5

Integrais

5.2 A Integral Definida

A Integral Definida

Vimos que o limite da forma

$$\boxed{1} \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

aparece quando calculamos uma área. Vimos também que ele aparece quando tentamos encontrar a distância percorrida por um objeto. Resulta que esse mesmo tipo de limite ocorre em uma grande variedade de situações, mesmo quando *f* não é necessariamente uma função positiva.

A Integral Definida

2 **Definição de Integral Definida** Se f é uma função contínua definida em $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0 (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ **pontos amostrais arbitrários** nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de f de a a b** é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

OBSERVAÇÃO 1 O símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é denominado **sinal de integral**. Ele é um *S* alongado e foi assim escolhido porque uma integral é um limite de somas.

A Integral Definida

Na notação $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$é chamado **integrando**, *a* e *b* são ditos **limites de integração**, *a* é o **limite inferior**, *b*, o **limite superior**. Por enquanto, o símbolo *dx* não tem significado sozinho; $\int_a^b f(x)\,dx$ é apenas um símbolo. O *dx* simplesmente indica que a variável dependente é *x*. O procedimento de calcular a integral é chamado **integração**.

A Integral Definida

Observação 2 A integral definitiva $\int_a^b f(x)\,dx$ um número; ela não depende de *x.* Na verdade, podemos usar qualquer letra para substituir *x* sem alterar o valor da integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

Observação 3 A soma

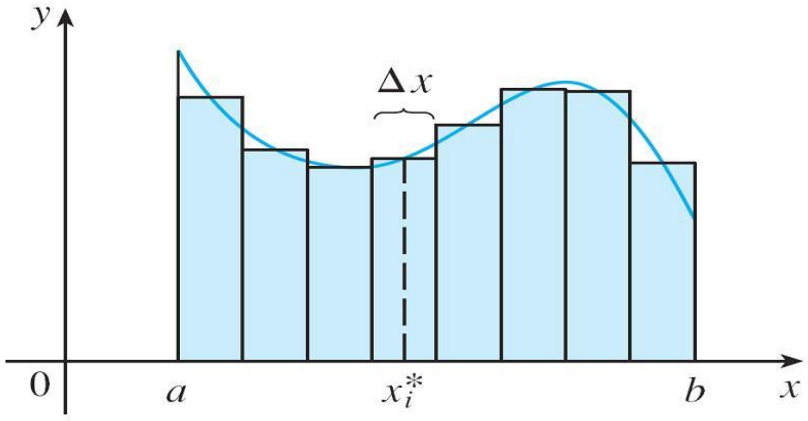
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que ocorre na Definição 2 é chamada **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866).

A Integral Definida

Assim, a Definição 2 diz que a integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann.

Sabemos que se *f* for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes (veja a Figura 1).

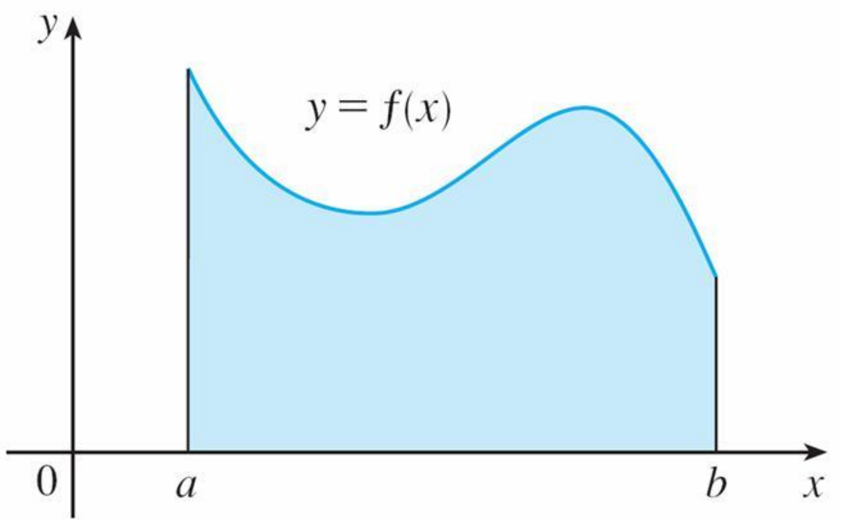


Se $f(x) \geq 0$, a soma de Riemann $\Sigma f(x_i^*) \, \Delta x$ é a soma de áreas de retângulos

Figura 1

A Integral Definida

Vemos que a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b (veja a Figura 2.)

