4

Aplicações de Derivação

4.3 Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico

O Que *f'* Diz sobre *f* ?

O Que f' Diz sobre f ?

Para ver como a derivada de *f* pode nos dizer onde uma função é crescente ou decrescente, observe a Figura 1.

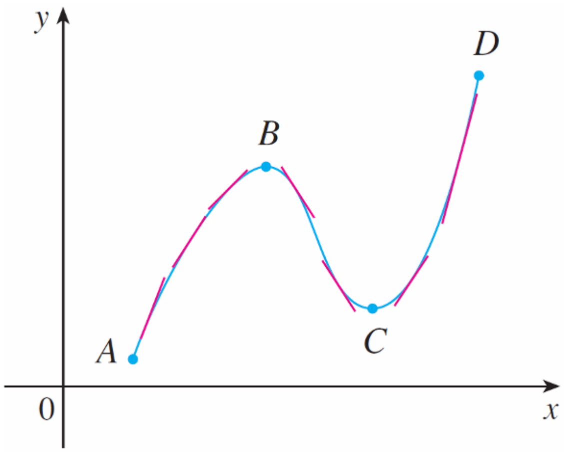


Figura 1

Entre *A* e *B* e entre *C* e *D*, as retas tangentes têm inclinação positiva e, portanto, $f'(x) > 0$.

O Que f' Diz sobre f ?

Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa e, portanto, $f'(x) < 0$. Assim, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é sempre válido, vamos usar o Teorema do Valor Médio.

Teste Crescente/Decrescente

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

Exemplo 1

Encontre onde a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e onde ela é decrescente.

Solução:

Começamos derivando f:

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$

Para usarmos o Teste C/D, devemos saber onde $f'(x) > 0$ e onde $f'(x) < 0$. Para resolver essas inequações, primeiro encontramos onde $f'(x) = 0$, ou seja, em $x = 0$, 2 e -1. Esses são os números críticos de f e eles dividem o domínio em quatro intervalos (veja a reta numérica abaixo).

Dentro de cada intervalo, $f'(x)$ precisa ser sempre positiva ou sempre negativa.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Podemos determinar qual é o caso em cada inter- valo a partir dos sinais dos três fatores de $f'(x)$, ou seja, 12x, x – 2 e x + 1, como mostrado na tabela a seguir.

Por exemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, de modo que f é decrescente em (0, 2). (Também seria verdade dizer que f é decrescente no intervalo fechado [0, 2].)

Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(2, \infty)$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

O gráfico de *f* mostrado na Figura 2 confirma a informação dada na tabela.

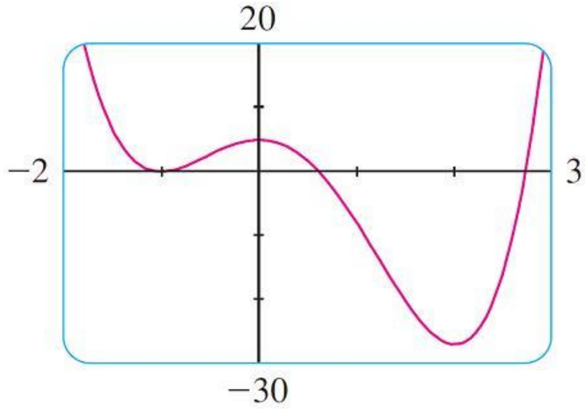


Figura 2

Valores Extremos Locais

Valores Extremos Locais

Você pode ver a partir da Figura 2 que $f(0) = 5$ é um valor máximo local de f, pois f cresce em $(-1, 0)$ e decresce em $(0, 2)$. Ou, em termos derivados, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ e $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. Em outras palavras, o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0. Essa observação é a base do teste a seguir.

