3 Regras de Derivação

3.6

Derivadas de Funções Logarítmicas

Derivadas de Funções Logarítmicas

Nesta seção vamos usar a derivação implícita para achar as derivadas das funções logarítmicas $y = \log_a x$ e, em particular, da função logarítmica natural $y = \ln x$. [É possível demonstrar que as funções logarítmicas são deriváveis: com certeza isso é plausível a partir dos seus gráficos (veja a Figura 12 Seção 1.5).]

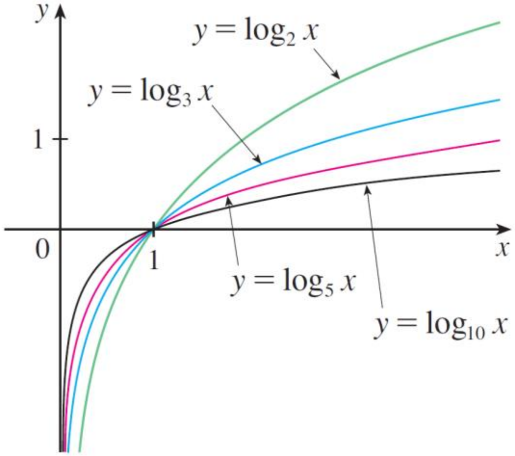

Figura 12

Derivadas de Funções Logarítmicas

1

$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

2

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

De forma geral, se combinarmos a Fórmula 2 com a Regra da Cadeia, obtemos

3

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ou

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Exemplo 2

Encontre $\dfrac{d}{dx}\ln(\text{sen } x)$.

Solução: Usando $\boxed{3}$, nos

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\cos x = \cot x$$

Derivação Logarítmica

Derivação Logarítmica

Os cálculos de derivadas de funções complicadas envolvendo produtos, quocientes ou potências podem muitas vezes ser simplificados tomando-se os logaritmos.

O método usado no exemplo a seguir é chamado **derivação logarítmica**.

Exemplo 7

Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}$.

Solução: Tome logarítmos em ambos os lados da equação e use as Propriedades do Logaritmo para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4} \ln x + \tfrac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 5 \ln(3x + 2).$$

Derivando implicitamente em relação a x, temos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - 5 \cdot \frac{3}{3x + 2}$$

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Isolando para *dy*/*dx*, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{15}{3x + 2}\right)$$

Como temos uma expressão explícita para *y*, podemos substituí-lo por ela e escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{15}{3x + 2}\right)$$

DERIVAÇÃO LOGARÍTMICA

Passos na Derivação Logarítmica

1. Tome o logaritmo natural em ambos os lados de uma equação $y = f(x)$ e use as Propriedades dos Logaritmos para simplificar.
2. Derive implicitamente em relação a x.
3. Isole y' na equação resultante.

A Regra da Potência Se n for qualquer número real e $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

O Número *e* como um Limite

O Número *e* como um Limite

Já mostramos que se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = 1/x$. Agora, $f'(1) = 1$. Agora, usamos esse fato para expressar o número *e* como um limite.

Da definição de derivada como um limite, temos

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x}$$

O Número *e* como um Limite

Por causa de $f'(1) = 1$, temos

$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Assim, pela continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

5

$$\boxed{e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}}$$

O Número *e* como um Limite

A Fórmula 5 está ilustrada pelo gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$ na Figura 4 e na tabela para os valores pequenos de x. Isso ilustra o fato de que, com precisão até a sétima casa decimal,

$$e \approx 2{,}7182818.$$

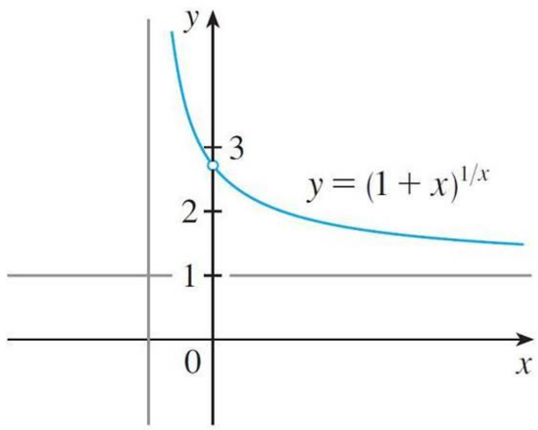

Figura 4

x	$(1 + x)^{1/x}$
0,1	2,59374246
0,01	2,70481383
0,001	2,71692393
0,0001	2,71814593
0,00001	2,71826824
0,000001	2,71828047
0,0000001	2,71828169
0,00000001	2,71828181

O Número *e* como um Limite

Se colocarmos $n = 1/x$ na Fórmula 5, então $n \to \infty$ como $x \to 0^+$ e uma expressão alternativa para *e* é

$$\boxed{6} \qquad e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$