

5

Integrais

5.1

Áreas e Distâncias



O Problema da Área

O Problema da Área

Nós começamos tentando resolver o *problema da área*: Encontre a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a a b . Isso significa que S , ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geq 0$], pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x .

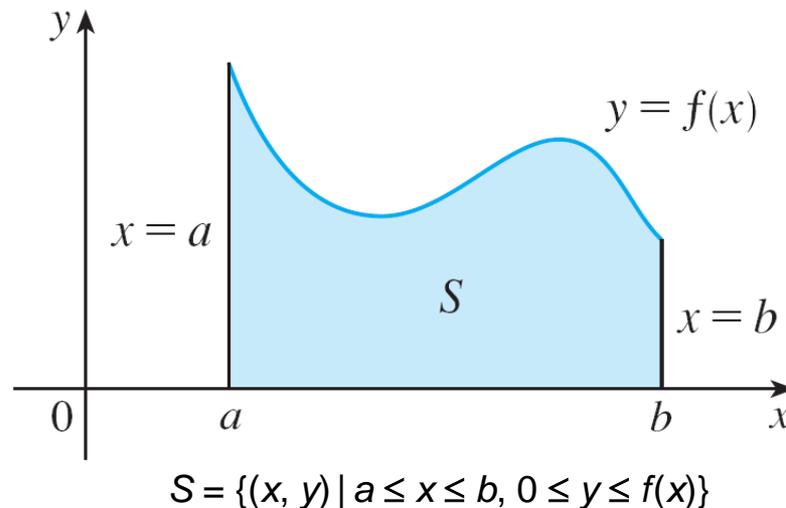
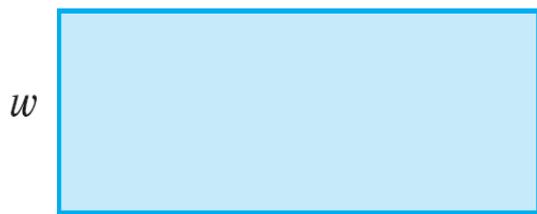


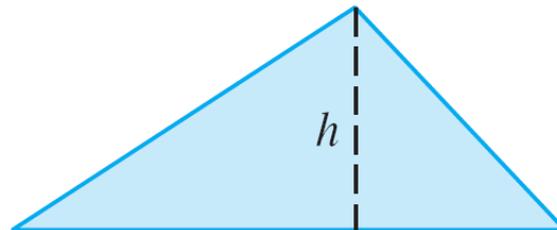
Figura 1

O Problema da Área

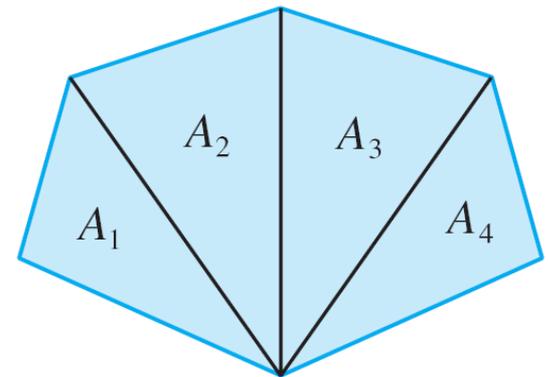
Para um retângulo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos (como na Figura 2) e a seguir somando-se as áreas dos triângulos.



$$A = lw$$



$$A = \frac{1}{2}bh$$



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Figura 2

O Problema da Área

Não é tão fácil, no entanto, encontrar a área de uma região com lados curvos. Temos uma ideia intuitiva de qual é a área de uma região. Mas parte do problema da área é tornar precisa essa ideia intuitiva, dando uma definição exata de área.

Lembre-se de que, ao definir uma tangente, primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e, então, tomamos o limite dessas aproximações. Uma ideia similar será usada aqui para as áreas. Em primeiro lugar, aproximamos a região S utilizando retângulos e depois tomamos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos.

Exemplo 1

Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

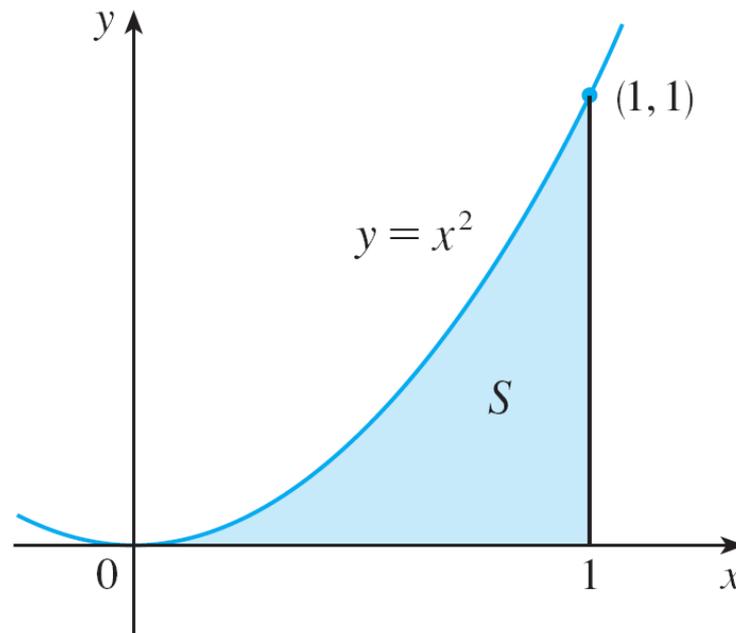


Figura 3

Exemplo 1 – Solução

Observamos primeiro que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que S seja dividida em quatro faixas

S_1 , S_2 , S_3 , e S_4 , traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$, como na Figura 4(a).

