4

Aplicações de Derivação

4.4 Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital

Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital

Suponha que estejamos tentando analisar o comportamento da função

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Apesar de F não ser definido em $x = 1$, precisamos saber como F se comporta *próximo a* 1. Em particular, gostaríamos de saber o valor do limite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital

No cálculo desse limite não podemos aplicar a Propriedade 5 dos Limites, pois o limite do denominador é 0. De fato, embora o limite em $\boxed{1}$ exista, seu valor não é óbvio, porque tanto o numerador como o denominador tendem a 0 e $\frac{0}{0}$ não está definido.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, então o limite pode ou não existir, e é chamado **forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$**.

Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital

Por funções racionais, podemos cancelar os fatores comuns:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Usamos um argumento geométrico para mostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Formas Indeterminadas e Regra de l’Hôspital

Mas esses métodos não funcionam para limites tais como $\boxed{1}$, de modo que nesta seção introduzimos um método sistemático, conhecido como *a Regra de l’Hôspital*, para o cálculo de formas indeterminadas.

Outra situação na qual um limite não é óbvio ocorre quando procuramos uma assíntota horizontal de *F* e precisamos calcular o limite

$$\boxed{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Não é óbvio como calcular esse limite, pois tanto o numerador como o denominador tornam-se muito grandes quando $x \to \infty$.

Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital

Há uma disputa entre o numerador e o denominador. Se o numerador ganhar, o limite será ∞; se o denominador ganhar, a resposta será 0. Ou pode haver algum equilíbrio e, nesse caso, a resposta será algum número positivo finito.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) e $g(x) \to \infty$ (ou $-\infty$), então o limite pode ou não existir, e é chamado **forma indeterminada do tipo** ∞/∞.

Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital

Esse tipo de limite pode ser calculado para certas funções – incluindo aquelas racionais – dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de *x* que ocorre no denominador. Por exemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

Esse método não funciona para um limite como $\boxed{2}$.

Formas Indeterminadas e Regra de l’Hôspital

A Regra de l’Hospital’ aplica-se também a esse tipo de forma indeterminada.

Regra de l’Hôspital Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital

Observação 1 A Regra de l'Hôspital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É especialmente importante verificar as condições relativas aos limites de f e g antes de usar a Regra de l'Hôspital.

OBSERVAÇÃO 2 A Regra de l'Hôspital é válida também para os limites laterais e para os limites no infinito ou no infinito negativo; isto é, "$x \to a$" pode ser substituído por quaisquer dos símbolos a seguir: $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, ou $x \to -\infty$.

Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital

Observação 3 Para o caso especial no qual

$f(a) = g(a) = 0$, f' e g' são contínuas, e $g'(a) \neq 0$, é fácil ver por que a Regra de L'Hôspital é verdadeira. De fato, usando a forma alternativa da definição de derivada, temos

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad [\text{Já que } f(a) = g(a) = 0]$$

É mais difícil de provar a versão geral da Regra de l'Hôspital.

Exemplo 1

Encontre $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

Solução: Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

o limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Podemos aplicar a Regra de l'Hôspital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

Produtos Indeterminados

Produtos Indeterminados

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não está claro que valor de $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)]$, se houver algum. Há uma disputa entre f e g. Se f ganhar, a resposta é 0; se g vencer, a resposta será ∞ (ou $-\infty$). Ou pode haver um equilíbrio, e então a resposta é um número finito diferente de zero. Esse tipo de limite é chamado forma **indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$**. Podemos lidar com ela escrevendo o produto fg como um quociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{ou} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o limite dado na forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞ de modo que podemos usar a Regra de L'Hôspital.

Exemplo 6

Calcule $\lim_{x \to 0^+} x \ln x.$

Solução: O limite dado é indeterminado, pois, como $x \to 0^+$, o primeiro fator (x) tende a 0, enquanto o segundo fator (ln x) tende a $-\infty$. Escrevendo $x = 1/(1/x)$, temos $1/x \to \infty$ quando $x \to 0^+$, logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Produtos Indeterminados

Observação Ao resolver o Exemplo 6, outra opção possível seria escrever

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Isso dá uma forma indeterminada do tipo 0/0, mas, se aplicarmos a Regra de l'Hôspital, obteremos uma expressão mais complicada do que a que começamos.

Em geral, quando reescrevemos o produto indeterminado, tentamos escolher a opção que leva a um limite mais simples.

Diferenças Indeterminadas

Diferenças Indeterminadas

Se $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, então o limite

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$$

é chamado forma **indeterminada do tipo** $\infty - \infty$. De novo, há uma disputa entre *f* e *g*. A resposta será ∞ (se *f* ganhar) ou será $-\infty$ (se *g* ganhar), ou haverá entre eles um equilíbrio, resultando um número finito? Para descobrirmos, tentamos converter a diferença em um quociente (usando um denominador comum ou racionalização, ou pondo em evidência um fator em comum, por exemplo), de maneira a termos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞ / ∞.

Exemplo 7

Calcule $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$.

Solução: Observe primeiro que 1/(ln *x*) $\to \infty$ e 1/(x – 1) $\to$ quando x $\to 1^+$; logo, o limite é indeterminado do tipo $\infty - \infty$. Aqui podemos começar com um denominador comum:

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1)/\ln x}$$

Exemplo 7

Tanto o numerador quanto o denominador tem limite 0, de modo que a regra de l´Hospital se aplica, fornecendo

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1)\ln x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{(1 + x) \cdot \dfrac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{x - 1 + x \ln x}$$

$$\frac{0}{0}$$

Exemplo 7

Novamente, temos um limite indeterminado do tipo , de modo que aplicamos a regra de l’Hospital uma segunda vez:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{x - 1 + x \ln x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1 + x \cdot \dfrac{1}{x} + \ln x}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2 + \ln x} = \frac{1}{2}$$

Potências Indeterminadas

Potências Indeterminadas

Várias formas indeterminadas surgem do limite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0.

2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0,

3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞.

Potências Indeterminadas

Cada um dos três casos pode ser tratado tanto tomando o logaritmo natural:

seja $y = [f(x)]^{g(x)}$, então $\ln y = g(x) \ln f(x)$,

quanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Em qualquer método, somos levados a um produto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que é do tipo $0 \cdot \infty$.

Exemplo 9

Calcule $\lim_{x \to 0^+} (1 + \text{sen } 4x)^{\text{cotg } x}$.

Solução: Observe primeiro que, quando $x \to 0^+$, temos $1 + \text{sen } 4x \to 1$ e $\text{cotg } x \to \infty$, assim, o limite dado é indeterminado $(\text{tipo } 1^\infty)$. Seja

$$y = (1 + \text{sen } 4x)^{\text{cotg } x}.$$

Então $\ln y = \ln[(1 + \text{sen } 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \text{sen } 4x)$

$$= \frac{\ln(1 + \text{sen } 4x)}{\text{tg } x}$$

Exemplo 9 – *Solução*

continuação

e logo, a Regra de l’Hôspital fornece

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Até agora calculamos o limite de ln *y*, mas o que realmente queremos é o limite de *y*. Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$