3 Regras de Derivação

3.5 Derivação Implícita

Derivação Implícita

As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra – por exemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{ou} \qquad y = x \text{ sen } x$$

ou, em geral, $y = f(x)$. Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tais como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

ou

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

Derivação Implícita

Em alguns casos é possível resolver tal equação isolando y como uma função explícita (ou diversas funções) de x.

Por exemplo, se resolvermos a Equação 1 para y, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$; logo, duas das funções determinadas pela Equação 1 implícita são $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$.

Derivação Implícita

Os gráficos de *f* e *g* são os semicírculos superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 25$ (veja a Figura 1).

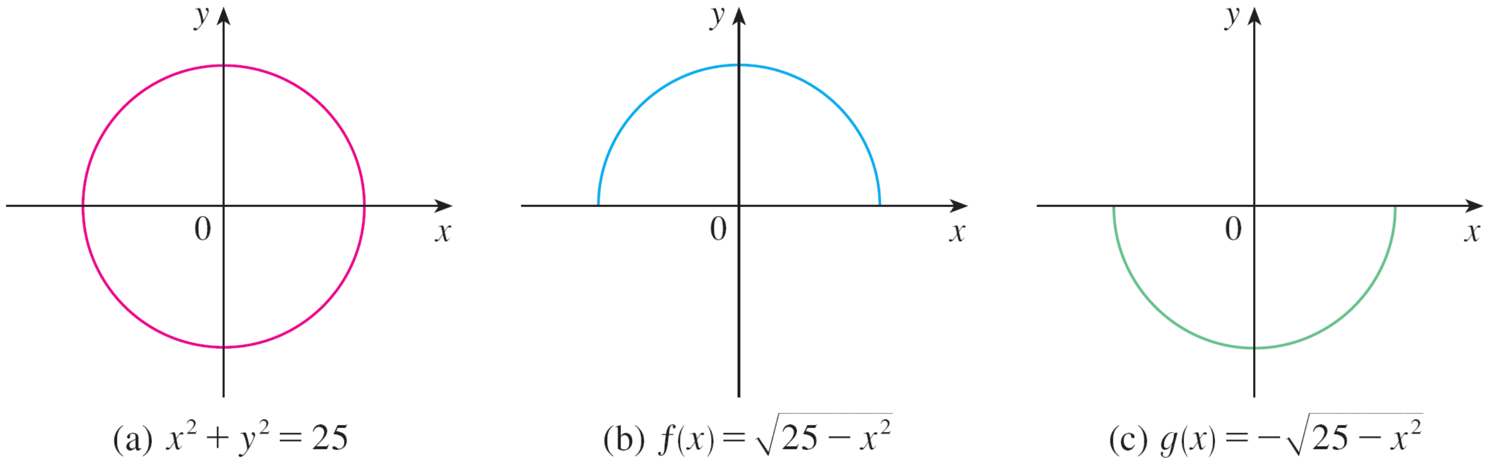
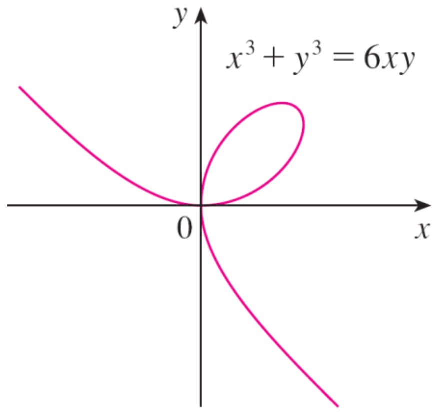


Figura 1

Diferenciação Implícita

Não é fácil resolver a Equação 2 e escrever *y* explicitamente como uma função de *x* à mão. (Um sistema SCA não tem dificuldades, mas as expressões que obtém são muito complicadas.) Contudo, $\boxed{2}$ é a equação de uma curva chamada **fólio de Descartes**, mostrada na Figura 2, e implicitamente define *y* como diversas funções de *x*.

