3 Regras de Derivação

3.9 Taxas Relacionadas

Taxas Relacionadas

Quando bombeamos ar para dentro de um balão, tanto o volume quanto o raio do balão crescem, e suas taxas de crescimento estão relacionadas. Mas é muito mais fácil medir diretamente a taxa de crescimento do volume do que a do raio.

Em um problema de taxas relacionadas, a ideia é calcular a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação da outra (que pode ser medida mais facilmente). O procedimento é achar uma equação que relacione as duas grandezas e então usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados em relação ao tempo.

Exemplo 1

Ar está sendo bombeado para um balão esférico de modo que seu volume aumenta a uma taxa de 100 cm^3/s. Quão rápido o raio do balão está aumentando quando o diâmetro for 50 cm?

Solução: Vamos começar identificando duas coisas:

a *informação dada*:

a taxa de crescimento do ar é 100 cm^3/s

e a *incógnita*:

a taxa de crescimento do raio quando o diâmetro é 50 cm

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Para expressarmos matematicamente essas grandezas, introduzimos alguma *notação* sugestiva:

Seja V o volume do balão e seja r seu raio.

A chave está em lembrar que taxas de variação são derivadas. Neste problema, o volume e o raio são funções do mesmo tempo t. A taxa de crescimento do volume em relação ao tempo é a derivada dV/dt, e a taxa de crescimento do raio é dr/dt.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Podemos, portanto, reapresentar o que foi dado e a incógnita como a seguir:

Dada: $\dfrac{dV}{dt} = 100$ cm³/s,

Incógnita: $\dfrac{dr}{dt}$ quando $r = 25$ cm.

Para ligar dV/dt e dr/dt, primeiro relacionamos V e r pela fórmula para o volume de uma esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Para usarmos a informação dada, derivamos cada lado dessa equação em relação a *t*. Para derivarmos o lado direito precisamos usar a Regra da Cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Agora, isolamos a incógnita:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Se colocarmos r = 25 e dV/dt = 100 nessa equação, obtemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

O raio do balão está crescendo a uma taxa de $1/(25\pi) \approx 0{,}0127$ cm/s.