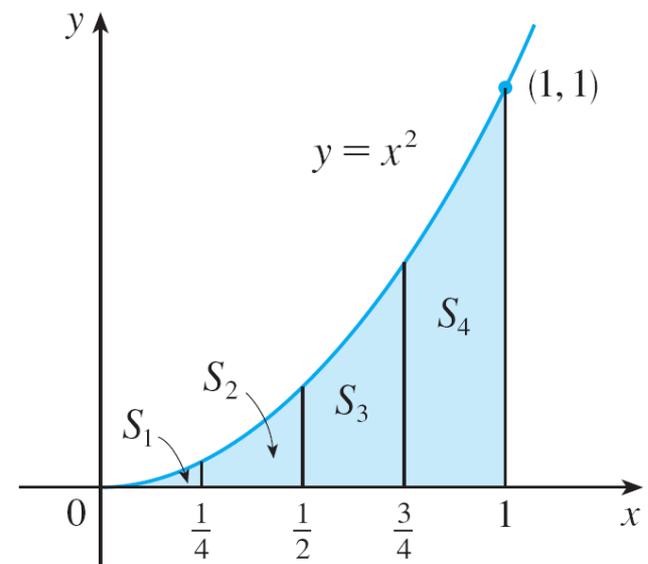


Figura 4(a)

Exemplo 1 – Solução

continuação

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)]. Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nas extremidades

direitas dos subintervalos

$[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, e $[\frac{3}{4}, 1]$.

Cada retângulo tem largura de $\frac{1}{4}$ e a altura e $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$, e 1^2 .

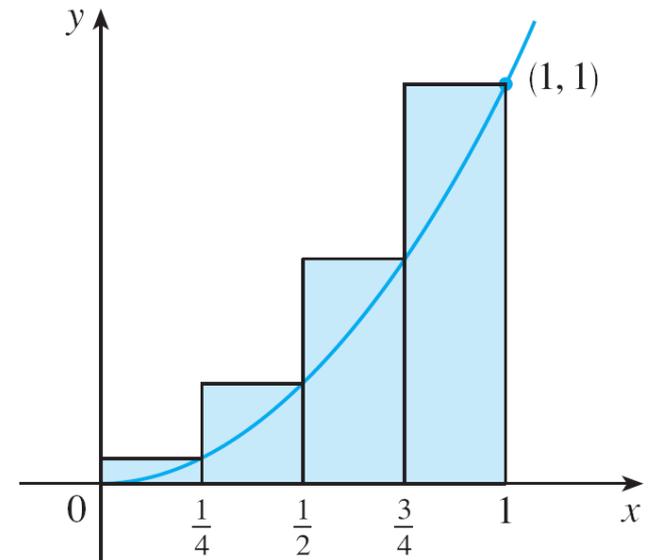


Figura 4(b)

Exemplo 1 – Solução

continuação

Se R_4 for a soma das áreas dos retângulos aproximados, teremos

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0,46875$$

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor que R_4 , logo

$$A < 0,46875.$$

Exemplo 1 – Solução

continuação

Em vez de usar os retângulos na Figura 4(b), poderíamos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas seguem os valores de f nas extremidades *esquerdas* dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.)

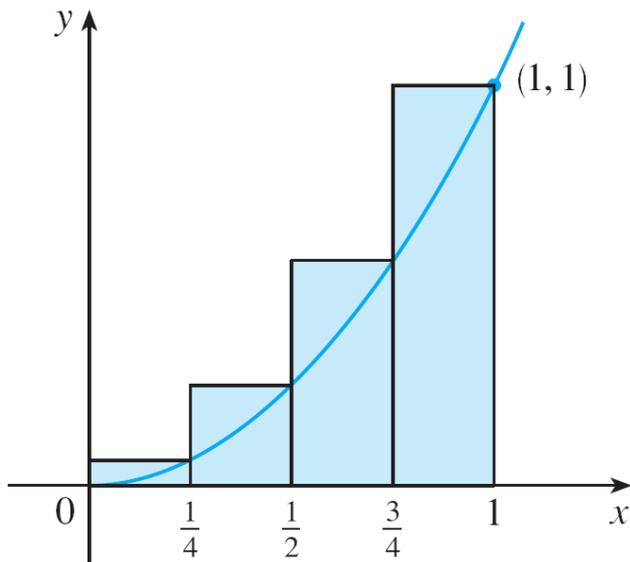


Figura 4(b)