Teste da Primeira Derivada Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

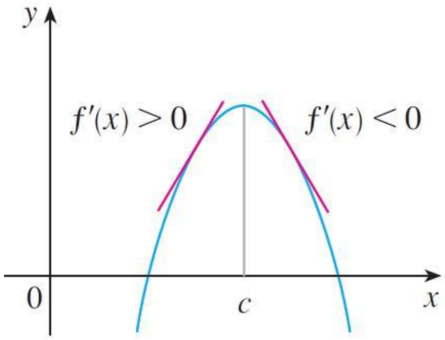
(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' é positiva à esquerda e a direita de c, ou negativa à esquerda e à direita de c, então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

Valores Extremos Locais

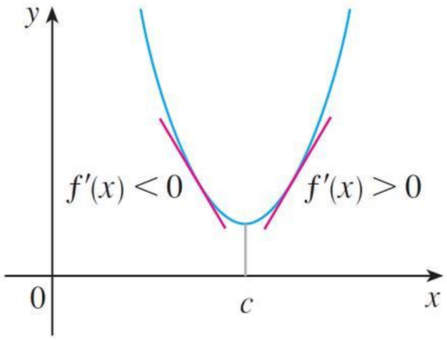
O Teste da Primeira Derivada é uma consequência do Teste C/D. Na parte (a), por exemplo, uma vez que o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, f é crescente à esquerda de c decrescente à direita de c. A consequência é que f tem um máximo local em c.

É fácil memorizar o Teste da Primeira Derivada visualizando diagramas como os da Figura 3.



Máximo local

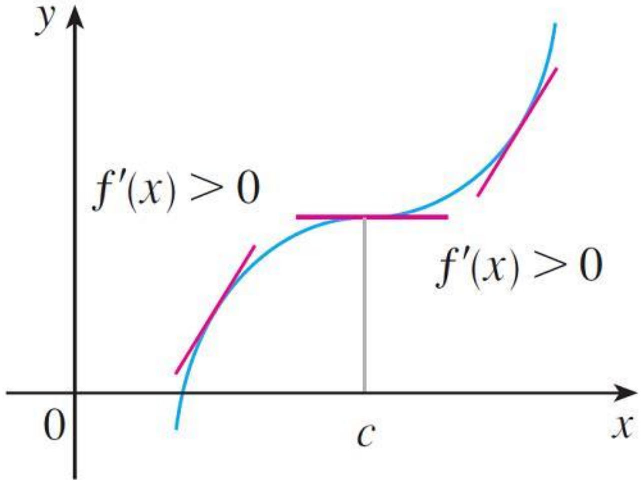
Figura 3(a)



Mínimo local

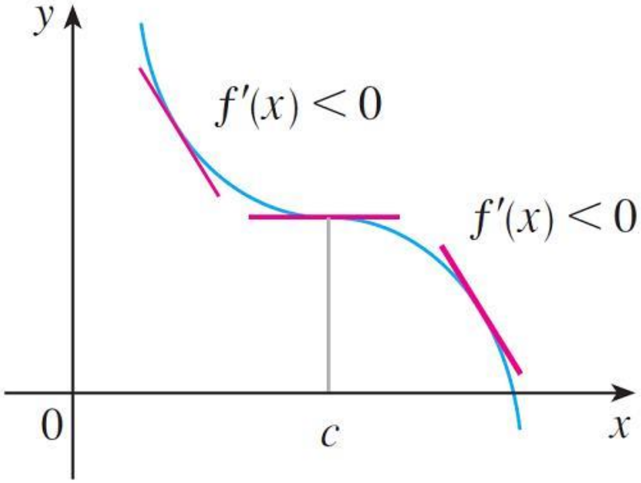
Figura 3(b)

O Que f' Diz sobre f ?



Nem máximo, nem mínimo

Figura 3(c)



Nem máximo, nem mínimo

Figura 3(d)

Exemplo 3

Encontre os valores de máximos e mínimos locais da função

$$g(x) = x + 2 \text{ sen } x \qquad\qquad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Solução: Começamos encontrando os números críticos. A derivada é:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x.$$

Logo $g'(x) = 0$ quando $\cos x = -\frac{1}{2}$. As soluções desta equação são $2\pi/3$ e $4\pi/3$.

