por exemplo, S é crescente quando $f(x) > 0$ e decrescente quando $f(x) < 0$.] Logo, isso nos dá a confirmação visual da Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.



$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$

$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

Figura 7

O Teorema Fundamental do Cálculo

A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, que segue facilmente da primeira parte, nos fornece um método muito mais simples para o cálculo de integrais.

Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2 Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Diferenciação e Integração como Processos Inversos

Diferenciação e Integração como Processos Inversos

Vamos finalizar esta seção justapondo as duas partes do Teorema Fundamental.

Teorema Fundamental do Cálculo Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.

1. Se $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Observamos que a Parte 1 pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

o que quer dizer que se *f* for integrada e o resultado, derivado, obteremos de volta a função original *f*.

Diferenciação e Integração como Processos Inversos

Como $F'(x) = f(x)$, a Parte 2 pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Essa versão afirma que se tomarmos uma função *F*, a derivarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original *F*, mas na forma $F(b) - F(a)$. Juntas, as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo mostram que a derivação e a integração são processos inversos. Cada um desfaz o que o outro fez.