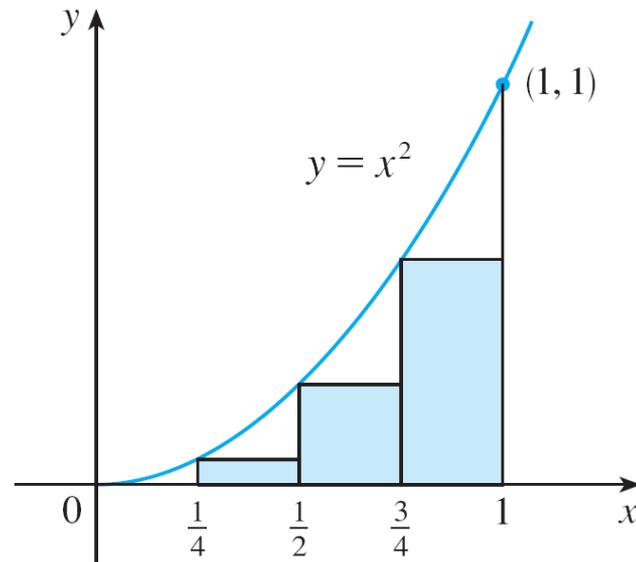


Figura 5

Exemplo 1 – Solução

continuação

A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

Vemos que a área de S é maior que L_4 e, então, temos estimativas inferior e superior para A :

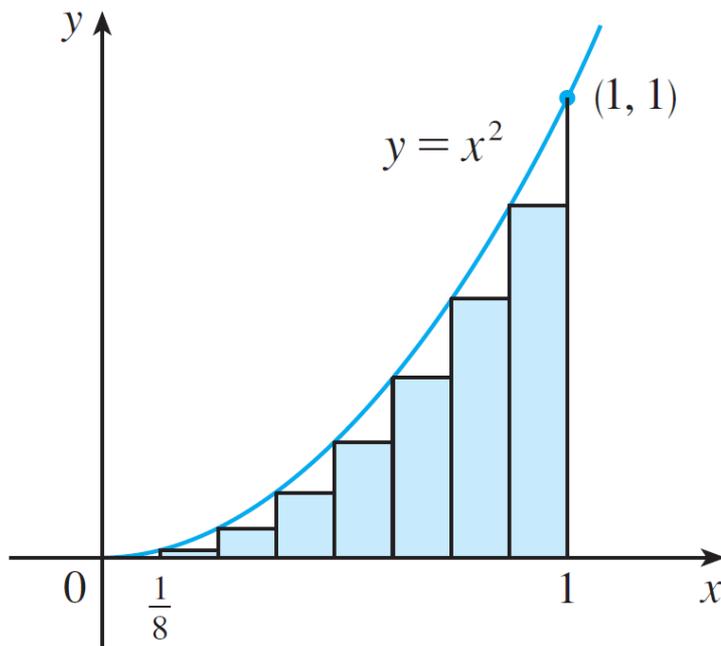
$$0,21875 < A < 0,46875.$$

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas.

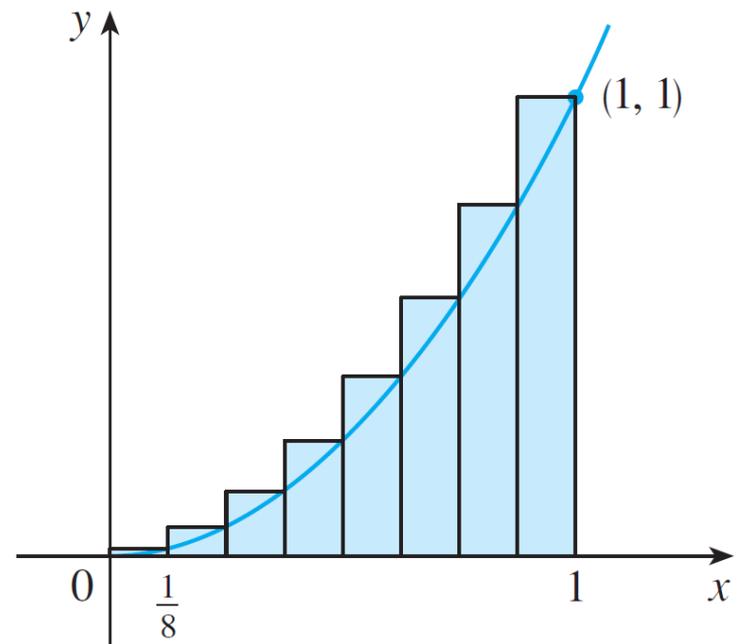
Exemplo 1 – Solução

continuação

Figura 6 mostra o que acontece quando dividimos a região S em oito faixas com a mesma largura.



(a) Usando as extremidades esquerdas



(b) Usando as extremidades direitas

Aproximando S por 8 retângulos

Figura 6

Exemplo 1 – Solução

continuação

Calculando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para A :

$$0,2734375 < A < 0,3984375.$$

Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que a verdadeira área de S está em algum lugar entre 0,2734375 e 0,3984375.

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas.

