3 Regras de Derivação

3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais

Aproximações Lineares e Diferenciais

Vimos que uma curva fica muito perto de sua reta tangente nas proximidades do ponto de tangência. Na realidade, dando um *zoom* em torno de um ponto sobre o gráfico de uma função derivável, notamos que o gráfico se assemelha cada vez mais à sua reta tangente. Essa observação é a base para um método de encontrar valores aproximados de funções.

A ideia é que pode ser fácil calcular um valor $f(a)$ de uma função, mas difícil (ou mesmo impossível) calcular os valores de f em pontos próximos.

Aproximações Lineares e Diferenciais

Assim, nos contentamos com os valores facilmente calculados da função linear L , cujo gráfico é a reta tangente a f em $(a, f(a))$ (veja a Figura 1).

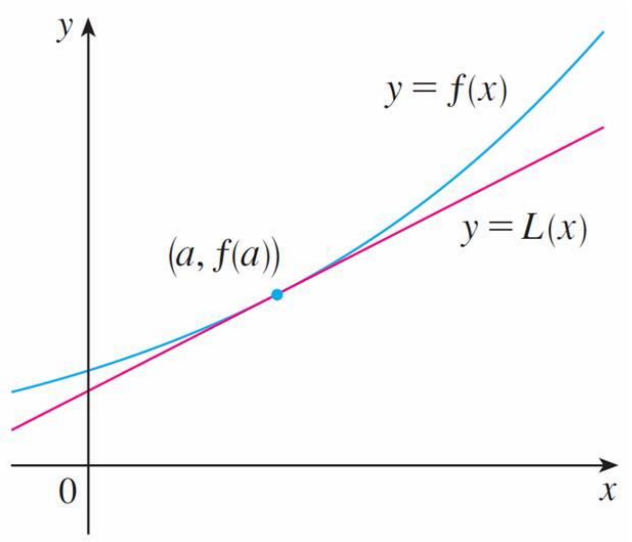

Figura 1

Aproximações Lineares e Diferenciais

Em outras palavras, usamos a reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para a curva $y = f(x)$ quando x estiver próximo de a. Uma equação dessa reta tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

e a aproximação

$$\boxed{1} \qquad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

é denominada **aproximação linear** ou **aproximação pela reta tangente** de f em a.

Aproximações Lineares e Diferenciais

A função linear cujo gráfico é essa reta tangente, ou seja,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é denominada **linearização** de f em a.

Exemplo 1

Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ em $a = 1$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{3.98}$ e $\sqrt{4.05}$. Essas aproximações estão superestimadas ou subestimadas?

Solução: A derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ é

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

e assim temos $f(1) = 2$ e $f'(1) = \frac{1}{4}$.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Colocando esses valores na Equação 2, vemos que a linearização é

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

A aproximação linear correspondente $\boxed{1}$ é

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(quando } x \text{ está próximo de 1).}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Em particular, temos

$$\sqrt{3{,}98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0{,}98}{4} = 1{,}995 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{4{,}05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1{,}05}{4} = 2{,}0125$$

A aproximação linear está ilustrada na Figura 2.

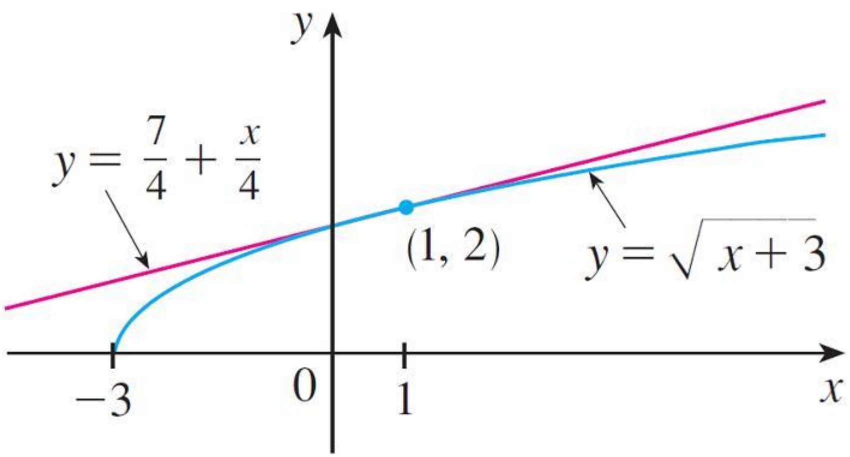

Figura 2

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Vemos que, realmente, a aproximação pela reta tangente é uma boa aproximação para a função dada quando *x* está próximo de 1. Vemos também que nossas aproximações são superestimadas, pois a reta tangente está acima da curva.