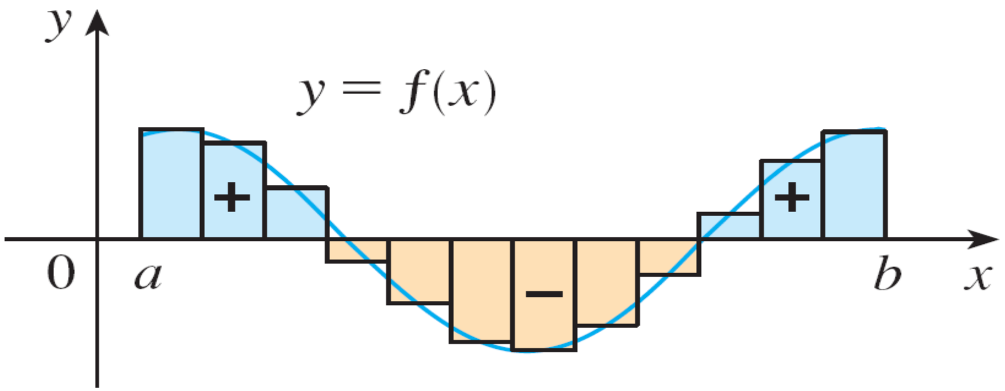


Se $f(x) \geq 0$, a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área sob a curva $y = f(x)$de a até b

Figura 2

A Integral Definida

Se *f* assumir valores positivos e negativos, como na Figura 3, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo *x* e do *oposto* das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo *x* (as áreas dos retângulos azuis *menos* as áreas dos retângulos amarelos).



$\Sigma f(x_i^*)\ \Delta x$ é uma aproximação para a área resultante

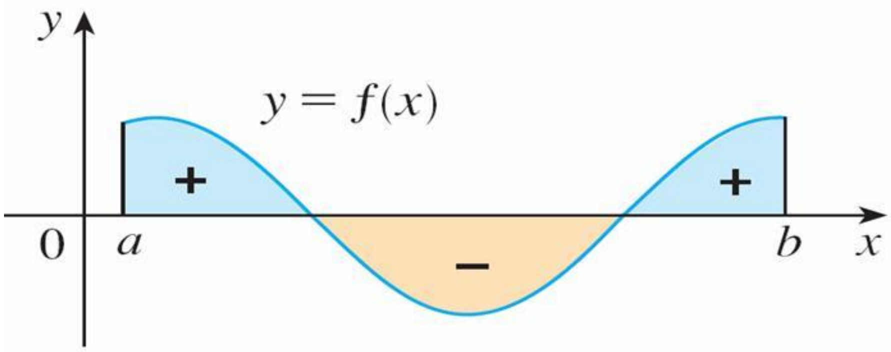
Figura 3

A Integral Definida

Quando tomamos o limite dessas somas de Riemann, obtemos a situação ilustrada na Figura 4. Uma integral definida pode ser interpretada como **área resultante**, isto é, a diferença das áreas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

onde A_1 é a área da região acima do eixo x e abaixo do gráfico de f, e A_2 é a área da região abaixo do eixo x e acima do gráfico de f



$\int_a^b f(x)\,dx$ é a área resultante.

Figura 4

A Integral Definida

OBSERVAÇÃO 4 Embora tenhamos definido $\int_a^b f(x)\,dx$ dividindo [*a*, *b*] em subintervalos de igual comprimento, há situações nas quais é vantajoso trabalhar com intervalos de comprimentos diferentes.

Se os comprimentos dos subintervalos forem $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, teremos de garantir que todos esses comprimentos tendem a 0 no processo de limite. Isso acontece se o maior comprimento, max Δx_i, tender a 0. Portanto, nesse caso a definição de integral definida fica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

A Integral Definida

OBSERVAÇÃO 5 Estabelecemos a integral definida para uma função integrável, mas nem todas as funções são integráveis. O teorema seguinte mostra que a maioria das funções que ocorrem comumente são de fato integráveis. Esse teorema é demonstrado em cursos mais avançados.

3 **Teorema** Se f for contínua em $[a, b]$, ou f tiver apenas um número finito de descontinuidades de saltos, então f é integrável em $[a, b]$; ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Se *f* for integrável em [*a*, *b*], então, o limite na Definição 2 existe e dá o mesmo valor, não importa como escolhamos os pontos amostrais x_i^*.