Exemplo 1 – Solução

continuação

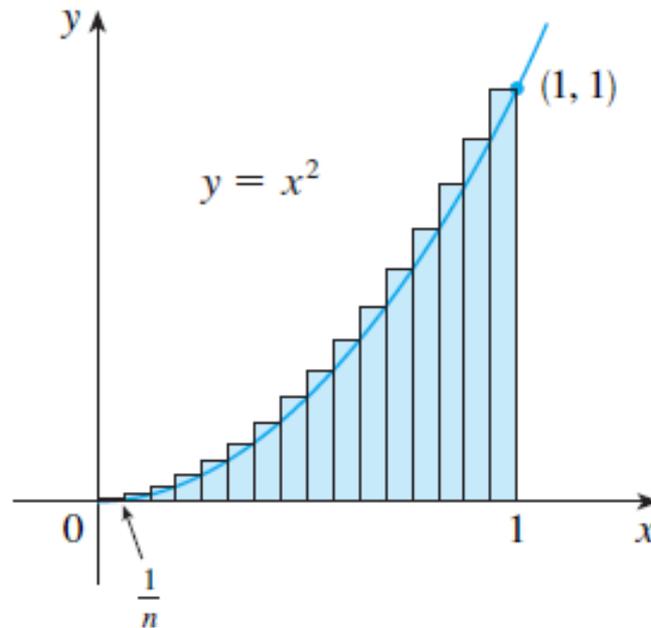
A tabela à direita mostra os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n). Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1.000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0,3333335$.

| n | L_n | R_n |
|------|-----------|-----------|
| 10 | 0,2850000 | 0,3850000 |
| 20 | 0,3087500 | 0,3587500 |
| 30 | 0,3168519 | 0,3501852 |
| 50 | 0,3234000 | 0,3434000 |
| 100 | 0,3283500 | 0,3383500 |
| 1000 | 0,3328335 | 0,3338335 |

O Problema da Área

EXEMPLO 2 Para a região S do Exemplo 1, mostre que a soma das áreas dos retângulos aproximantes superiores tende a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$$



O Problema da Área

SOLUÇÃO R_n é a soma das áreas dos n retângulos na Figura 7. Cada retângulo tem uma largura $1/n$, e as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$ nos pontos $1/n, 2/n, 3/n, \dots, n/n$; isto é, as alturas são $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \dots, (n/n)^2$. Logo,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \end{aligned}$$

Utilizamos aqui a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$\boxed{1} \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

O Problema da Área

Colocando a Fórmula 1 na nossa expressão para R_n , temos

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Então, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} R_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

O Problema da Área

Colocando a Fórmula 1 na nossa expressão para R_n , temos

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Então, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} R_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

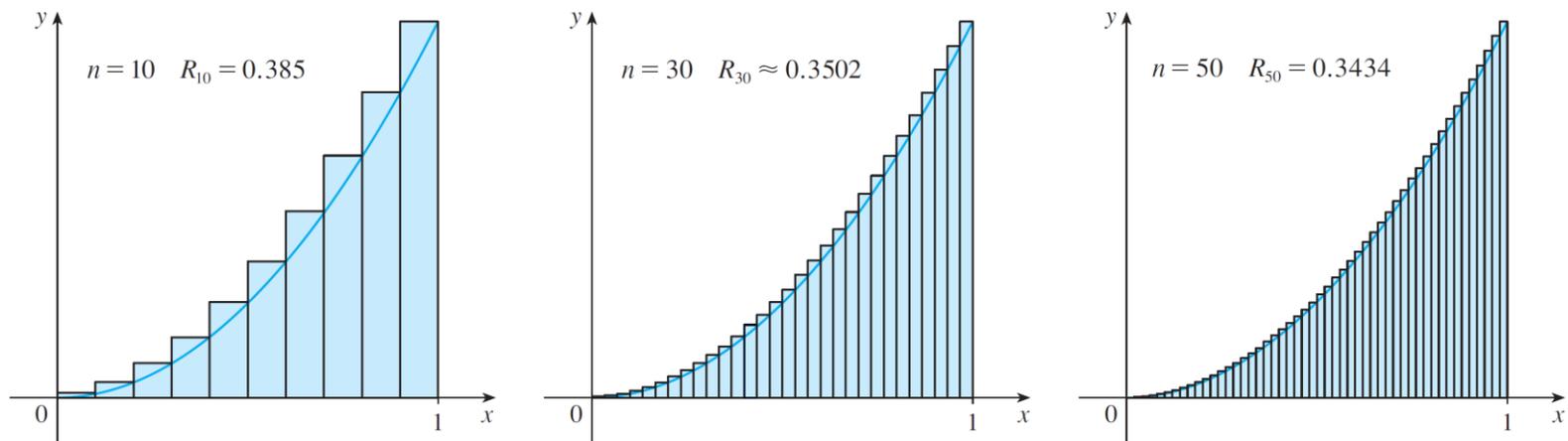
O Problema da Área

Pode ser mostrado que as somas aproximantes inferiores também tendem a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$$