Naturalmente, uma calculadora nos daria aproximações para $\sqrt{3,98}$ e $\sqrt{4,05}$, mas a aproximação linear funciona *em todo um intervalo.*

Aproximações Lineares e Diferenciais

Na tabela a seguir comparamos as estimativas da aproximação linear do Exemplo 1 com os valores verdadeiros.

	x	De $L(x)$	Valor Real
$\sqrt{3,9}$	0,9	1,975	1,97484176 . . .
$\sqrt{3,98}$	0,98	1,995	1,99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2,00000000 . . .
$\sqrt{4,05}$	1,05	2,0125	2,01246117 . . .
$\sqrt{4,1}$	1,1	2,025	2,02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2,25	2,23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2,5	2,44948974 . . .

Aproximações Lineares e Diferenciais

Observe na tabela, e também na Figura 2, que a aproximação pela reta tangente dá boas estimativas quando *x* está próximo de 1, mas a precisão da aproximação deteriora à medida que *x* se afasta de 1.

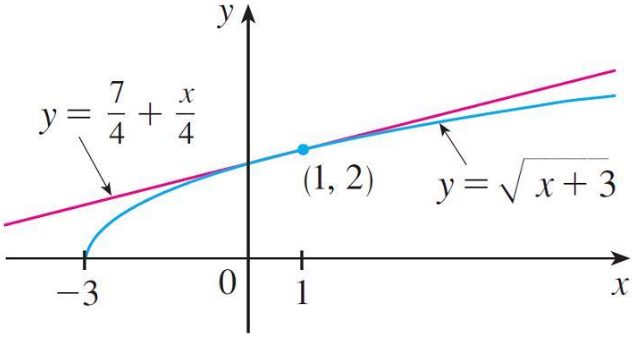

Figura 2

Aproximações Lineares e Diferenciais

O exemplo a seguir mostra que usando uma calculadora gráfica ou computador podemos determinar o intervalo dentro do qual uma aproximação linear fornece uma precisão especificada.

Exemplo 2

Para que valores de *x* a aproximação linear

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

tem precisão de 0,5? O que se pode dizer sobre uma precisão de 0,1?

Solução: Uma precisão de 0,5 significa que as funções devem diferir por menos que 0,5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0{,}5$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Da mesma forma, podemos escrever

$$\sqrt{x+3} - 0{,}5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0{,}5$$

o que diz que a aproximação linear deve se encontrar entre as curvas obtidas deslocando-se a curva $y = \sqrt{x+3}$ para cima e para baixo por uma distância de 0,5.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

A Figura 3 mostra a reta tangente $y = (7 + x)/4$ em intersecção com a curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0{,}5$ em P e Q.