A Integral Definida

Para simplificarmos o cálculo da integral, com frequência tomamos como pontos amostrais as extremidades direitas. Então, x_i^* = x_i e a definição de integral se simplifica como a seguir.

$\boxed{4}$ **Teorema** Se f for integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i\,\Delta x$.

Exemplo 1

Expresse

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\, \Delta x$$

como uma integral no intervalo $[0, \pi]$.

Solução: Comparando o limite dado com o limite do Teorema 4, vemos que eles são idênticos se escolhermos $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. São dados $a = 0$ e $b = \pi$. Temos, portanto, pelo Teorema 4,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \sin x_i)\, \Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \sin x)\, dx$$

A Integral Definida

Quando Leibniz escolheu a notação para para a integral, ele optou por ingredientes que lembrassem do processo de limite. Em geral, quando escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

substituímos lim Σ por $\int$, x_i^* por *x*, e Δx por *dx*.

Cálculo de Integrais

Cálculo de Integrais

Quando usamos a definição para calcular uma integral definida, precisamos saber como trabalhar com somas. As três equações a seguir dão fórmulas para as somas de potências de inteiros positivos.

5 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Cálculo de Integrais

As fórmulas remanescentes são regras simples para trabalhar com a notação somatória:

$\boxed{8}$
$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$\boxed{9}$
$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$\boxed{10}$
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$\boxed{11}$
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Exemplo 2 – *Solução*

(a) Calcule a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas e $a = 0$, $b = 3$, e $n = 6$.

(b) Avalie $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx.$

Solução:

(a) Com $n = 6$, o comprimento do intervalo é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 0}{6} = \frac{1}{2}$$

e as extremidades direitas são $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}0$, $x_3 = 1{,}5$, $x_4 = 2{,}0$, $x_5 = 2{,}5$, e $x_6 = 3{,}0$.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Logo, a soma de Riemann é

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= f(0{,}5)\,\Delta x + f(1{,}0)\,\Delta x + f(1{,}5)\,\Delta x + f(2{,}0)\,\Delta x$$

$$+ f(2{,}5)\,\Delta x + f(3{,}0)\,\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}(-2{,}875 - 5 - 5{,}625 - 4 + 0{,}625 + 9)$$

$$= -3{,}9375.$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Observe que *f* não é uma função positiva e, portanto, a soma de Riemann não representa uma soma de áreas de retângulos. Mas ela representa a soma das áreas dos retângulos azuis (acima do eixo *x*) menos a soma das áreas dos retângulos amarelos (abaixo do eixo *x*) na Figura 5.

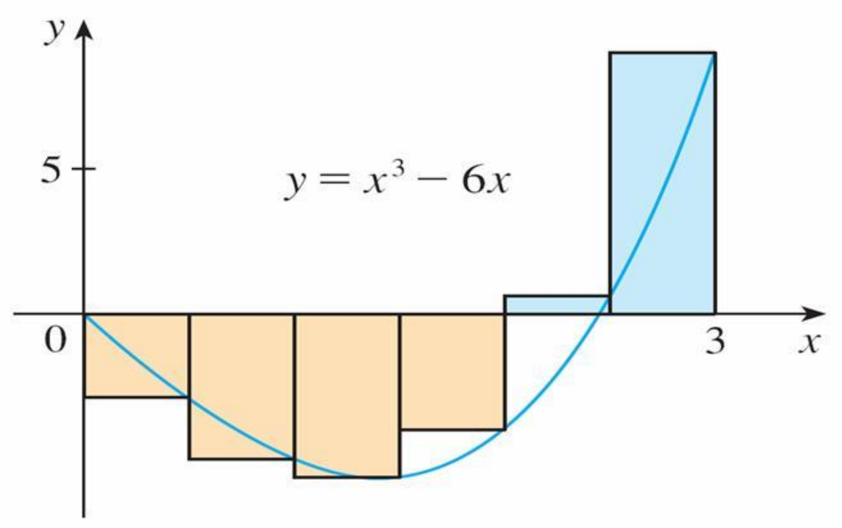


Figura 5

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

(b) Com *n* subintervalos, temos

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3}{n}$$

Assim, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ e, em geral, $x_i = 3i/n$. Uma vez que estamos utilizando as extremidades direitas, podemos usar a Equação 3:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n} \right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n} \right) \right]$$