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Como g é derivável em toda parte, os únicos números críticos são $2\pi/3$ e $4\pi/3$ e, portanto, analisamos g na tabela a seguir.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	$+$	crescente em $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	$-$	decrescente em $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	$+$	crescente em $(4\pi/3, 2\pi)$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Como o sinal de $g'(x)$ muda de positivo para negativo em $2\pi/3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que há um máximo local em $2\pi/3$ e o valor máximo local é

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3{,}83.$$

Da mesma forma, o sinal de $g'(x)$, muda de negativo para positivo em $4\pi/3$, então

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2{,}46$$

é um valor mínimo local.

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

O gráfico de *g* na Figura 4 confirma nossa conclusão.

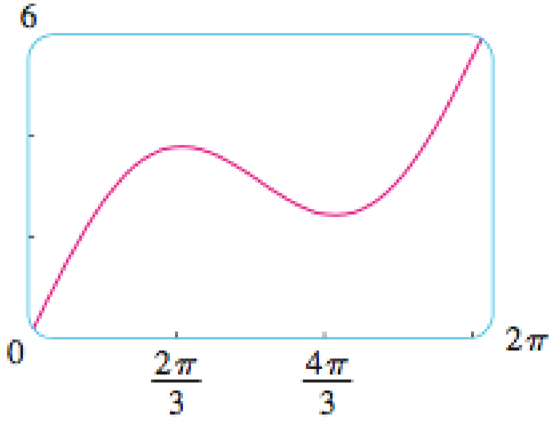


FIGURA 4
$g(x) = x + 2 \text{ sen } x$

O que f'' Nos Diz sobre f ?

O que f'' Nos Diz Sobre f ?

A Figura 5 mostra os gráficos de duas funções crescentes em (a, b). Ambos os gráficos unem o ponto A ao B, mas eles são diferentes, pois se inclinam em direções diferentes.

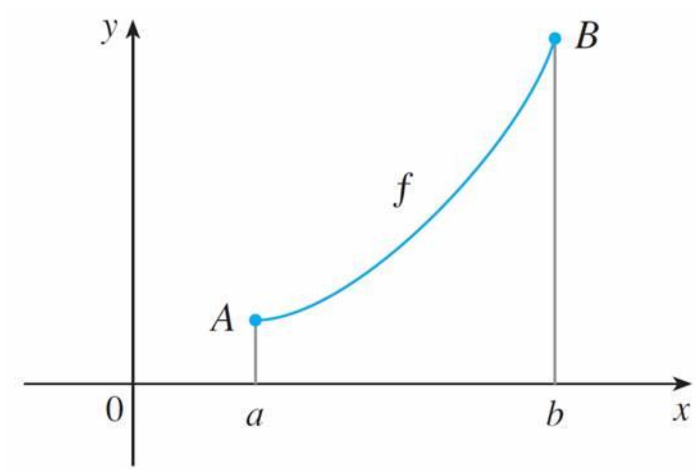


Figura 5(a)