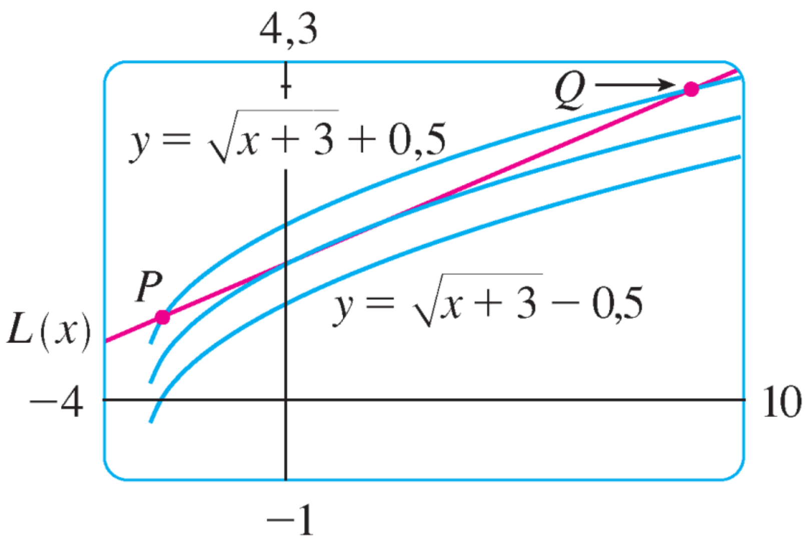

Figura 3

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Dando um *zoom* e usando o cursor, estimamos que a coordenada *x* de *P* seja em torno de – 2,66 e a coordenada *x* de *Q* seja em torno de 8,66. Assim, vemos pelo gráfico que a aproximação

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

tem precisão de 0,5 quando $-2{,}6 < x < 8{,}6$. (Arredondamos por segurança.)

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

De maneira análoga, da Figura 4 vemos que a aproximação tem precisão de 0,1 quando – 1,1 < x < 3,9.

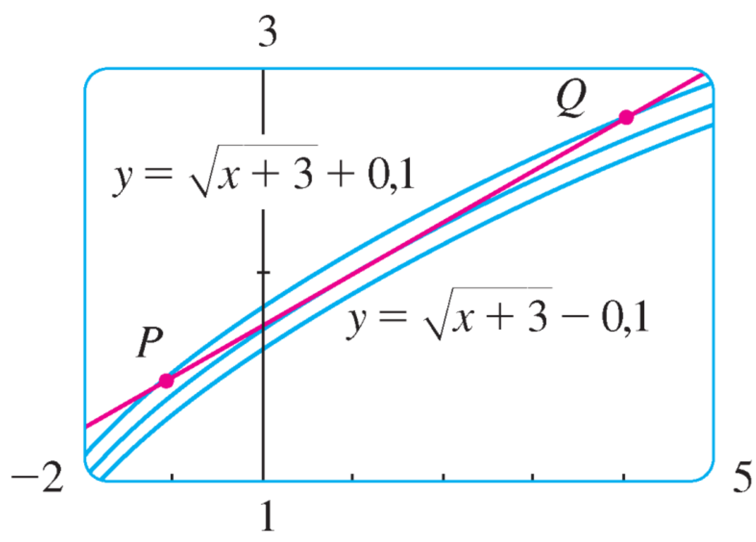

Figura 4

Aplicações à Física

Aplicações à Física

As aproximações lineares são muitas vezes usadas em física. Ao analisar as consequências de uma equação, um físico às vezes precisa simplificar uma função, substituindo-a por sua aproximação linear. Por exemplo, ao deduzir uma fórmula para o período de um pêndulo, os livros de física obtêm a expressão $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para a aceleração tangencial e então substituem sen θ por θ com a observação de que sen θ está muito próximo de θ se θ não for grande.

Aplicações à Física

Você pode verificar que a linearização da função $f(x) = \text{sen } x$ em $a = 0$ é $L(x) = x$ e, assim, a aproximação linear em 0 é

$$\text{sen } x \approx x$$

Assim, a dedução da fórmula para o período de um pêndulo usa a aproximação pela reta tangente para a função seno.

Aplicações à Física

Outro exemplo ocorre na teoria da óptica, na qual os raios de luz que chegam em ângulos rasos em relação ao eixo ótico são chamados *raios paraxiais.* Na ótica paraxial (ou gaussiana), tanto sen θ como cos θ são substituídos por suas linearizações. Em outras palavras, as aproximações lineares

$$\text{sen } \theta \approx \theta \quad \text{e} \quad \cos \theta \approx 1$$

são usados porque θ está próximo de 0.

Diferenciais

Diferenciais

As ideias por trás das aproximações lineares são algumas vezes formuladas na terminologia e notação de *diferenciais.* Se $y = f(x)$, onde f é uma função derivável, então a **diferencial** dx é uma variável independente, ou seja, a dx pode ser dado um valor qualquer. A **diferencial** dy é então definida em termos de dx pela equação

$$\boxed{3} \qquad dy = f'(x)\, dx$$

Diferenciais

Assim *dy* é uma variável dependente; depende dos valores de *x* e *dx*. Se a *dx* for dado um valor específico e *x* for algum número específico no domínio de *f*, então o valor numérico de *dy* está determinado.