(Equação 9 com $c = 3/n$)

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \right]$$

(Equações 11 e 9)

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{81}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{54}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

(Equações 7 e 5)

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

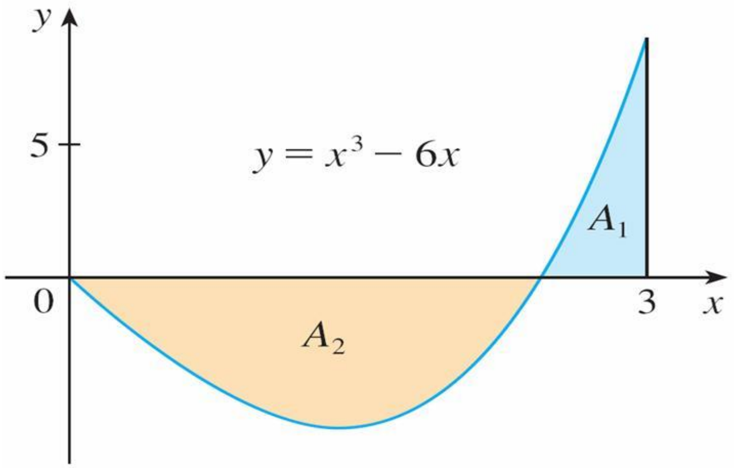
$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{81}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6{,}75$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Essa integral não pode ser interpretada como uma área, pois *f* assume valores positivos e negativos. Porém, ela pode ser interpretada como a diferença de áreas $A_1 – A_2$, em que A_1 e A_2 estão na Figura 6.



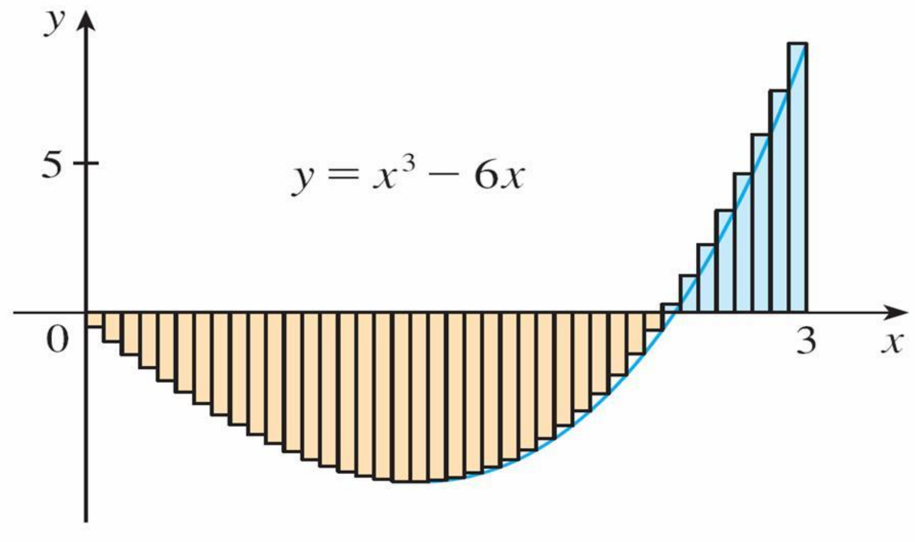
$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\, dx = A_1 - A_2 = -6{,}75$$

Figura 6

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

A Figura 7 ilustra o cálculo mostrando os termos positivos e negativos na soma de Riemann direita R_n para $n = 40$.



$R_{40} \approx -6{,}3998$

Figura 7

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Os valores na tabela mostram as somas de Riemann tendendo ao valor exato da integral, -6,75, quando $n \to \infty$.

n	R_n
40	−6,3998
100	−6,6130
500	−6,7229
1000	−6,7365
5000	−6,7473

A Regra do Ponto Médio

A Regra do Ponto Médio

Frequentemente escolhemos o ponto amostral x_i^* como a extremidade direita do *i*-ésimo intervalo, pois isso é conveniente para o cálculo do limite. Porém, se o propósito for encontrar uma *aproximação* para uma integral, é geralmente melhor escolher x_i^* como o ponto médio do intervalo, o qual denotamos por $\bar{x}_i$.

A Regra do Ponto Médio

Qualquer soma de Riemann é uma aproximação para uma integral, mas se usarmos os pontos médios obteremos a seguinte aproximação.

