# 3 Regras de Derivação

3.1

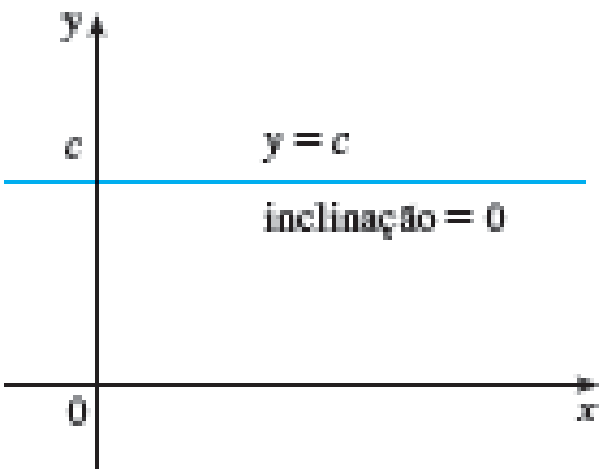
# Derivadas de Funções Polinomiais e Exponenciais

# Derivadas de Funções Polinomiais e Exponenciais

Nesta seção aprenderemos a derivar as funções constantes, funções potências, funções polinomiais e exponenciais.

Vamos iniciar com a função mais simples, a função constante $f(x) = c$.

O gráfico dessa função é a reta horizontal $y = c$, cuja inclinação é 0; logo devemos ter $f'(x) = 0$ (veja a Figura 1).




O gráfico de $f(x) = c$ é a reta $y = c$, so $f'(x) = 0$.

**Figura 1**

# Derivadas de Funções Polinomiais e Exponenciais

Uma demonstração formal, a partir da definição de uma derivada, é simples:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Essa regra, na notação de Leibniz, é escrita da seguinte forma:

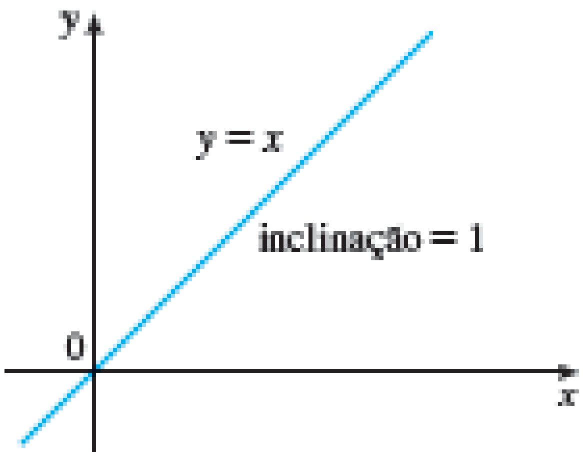
**Derivada de uma Função Constante**

$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

# Funções Potências

# Funções Potências

Vamos olhar as funções $f(x) = x^n$, onde $n$ é um inteiro positivo. Se $n = 1$, o gráfico de $f(x) = x$ é a reta $y = x$, cuja inclinação é 1 (veja a Figura 2).




O gráfico de $f(x) = x$ é a reta $y = x$, logo $f'(x) = 1$.

**Figura 2**

# Funções Potências

Então

**1** $$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

(Você também pode verificar a Equação 1 a partir da definição de derivada.) Já investigamos os casos $n = 2$ e $n = 3$. Encontramos

**2** $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

# Funções Potências

Para $n$ = 4 achamos a derivada de $f(x) = x^4$ a seguir:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

# Funções Potências

Logo

3 $$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Comparando as equações em $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, e $\boxed{3}$, vemos um modelo emergir. Parece ser uma conjectura plausível que, quando $n$ é um inteiro positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Resulta que isto é, de fato, verdade.

**A Regra da Potência** Se $n$ for um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

# Exemplo 1

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6x^5$.

(b) Se $y = x^{1.000}$, então $y' = 1.000x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$ .

# Funções Potências

**A Regra da Potência (Versão Geral)** Se $n$ for um número real qualquer, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

A Regra da Potência nos permite encontrar retas tangentes sem ter de recorrer à definição de derivada. Também nos permite encontrar *retas normais*. A **reta normal** uma curva *C* em um ponto *P* é a reta por *P* que é perpendicular à reta tangente em *P*.