O significado geométrico das diferenciais é mostrado na Figura 5.

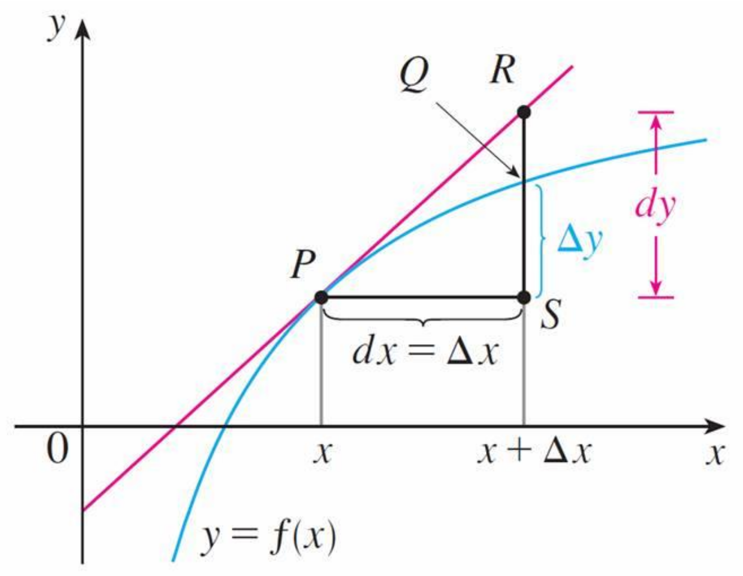

Figura 5

Diferenciais

Seja $P(x, f(x))$ e $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ pontos no gráfico de f e seja $dx = \Delta x$. A variação correspondente em y is

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

A inclinação da reta tangente PR é a derivada $f'(x)$. Assim, a distância direta de S para R é $f'(x)\,dx = dy$. Consequentemente, dy representa a distância que a reta tangente sobe ou desce (a variação na linearização), enquanto Δy representa a distância que a curva $y = f(x)$ sobe ou desce quando x varia por uma quantidade dx.

Exemplo 3

Compare os valores de Δy e dy se $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e x varia (a) de 2 para 2,05 e (b) do 2 para 2,01.

Solução:

(a) Temos

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9,$$

$$f(2{,}05) = (2{,}05)^3 + (2{,}05)^2 - 2(2{,}05) + 1 = 9{,}717625,$$

$$\Delta y = f(2{,}05) - f(2) = 0{,}717625.$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Em geral, $dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx.$

Quando $x = 2$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, torna-se

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}05 = 0{,}7.$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

(b) $f(2{,}01) = (2{,}01)^3 + (2{,}01)^2 - 2(2{,}01) + 1 = 9{,}140701,$

$$\Delta y = f(2{,}01) - f(2) = 0{,}140701.$$

Quando $dx = \Delta x = 0{,}01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}01 = 0{,}14.$$

Nosso exemplo final ilustra o uso de diferenciais na estimativa de erros que ocorrem em virtude de medidas aproximadas.

Exemplo 4

O raio de uma esfera foi medido e descobriu-se que possui 21 cm com uma possibilidade de erro na medida de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo usando esse valor de raio para computar o volume da esfera?

Solução: Se o raio da esfera for r, então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente no cálculo do valor de V é ΔV, que pode ser aproximado pela diferencial

$$dV = 4\pi r^2\, dr.$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Quando $r = 21$ e $dr = 0{,}05$, temos

$$dV = 4\pi(21)^2 0{,}05 \approx 277.$$

O erro máximo no volume calculado é de cerca de 277 cm^3.

Diferenciais

OBSERVAÇÃO Embora o erro possível no Exemplo 4 possa parecer muito grande, uma ideia melhor é dada pelo **erro relativo**, que é calculado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\, dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Diferenciais

Assim, o erro relativo no volume é cerca de três vezes o erro relativo no raio. No Exemplo 4, o erro relativo no raio é de aproximadamente $dr/r = 0{,}05/21 \approx 0{,}0024$ e produz um erro relativo de cerca de 0,007 no volume. Os erros também poderiam ser expressos como **erros percentuais** de 0,24% no raio e 0,7% no volume.