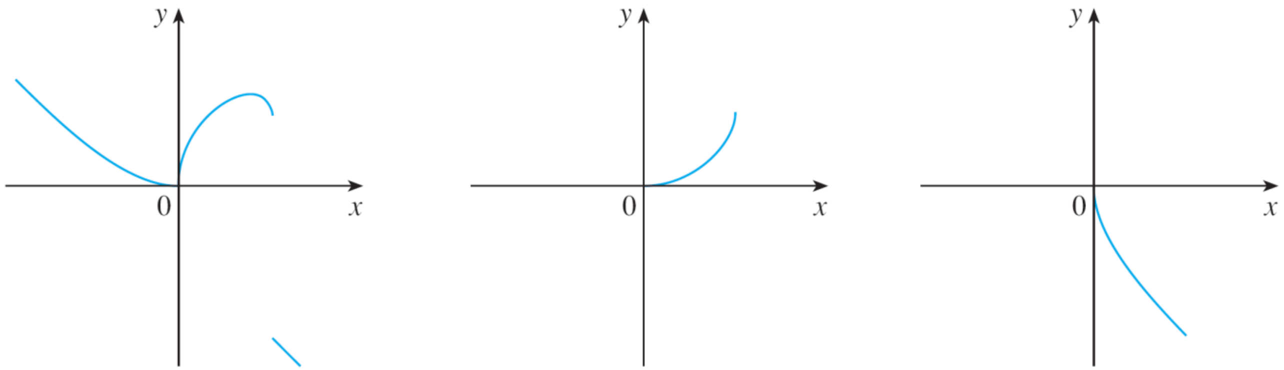


O folium of Descartes

Figura 2

Derivação Implícita

Os gráficos dessas três funções são mostrados na Figura 3.



Gráficos de três funções definidas pelo folium de Descartes

Figura 3

Quando dizemos que f é uma função implicitamente definida pela Equação 2, queremos dizer que a equação

$$x^3 + [f(x)^3] = 6xf(x)$$

é verdadeira para todos os valores de x no domínio de f.

Derivação Implícita

Felizmente, não precisamos resolver uma equação para y em termos de x para encontrar a derivada de y. Em vez disso, podemos usar o método de **derivação implícita**.

Isso consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a x e, então, na resolução da equação para y'.

Nos exemplos e exercícios desta seção, suponha sempre que a equação dada determine y implicitamente como uma função derivável de x de forma que o método da derivação implícita possa ser aplicado.

Exemplo 1

(a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

(b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (3, 4).

Solução 1:

(a) Derive ambos os lados da equação $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Lembrando que *y* é uma função de *x* e usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Logo,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Agora isole *dy*/*dx nessa esquação*:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

(b) No ponto (3, 4), temos $x = 3$ e $y = 4$, logo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Uma equação da reta tangente ao círculo em (3, 4) é, portanto,

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \quad \text{ou} \quad 3x + 4y = 25$$

Solução 2:

(b) Resolva a equação $x^2 + y^2 = 25$, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. O ponto (3, 4) está sobre o semicírculo superior $y = \sqrt{25 - x^2}$, e assim vamos considerar a função $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Derivando *f*, usando a Regra da Cadeia, temos

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\,\frac{d}{dx}\,(25 - x^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Então

$$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

e, como na Solução 1, uma equação da reta tangente é

$3x + 4y = 25$.

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

Lembre-se de que a função inversa da função seno foi definida por:

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{significa} \qquad \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Derivando $\operatorname{sen} y = x$ implicitamente em relação a x, obtemos

$$\cos y \, \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Agora, $\cos y \geqslant 0$, uma vez que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, então

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

Logo,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

A fórmula para a derivada da função arco tangente é deduzida de maneira análoga. Se $y = \operatorname{tg}^{-1}x$, então $\operatorname{tg} y = x$. Derivando essa última equação implicitamente em relação a x, temos

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Exemplo 5

Derive

(a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1} x}$

(b) $f(x) = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

SOLUÇÃO

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1} x)^{-2} \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x)$$
$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1} x)^2 \sqrt{1 - x^2}}.$$

(b)
$$f'(x) = x \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\tfrac{1}{2} x^{-1/2}\right) + \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

As derivadas das quatro funções remanescentes estão dadas na tabela a seguir.

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotg}^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$