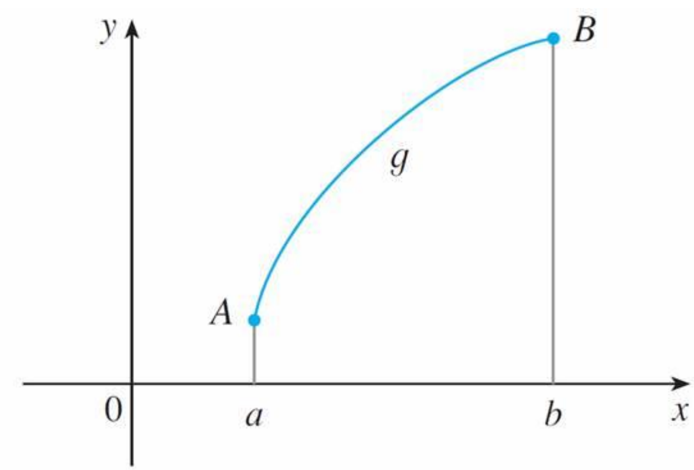
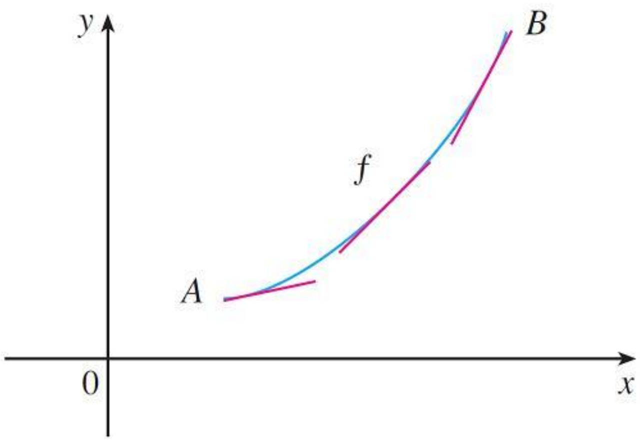


Figura 5(b)

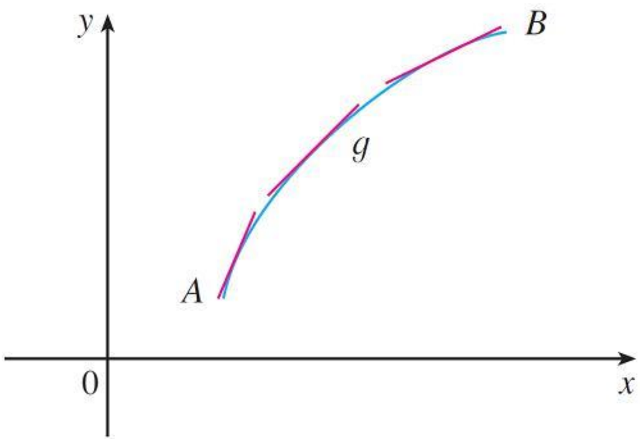
O que f'' Nos Diz Sobre f ?

Na Figura 6, as tangentes a essas curvas foram traçadas em vários pontos. Na parte (a), a curva fica acima das tangentes e f é chamada *côncava para cima* em (a, b). Em (b), a curva está abaixo das tangentes g e é chamada *côncava para baixo* em (a, b).



Côncava para cima

Figura 6(a)



Côncava para baixo

Figura 6(b)

O que f'' Nos Diz Sobre f ?

Definição Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então f é chamada **côncava para cima** em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, então f é chamada **côncava para baixo** em I.

A Figura 7 mostra o gráfico de uma função que é côncava para cima (abrevia-se CC) nos intervalos (b, c), (d, e) e (e, p), e côncava para baixo (CB) nos intervalos (a, b), (c, d) e (p, q).