# Novas Derivadas a partir de Conhecidas

# Novas Derivadas a partir de Conhecidas

Quando as novas funções são formadas a partir de outras por adição, subtração, multiplicação ou divisão, suas derivadas podem ser calculadas em termos das derivadas das funções originais. Particularmente, a fórmula a seguir nos diz que *a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função.*

**A Regra da Multiplicação por Constante** Se $c$ for uma constante e $f$, uma função derivável, então

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x).$$

# Exemplo 4

$$\text{(a)}\quad \frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$$

$$\text{(b)}\quad \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\frac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$$

# Novas Derivadas a partir de Conhecidas

A regra a seguir nos diz que *a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas de suas funções.*

**A Regra da Soma** Se $f$ e $g$ forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x).$$

A Regra da Soma pode ser estendida para a soma de qualquer número de funções. Por exemplo, usando esse teorema duas vezes, obtemos

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h)]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'.$$

# Novas Derivadas a partir de Conhecidas

Escrevendo $f - g$ como $f + (-1)g$ e aplicando a Regra da Soma e a Regra da Multiplicação por Constante, obtemos a seguinte fórmula.

**A Regra da Subtração** Se $f$ e $g$ forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x).$$

As três regras anteriores podem ser combinadas com a Regra da Potência para derivar qualquer polinômio, como ilustram os exemplos a seguir.

# Funções Exponenciais

# Funções Exponenciais

Vamos tentar calcular a derivada da função exponencial $f(x) = b^x$ usando a definição de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{b^x b^h - b^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^x(b^h - 1)}{h}.$$

O fator $b^x$ não depende de $h$, logo podemos colocá-lo adiante do limite:

$$f'(x) = b^x \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}.$$

# Funções Exponenciais

Observe que o limite é o valor da derivada de *f* em 0, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = f'(0).$$

Portanto, mostramos que se a função exponencial $f(x) = b^x$ for derivável em 0, então é derivável em toda a parte e

$$\boxed{4} \qquad f'(x) = f'(0)\,b^x$$

Essa equação diz que *a taxa de variação de qualquer função exponencial é proporcional à própria função.*

(A inclinação é proporcional à altura).

# Funções Exponenciais

Uma evidência numérica para a existência de $f'(0)$ é dada na tabela à direita para os casos $b = 2$ e $b = 3$.
(Os valores são dados com precisão até a quarta casa decimal).
Aparentemente, os limites existem e

| $h$ | $\dfrac{2^h - 1}{h}$ | $\dfrac{3^h - 1}{h}$ |
|---|---|---|
| 0,1 | 0,7177 | 1,1612 |
| 0,01 | 0,6956 | 1,1047 |
| 0,001 | 0,6934 | 1,0992 |
| 0,0001 | 0,6932 | 1,0987 |

$$\text{para } b = 2, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0{,}69,$$

$$\text{para } b = 3, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1{,}10.$$

# Funções Exponenciais

Na realidade, pode ser demonstrado que estes limites existem e, com precisão, até a sexta casa decimal, seus valores são

$$\frac{d}{dx}(2^x)\bigg|_{x=0} \approx 0{,}693147, \qquad \frac{d}{dx}(3^x)\bigg|_{x=0} \approx 1{,}098612.$$

Assim, da Equação 4, temos

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x, \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1{,}10)3^x.$$

De todas as possíveis escolhas para a base *b* do Exemplo 4, a fórmula de derivação mais simples ocorre quando $f'(0) = 1$.

# Funções Exponenciais

Em vista das estimativas de $f'(0)$ para $b = 2$ e $b = 3$, parece plausível que haja um número $b$ entre 2 e 3 para o qual $f'(0) = 1$. É tradição denotar esse valor por uma letra $e$. Desse modo, temos a seguinte definição.

**Definição do Número *e***

$$e \text{ é um número tal que } \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

# Funções Exponenciais

Geometricamente, isso significa que, de todas as possíveis funções exponenciais $y = b^x$, a função $f(x) = e^x$ é aquela cuja reta tangente em (0, 1) tem uma inclinação $f'(0)$, que é exatamente 1 (veja as Figuras 6 e 7).