O Problema da Área

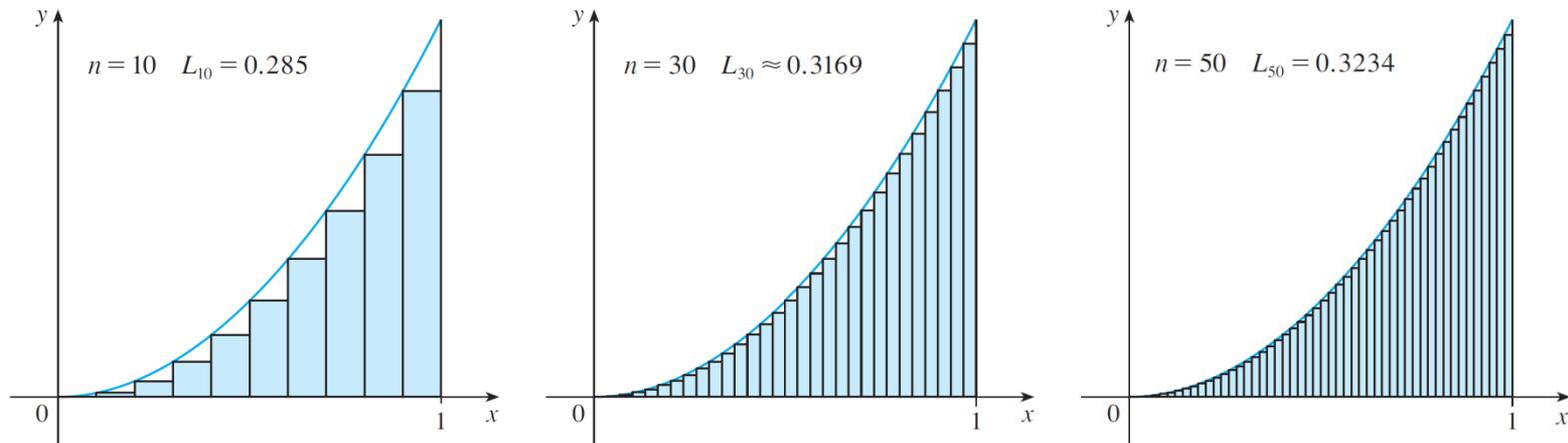
Das Figuras 8 e 9, parece que conforme n aumenta, ambos L_n e R_n se tornam aproximações cada vez melhores à área de S .



As extremidades da direita produzem somas superiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Figura 8

O Problema da Área



As extremidades da esquerda produzem somas inferiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Figura 9

Portanto, *definimos* a área A como o limite das somas das áreas desses retângulos aproximantes. Isto é,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{3}$$

O Problema da Área

Começamos por subdividir S em n faixas S_1, S_2, \dots, S_n de igual largura, como na Figura 10.

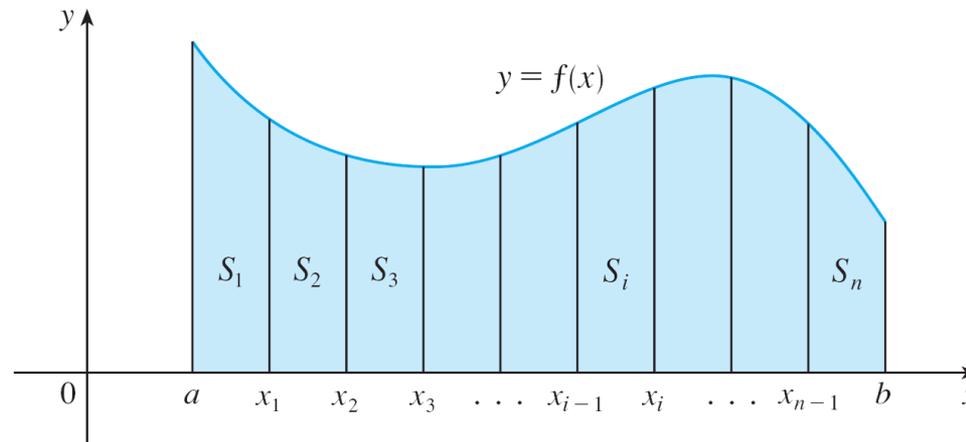


Figura 10

A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$, assim, a largura de cada uma das n faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

O Problema da Área

Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são

$$x_1 = a + \Delta x,$$

$$x_2 = a + 2 \Delta x,$$

$$x_3 = a + 3 \Delta x,$$

⋮

O Problema da Área

Vamos aproximar a i -ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f na extremidade direita (veja a Figura 11).

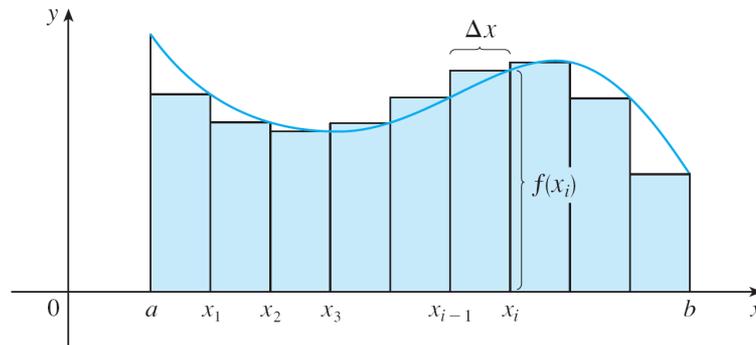


Figura 11

Então, a área do i -ésimo retângulo é $f(x_i) \Delta x$. O que consideramos intuitivamente como a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$R_n = f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_n) \Delta x$$

O Problema da Área

A Figura 12 mostra a aproximação para $n = 2, 4, 8$ e 12 . Observe que essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \rightarrow \infty$.