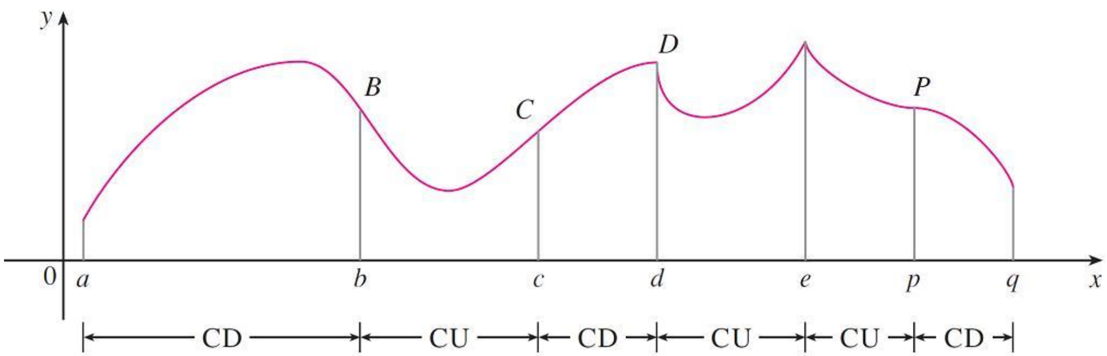
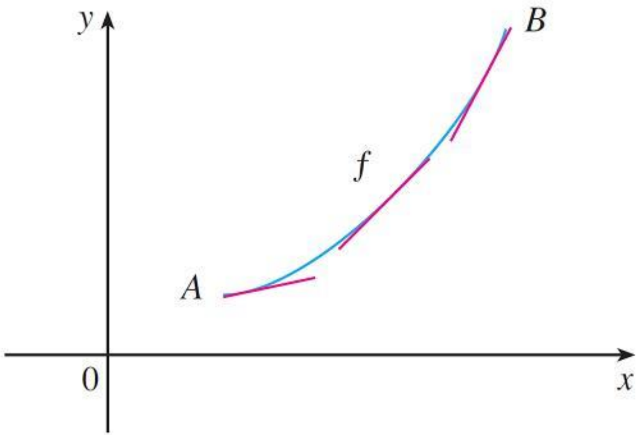


Figura 7

O que *f″* Nos Diz Sobre *f* ?

Vamos observar como a segunda derivada nos ajuda a determinar os intervalos de concavidade. Olhando para a Figura 6(a), você pode ver que, indo da esquerda para a direita, a inclinação da tangente cresce.

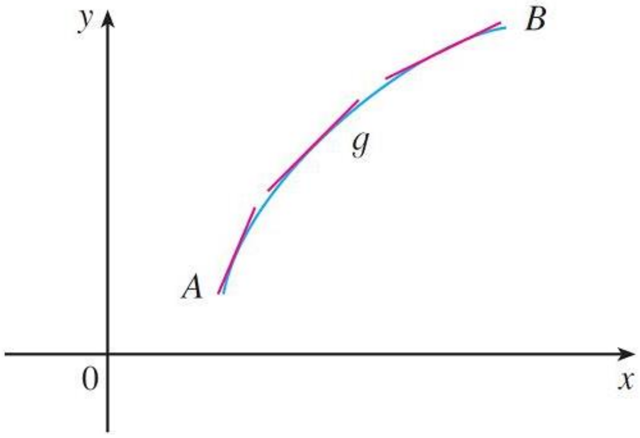


Côncava para cima

Figura 6(a)

O que f'' Nos Diz Sobre f ?

Isso significa que a derivada f' é uma função crescente e, consequentemente, sua derivada f'' é positiva. Da mesma forma, na Figura 6(b) a inclinação da tangente decresce da esquerda para a direita; logo, f' decresce e, portanto, f'' é negativa.



Côncava para baixo

Figura 6(b)

O que f'' Nos Diz Sobre f ?

Esse raciocínio pode ser invertido e sugere que o teorema a seguir é verdadeiro.

Teste da Concavidade

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

Exemplo 4

A Figura 8 mostra um gráfico da população de abelhas cipriotas criadas em um apiário. Como cresce a taxa populacional? Quando essa taxa é mais alta? Sobre quais intervalos *P* é côncavo para cima ou côncavo para baixo?