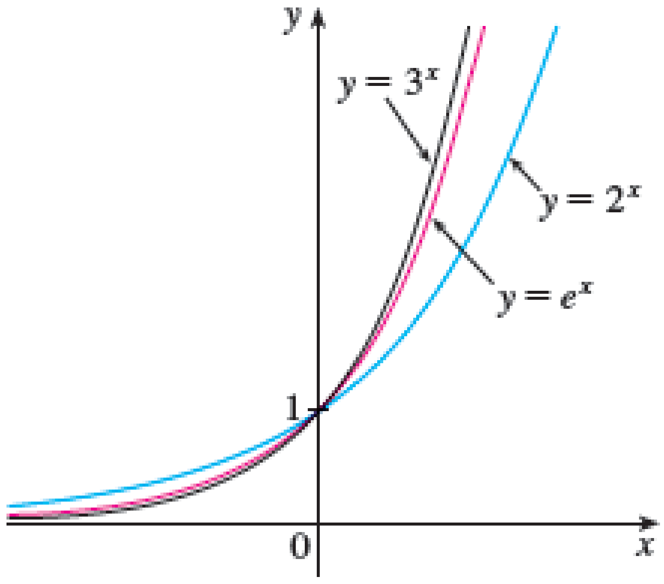



**Figura 6**

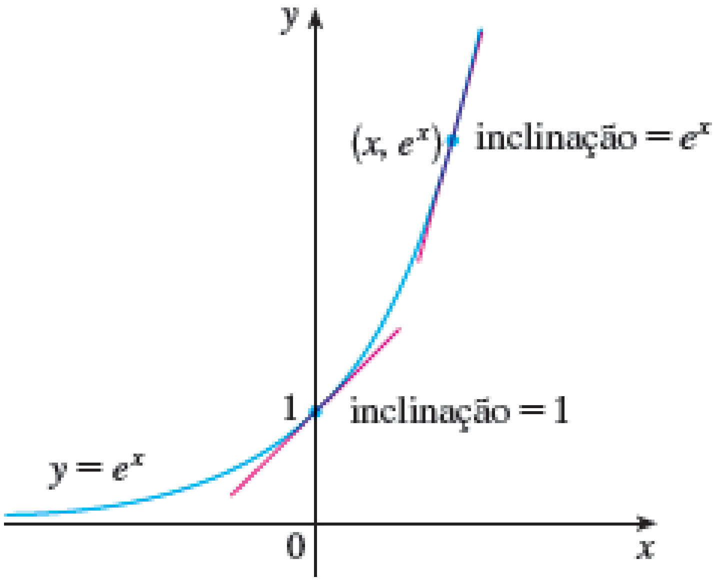



**Figura 7**

# Funções Exponenciais

Se pusermos $b = e$ e, consequentemente, $f'(0) = 1$ na Equação 4, teremos a seguinte importante fórmula de derivação.

**Derivada da Função Exponencial Natural**

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

Assim, a função exponencial $f(x) = e^x$ tem a propriedade de ser sua própria derivativa. O significado geométrico desse fato é que a inclinação da reta tangente à curva $y = e^x$ é igual à coordenada $y$ do ponto (veja a Figura 7).

# Exemplo 8

Se $f(x) = e^x - x$, encontre $f'$ e $f''$. Compare os gráficos de $f$ e $f'$.

Solução: Usando a Regra da Diferença, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

# Exemplo 8 – *Solução*

continuação

Definimos a segunda derivada como a derivada de *f* ′, de modo que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

# Exemplo 8 – *Solução*

continuação

A Figura 8 exibe os gráficos da função *f* e sua derivada *f*.

Observe que *f* tem uma tangente horizontal quando $x = 0$; o que corresponde ao fato de que $f'(0) = 0$. Observe também que, para $x > 0$, $f'(x)$ é positivo e *f* está crescente. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativo e *f* está decrescente.

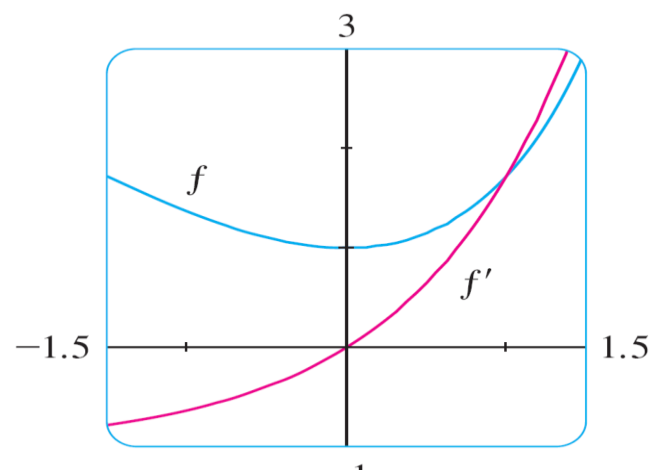



**Figura 8**