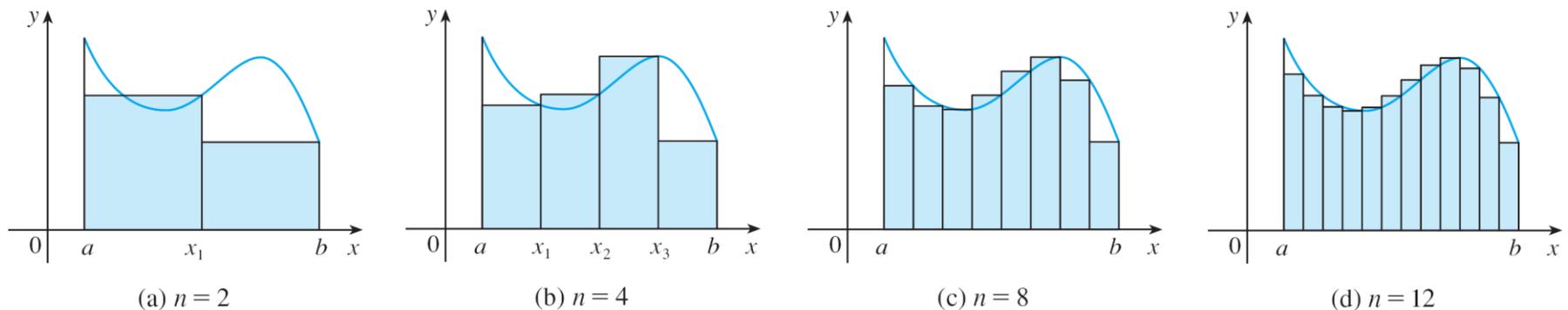


Figura 12

O Problema da Área

Portanto, vamos definir a área A da região S da seguinte forma.

2 Definição A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \cdots + f(x_n) \Delta x].$$

Pode ser demonstrado que o limite na Definição 2 sempre existe, uma vez que estamos supondo que f seja contínua. Pode também ser demonstrado que obteremos o mesmo valor se usarmos as extremidades esquerdas dos aproximantes:

3
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0) \Delta x + f(x_1) \Delta x + \cdots + f(x_{n-1}) \Delta x].$$

O Problema da Área

De fato, em vez de usarmos as extremidades esquerda ou direita, podemos tomar a altura do i -ésimo retângulo como o valor de f em *qualquer* número x_i^* no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Chamamos os números $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ de **pontos amostrais**.

A Figura 13 mostra os retângulos aproximantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades. Logo, uma expressão mais geral para a área S é

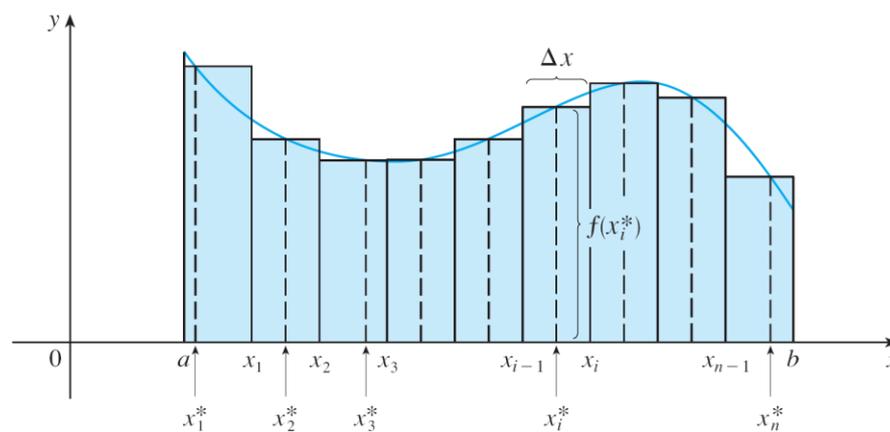


Figura 13

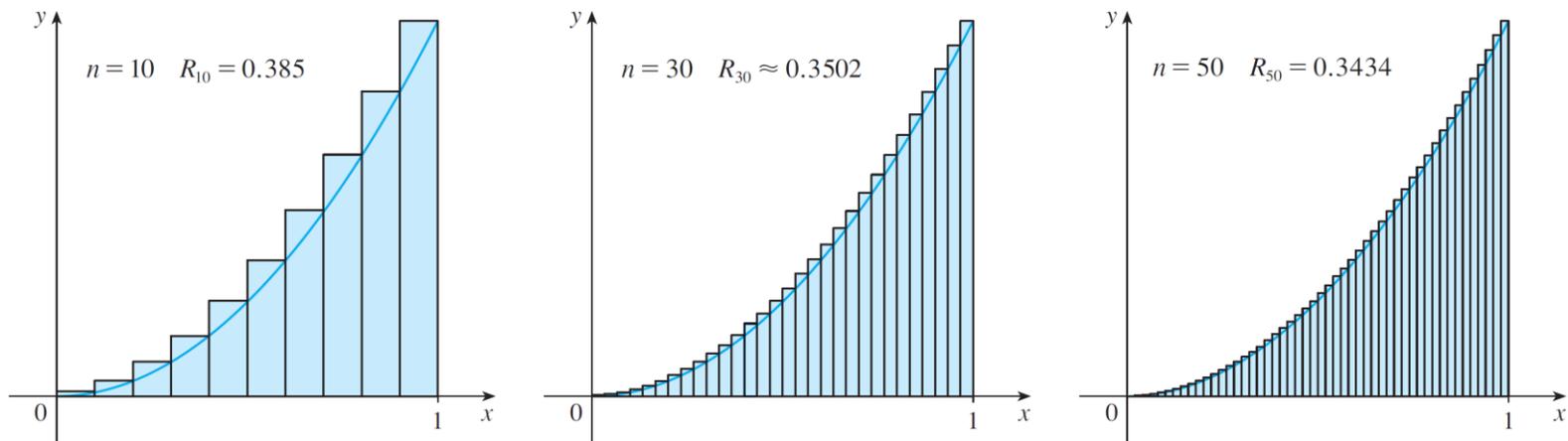
$$4 \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1^*) \Delta x + f(x_2^*) \Delta x + \cdots + f(x_n^*) \Delta x]$$