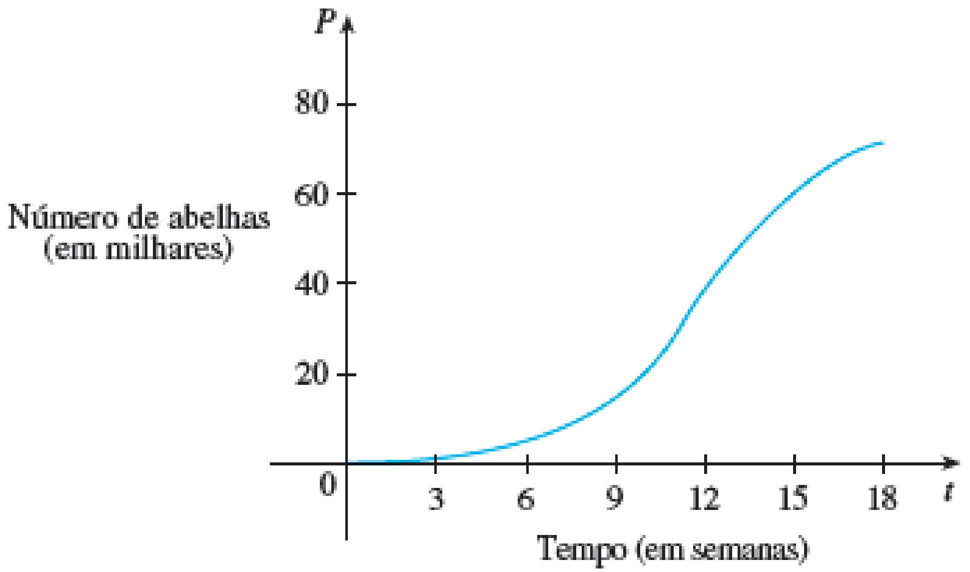


Figura 8

Exemplo 4 – *Solução*

Examinando a inclinação da curva quando t cresce, vemos que a taxa de crescimento populacional é inicialmente muito pequena, então se torna maior até atingir o máximo em cerca de $t = 12$ semanas, e decresce até a população se estabilizar. À medida que a população tende a seu valor máximo de cerca de 75.000 (chamada *capacidade de suporte*), a taxa de crescimento, $P'(t)$, tende a 0. A curva parece ser côncava para cima em (0, 12) e côncava para baixo em (12,18).

O que f'' Nos Diz Sobre f ?

Definição Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Teste da Segunda Derivada Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c.

(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Exemplo 6

Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação à concavidade, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais. Use essa informação para esboçar a curva.

Solução: Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3),$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Para acharmos os números críticos, fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = 3$. Para usar o Teste da Segunda Derivada, calculamos f'' nesses pontos críticos:

$$f''(0) = 0, \qquad\qquad f''(3) = 36 > 0.$$

Uma vez que $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ é um mínimo local. [Na verdade, a expressão para $f'(x)$ mostra que f decresce à esquerda de 3 e cresce à direita de 3.]

Uma vez que $f''(0) = 0$, o Teste da Segunda Derivada não fornece informações sobre o número crítico 0.

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Mas, uma vez que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e também para $0 < x < 3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que f não tem um máximo ou mínimo local em 0. Como $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou 2, dividimos a reta real em intervalos com esses números como extremidades e completamos a seguinte tabela.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x-2)$	Concavidade
$(-\infty, 0)$	$+$	para cima
$(0, 2)$	$-$	para baixo
$(2, \infty)$	$+$	para cima

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

O ponto (0,0) é um ponto de inflexão, uma vez que a curva muda de côncava para cima para côncava para baixo aí. Também (2, –16) é um ponto de inflexão, uma vez que é ali que a curva muda de côncava para baixo para côncava para cima.

Usando o mínimo local, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão, esboçamos a curva na Figura 11.