Regra do Ponto Médio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

onde $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

e $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{ponto médio de } [x_{i-1}, x_i]$$

Exemplo 5

Use a Regra do Ponto Médio com n = 5 para aproximar

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

Solução: As extremidades dos cinco subintervalos são 1, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8, e 2,0, portanto, os pontos médios são 1,1, 1,3, 1,5, 1,7, e 1,9. O comprimento dos subintervalos é $\Delta x = (2 - 1)/5 = \frac{1}{5}$, de modo que a Regra do Ponto Médio fornece

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1{,}1) + f(1{,}3) + f(1{,}5) + f(1{,}7) + f(1{,}9)]$$

Exemplo 5 – *Solução*

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9}\right)$$

$$\approx 0,691908.$$

Uma vez que $f(x) = 1/x > 0$ para $1 \leq x \leq 2$, a integral representa uma área, e a aproximação dada pela Regra do Ponto Médio é a soma das áreas dos Retângulos mostrados na Figura 11.

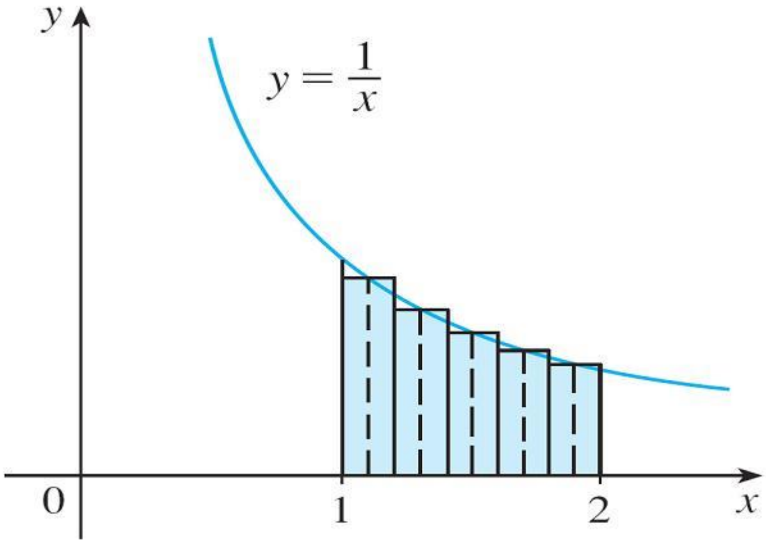


Figura 11

Propriedades da Integral Definida

Propriedades da Integral Definida

Quando definimos a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, implicitamente assumimos que *a* < *b*. Mas a definição como o limite de somas de Riemann faz sentido mesmo que *a* > *b*. Observe que se invertermos *a* e *b*, então Δx mudará de $(b - a)/n$ para $(a - b)/n$. Portanto,

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Propriedades da Integral Definida

Se $a = b$, então $\Delta x = 0$, de modo que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Vamos desenvolver agora algumas propriedades básicas das integrais que nos ajudarão a calcular as integrais de forma mais simples. Vamos supor que *f* e *g* sejam funções contínuas.

Propriedades da Integral

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, onde c é qualquer constante

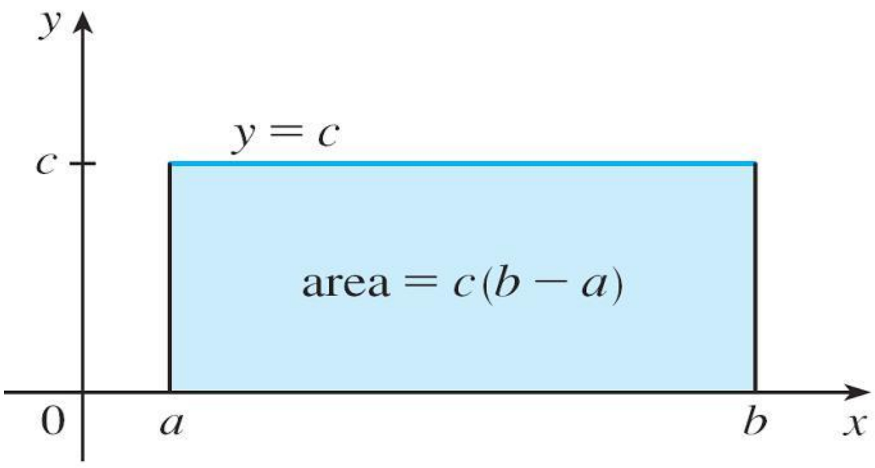
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, onde c é qualquer constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Propriedades da Integral Definida

A Propriedade 1 diz que a integral de uma função constante, $f(x) = c$, é a constante vezes o comprimento do intervalo. Se $c > 0$ e $a < b$, isso é esperado, pois $c(b - a)$ é a área do retângulo sombreado na Figura 13.