O Problema da Área

OBSERVAÇÃO Pode ser mostrado que uma definição equivalente de área é a seguinte: *A é o único número que é menor que todas as somas superiores e maior que todas as somas inferiores.* Vimos nesse exemplo que a área ($A = \frac{1}{3}$) está presa entre todas as somas esquerdas aproximadas de L_n e todas as somas direitas aproximadas R_n . A função, nesses exemplos, $f(x) = x^2$, é crescente em $[0, 1]$ e, portanto, suas somas inferiores decorrem das extremidades esquerdas e as somas superiores das extremidades direitas.

O Problema da Área

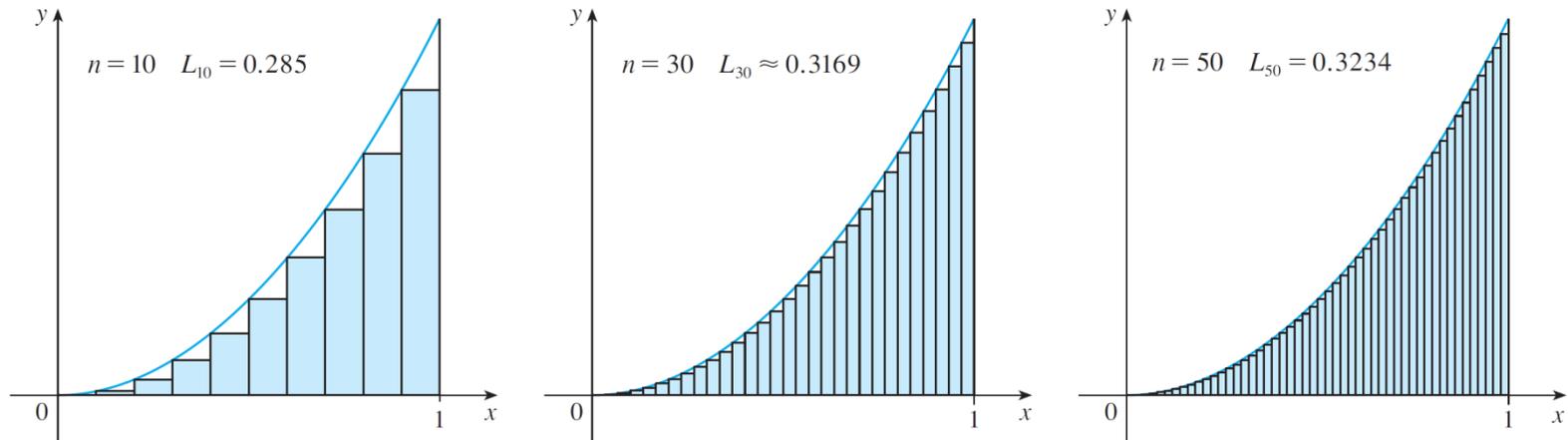
Veja Figuras 8 e 9.



As extremidades da direita produzem somas maiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Figura 8

O Problema da Área

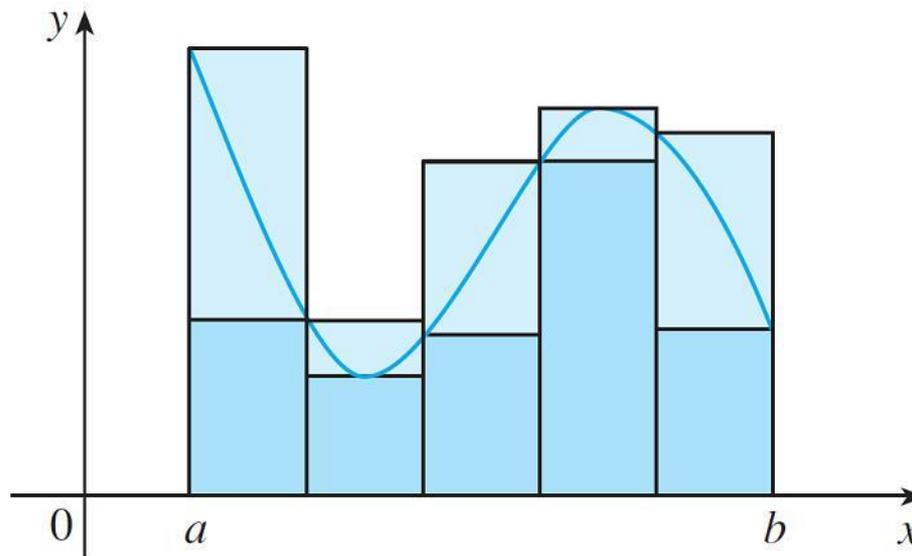


As extremidades da direita produzem somas inferiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Figura 9

O Problema da Área

Em geral formamos as somas **inferiores** (e **superiores**) escolhendo os pontos amostrais x_i^* , de modo que $f(x_i^*)$ é o mínimo (e máximo) valor de f no subintervalo i -ésimo. (Veja Figura 14.)