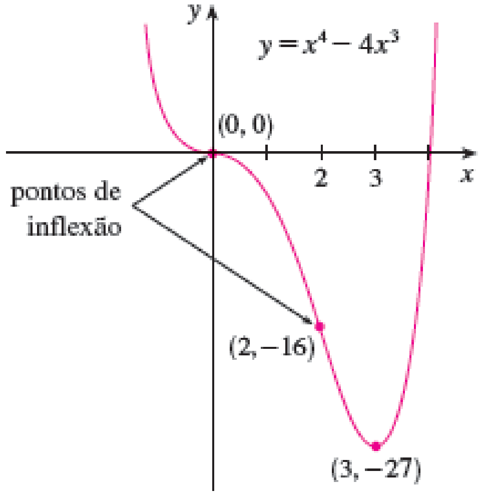


Figura 11

O que f'' Nos Diz Sobre f ?

OBSERVAÇÃO O Teste da Segunda Derivada é inconclusivo quando $f''(c) = 0$. Em outras palavras, esse ponto pode ser um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois (como no Exemplo 6). Esse teste também falha quando $f''(c)$ não existe. Em tais casos, o Teste da Primeira Derivada deve ser usado. De fato, mesmo quando ambos os testes são aplicáveis, o Teste da Primeira Derivada é frequentemente mais fácil de aplicar.

Exemplo 7

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$.

Solução: O cálculo das duas primeiras derivadas dá

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

Uma vez que $f'(x) = 0$ quando $x = 4$ e $f'(x)$ não existe quando $x = 0$ ou $x = 6$, os números críticos são 0, 4 e 6.

Intervalo	$4 - x$	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	−	+	−	decrescente em $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	crescente em $(0, 4)$
$4 < x < 6$	−	+	+	−	decrescente em $(4, 6)$
$x > 6$	−	+	+	−	decrescente em $(6, \infty)$

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Para encontramos os valores extremos locais, usamos o Teste da Primeira Derivada. Uma vez que o sinal de f' muda de negativo para positivo em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local. Já que o sinal de f' muda de positivo para negativo em 4, $f(4) = 2^{5/3}$ é um máximo local. O sinal de f' não muda em 6; logo, não há nem mínimo, nem máximo aí. (O Teste de Segunda Derivada poderia ser usado em 4, mas não em 0 ou 6, uma vez que f'' não existe aí.)

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Examinando a expressão $f''(x)$ para e observamos que $x^{4/3} \geq 0$ para todos x, temos $f''(x) < 0$ para $x < 0$ e para $0 < x < 6$ e $f''(x) > 0$ para $x > 6$. Logo, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e $(0, 6)$ e côncava para cima em $(6, \infty)$, e o único ponto de inflexão é $(6, 0)$.

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

O gráfico está esboçado na Figura 12.

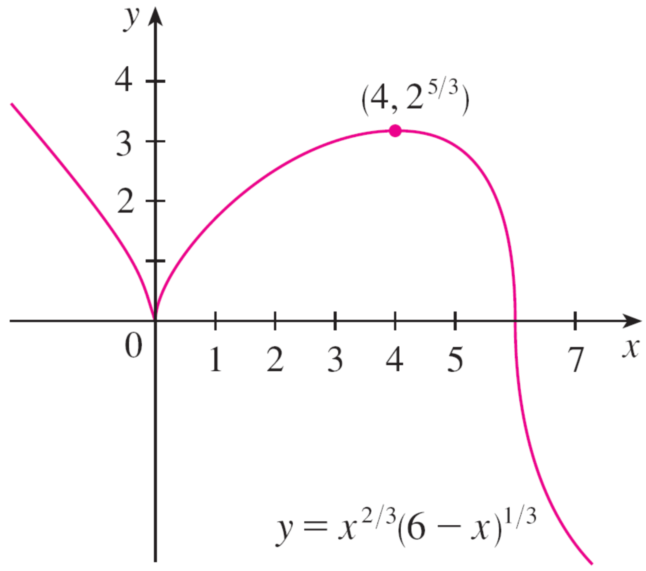


Figura 12

Observe que a curva tem tangentes verticais em (0,0) e (6,0), pois $|f'(x)| \to \infty$ quando $x \to 0$ e quando $x \to 6$.