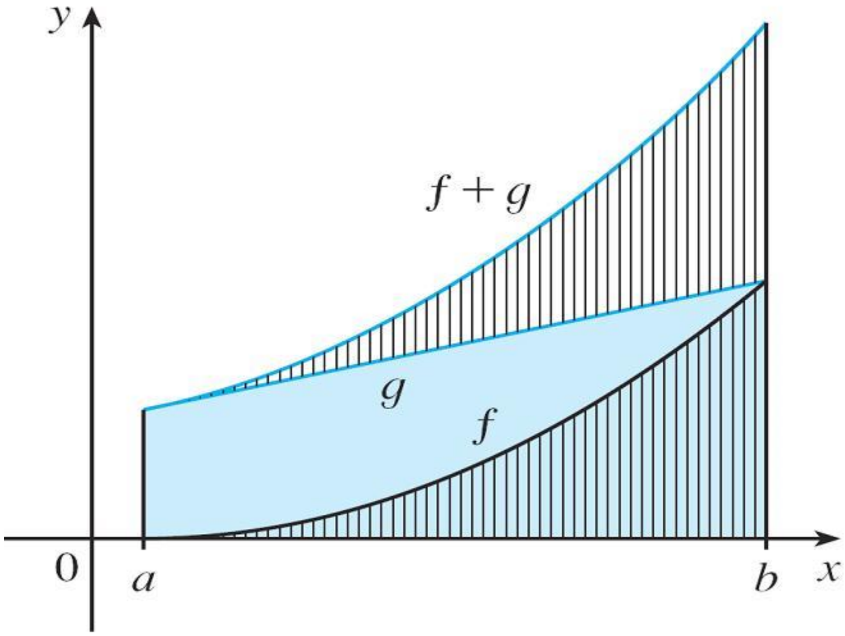
$$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$$

Figura 13

Propriedades da Integral Definida

A Propriedade 2 diz que a integral de uma soma é a soma das integrais. Para as funções positivas, isso diz que a área sob *f* + *g* é a área sob *f* mais a área sob *g*.

A Figura 14 nos ajuda a Entender por que isto é verdadeiro: em vista de como funciona a adição gráfica, os segmentos de reta vertical Correspondentes têm a mesma altura.



$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Figura 14

Propriedades da Integral Definida

Em geral, a Propriedade 2 decorre do Teorema 4 e do fato de que o limite de uma soma é a soma dos limites:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Propriedades da Integral Definida

A Propriedade 3 pode ser demonstrada de forma análoga e diz que a integral de uma constante vezes uma função é a constante vezes a integral da função. Em outras palavras, uma constante (mas *somente* uma constante) pode ser movida para a frente do sinal de integração.

A Propriedade 4 é demonstrada escrevendo $f - g = f + (-g)$ e usando as Propriedades 2 e 3 com $c = -1$.

Exemplo 6

Use as propriedades das integrais para calcular

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx.$$

Solução: Usando as Propriedades 2 e 3 das integrais, temos

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx$$

$$= \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Sabemos da Propriedade 1 que

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1 - 0) = 4$$

e descobrimos que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Logo

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 5$$

Propriedades da Integral Definida

A propriedade a seguir nos diz como combinar integrais da mesma função em intervalos adjacentes:

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Propriedades da Integral Definida

Isso não é fácil de ser demonstrado em geral, mas para o caso onde $f(x) \geq 0$ e $a < c < b$, a Propriedade 5 pode ser vista a partir da interpretação geométrica na Figura 15: a área sob $y = f(x)$ de a até c mais a área de c até b é igual à área total de a até b.