Somas inferiores (retângulos pequenos) e somas superiores (retângulos grandes)

Figura 14

O Problema da Área

Frequentemente usamos a **notação de somatória** (notação sigma) para escrever somas de muitos termos de maneira mais compacta. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \cdots + f(x_n) \Delta x$$

Assim, as expressões para a área nas Equações 2, 3 e 4 podem ser escritas da seguinte forma:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

O Problema da Área

Isso nos diz para
parar quando $i = n$.

Isso nos diz
para somar.

Isso nos diz para
começar com $i = m$.

$$\sum_{i=m}^n f(x_i) \Delta x$$



O Problema da Distância

O Problema da Distância

Vamos considerar um *problema da distância*: encontre a distância percorrida por um objeto durante um certo período de tempo, sendo que a velocidade do objeto é conhecida em todos os instantes. Se a velocidade permanece constante, então o problema da distância é fácil de resolver por meio da fórmula

$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}.$$

Mas se a velocidade variar, não é tão fácil determinar a distância percorrida.

Exemplo 4

Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:

| | | | | | | | |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| Tempo (s) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| Velocidade (km/h) | 27 | 34 | 38 | 46 | 51 | 50 | 45 |

Para termos o tempo e a velocidade em unidades consistentes, vamos converter a velocidade para metros por segundo ($1 \text{ km/h} = 1.000/3.600 \text{ m/s}$):

| | | | | | | | |
|------------------|-----|-----|------|------|------|------|------|
| Tempo (s) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| Velocidade (m/s) | 7,5 | 9,4 | 10,6 | 12,8 | 14,2 | 13,9 | 12,5 |

Exemplo 4

continuação

Durante os cinco primeiros segundos a velocidade não varia muito, logo, podemos estimar a distância percorrida durante esse tempo supondo que a velocidade seja constante. Se tomarmos a velocidade durante aquele intervalo de tempo como a velocidade inicial (7,5 m/s), então obteremos aproximadamente a distância percorrida durante os cinco primeiros segundos:

$$7,5 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 37,5 \text{ m.}$$

Exemplo 4

continuação

Analogamente, durante o segundo intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente constante, e vamos considerá-la quando $t = 5$ s. Assim, a nossa estimativa para a distância percorrida a partir de $t = 5$ s a $t = 10$ s é

$$9,4 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 47 \text{ m.}$$

Adicionando estimativas similares para os outros intervalos de tempo, obtemos uma estimativa para a distância total percorrida:

$$(7,5 \times 5) + (9,4 \times 5) + (10,6 \times 5) + (12,8 \times 5) + (14,2 \times 5) + (13,9 \times 5) = 342 \text{ m.}$$

Exemplo 4

continuação

Podemos, da mesma forma, usar a velocidade no *fim* de cada intervalo de tempo em vez de no começo como a velocidade constante. Então, nossa estimativa se torna

$$(9,5 \times 5) + (10,6 \times 5) + (12,8 \times 5) + (14,2 \times 5) + (13,9 \times 5) + (12,5 \times 5) = 367 \text{ m.}$$

Se quisermos uma estimativa mais precisa, podemos tomar as leituras de velocidade a cada 2 segundos ou até mesmo a cada segundo.

O Problema da Distância

Em geral, suponha que o objeto se move com velocidade $v = f(t)$, em que $a \leq t \leq b$ e $f(t) \geq 0$ (logo, o objeto move-se sempre no sentido positivo). Vamos registrar as velocidades nos instantes $t_0 (= a)$, t_1 , $t_2, \dots, t_n (= b)$ de forma que a velocidade seja aproximadamente constante em cada subintervalo. Se esses tempos forem igualmente espaçados, então entre duas leituras consecutivas temos o período de tempo $\Delta t = (b - a)/n$. Durante o primeiro intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente $f(t_0)$ e, portanto, a distância percorrida é de aproximadamente $f(t_0) \Delta t$.

O Problema da Distância

Analogamente, a distância percorrida durante o segundo intervalo de tempo é de cerca de $f(t_1) \Delta t$ a distância total percorrida durante o intervalo de tempo $[a, b]$ é de aproximadamente

$$f(t_0) \Delta t + f(t_1) \Delta t + \cdots + f(t_{n-1}) \Delta t = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \Delta t$$

Se usarmos as velocidades nas extremidades direitas em vez de nas extremidades esquerdas, nossa estimativa para a distância total ficará

$$f(t_1) \Delta t + f(t_2) \Delta t + \cdots + f(t_n) \Delta t = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t$$

O Problema da Distância

Quanto mais frequentemente medirmos a velocidade, mais precisa nossa estimativa, então parece plausível que a distância *exata* d percorrida é o *limite* de tais expressões:

$$\boxed{5} \quad d = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \Delta t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t$$