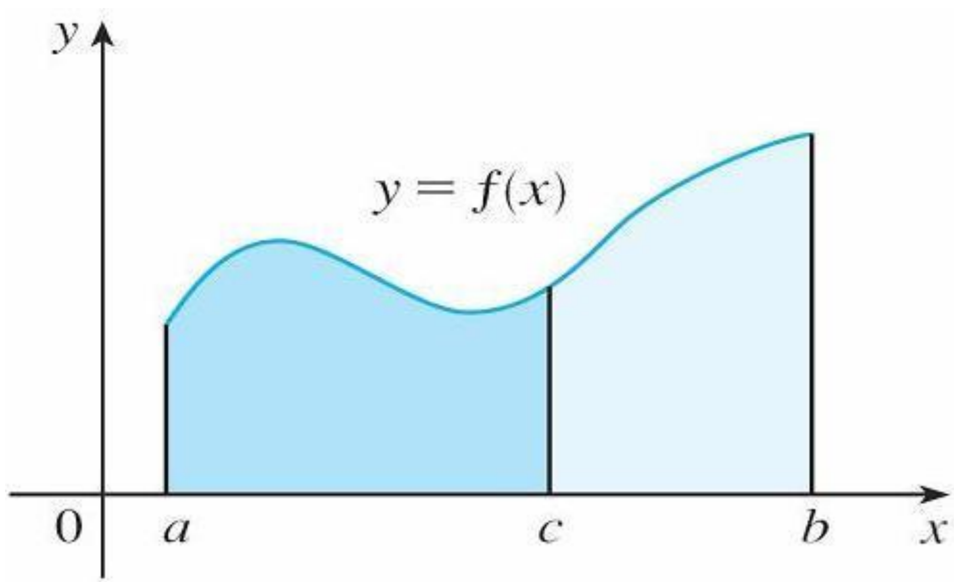


Figura 15

Propriedades da Integral Definida

Observe que as Propriedades 1-5 são verdadeiras se $a < b$, $a = b$ ou $a > b$. As propriedades a seguir, nas quais comparamos os tamanhos de funções e os de integrais, são verdadeiras apenas se $a \leq b$.

Propriedades Comparativas da Integral

6. Se $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Se $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Propriedades da Integral Definida

Se $f(x) \geq 0$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área sob o gráfico de f, logo, a interpretação geométrica da Propriedade 6 é simplesmente que as áreas são positivas. (Isso também segue diretamente da definição porque todas as quantidades envolvidas são positivas). A Propriedade 7 diz que uma função maior tem uma integral maior. Ela segue das Propriedades 6 e 4, pois $f - g \geq 0$.

Propriedades da Integral Definida

A Propriedade 8 está ilustrada na Figura 16 para o caso onde $f(x) \geq 0$. Se f for contínua, poderemos tomar m e M como o valor máximo e o mínimo absolutos de f no intervalo [a, b].

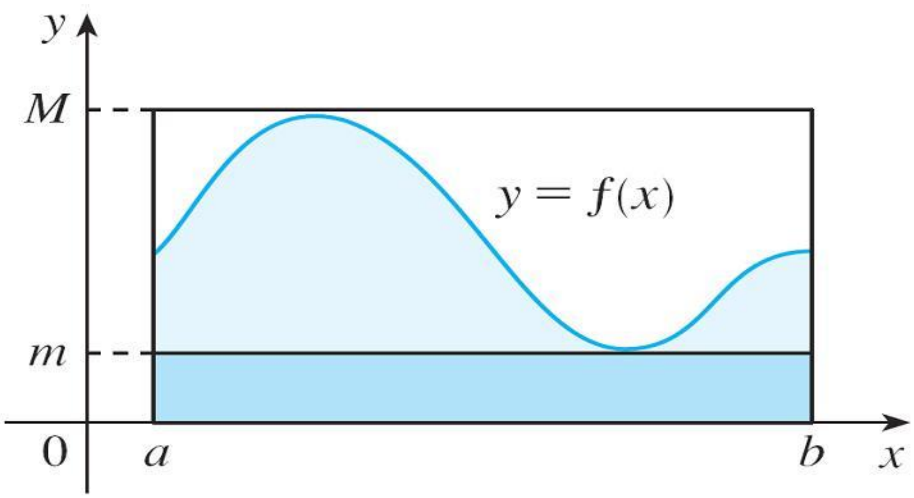


Figura 16

Propriedades da Integral Definida

Nesse caso, a Propriedade 8 diz que a área sob o gráfico de f é maior que a área do retângulo com altura m e menor que a área do retângulo com altura M.

A Propriedade 8 é útil quando tudo o que queremos é uma estimativa grosseira do tamanho de uma integral sem nos preocupar com o uso da Regra do Ponto Médio.