2

Limites e Derivadas

2.6 Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Nesta seção vamos tornar *x* arbitrariamente grande (positivo ou negativo) e ver o que acontece com *y*.

Vamos começar pela análise do comportamento da função *f* definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

quando *x* aumenta.

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

A tabela a seguir fornece os valores dessa função, com precisão de seis casas decimais, e o gráfico de *f* feito por um computador está na Figura 1.

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0,600000
±3	0,800000
±4	0,882353
±5	0,923077
±10	0,980198
±50	0,999200
±100	0,999800
±1000	0,999998

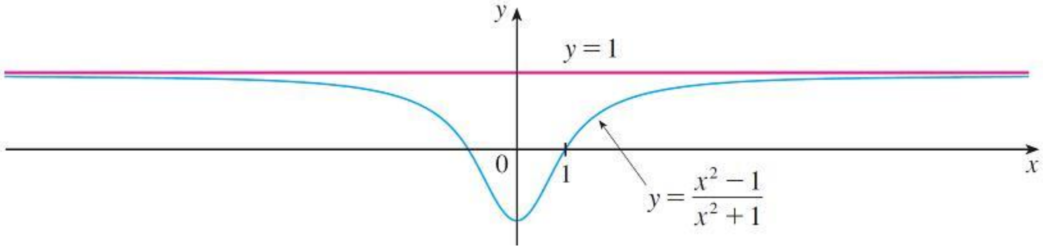


Figura 1

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Quanto maior o *x*, mais próximos de 1 ficam os valores de *f* (*x*). De fato, temos a impressão de que podemos tornar os valores de *f*(*x*) tão próximos de 1 quanto quisermos se tonarmos um *x* suficientemente grande. Essa situação é expressa simbolicamente escrevendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1.$$

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de L à medida que x fica maior.

1 Definição Intuitiva de Limite no Infinito Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

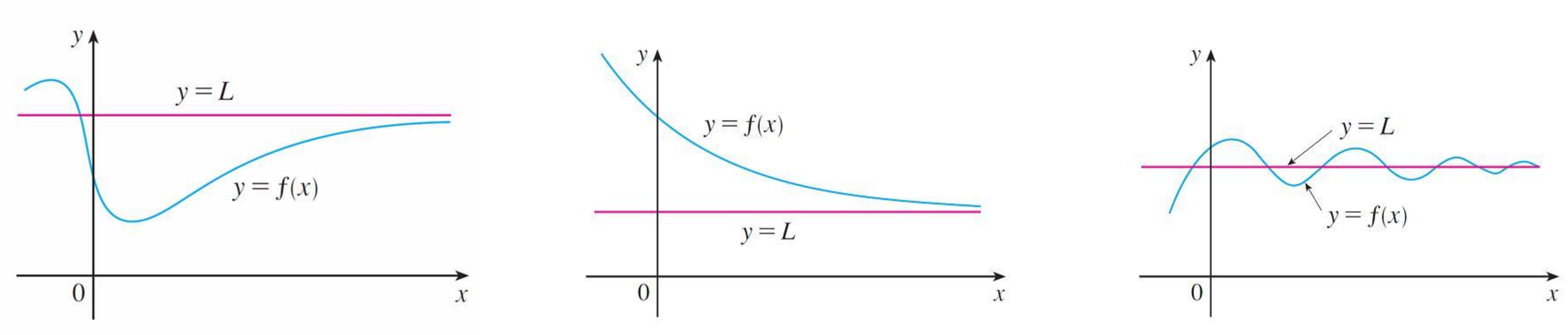
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande.

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Outra notação para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ é $f(x) \to L$ quando $x \to \infty$

As ilustrações geométricas da Definição 1 estão representadas na Figura 2.



Exemplos ilustrando $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Figura 2

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Observe que existem muitas formas de o gráfico de *f* aproximar-se da reta $y = L$ (chamada *assíntota horizontal*) quando olhamos para a extremidade direita de cada gráfico.

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Com relação ainda à Figura 1, vemos que para os valores negativos de *x* com grande valor absoluto, os valores de *f* (*x*) estão próximos de 1.

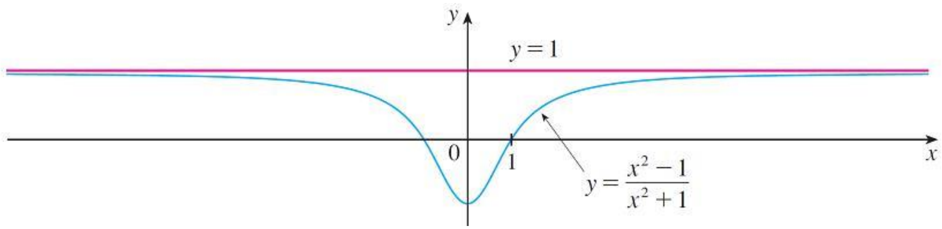


Figura 1

Fazendo *x* decrescer ilimitadamente para valores negativos, podemos tornar *f*(*x*) tão próximo de 1 quanto quisermos.

Isso é expresso escrevendo $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$.

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

A definição geral é dada a seguir.

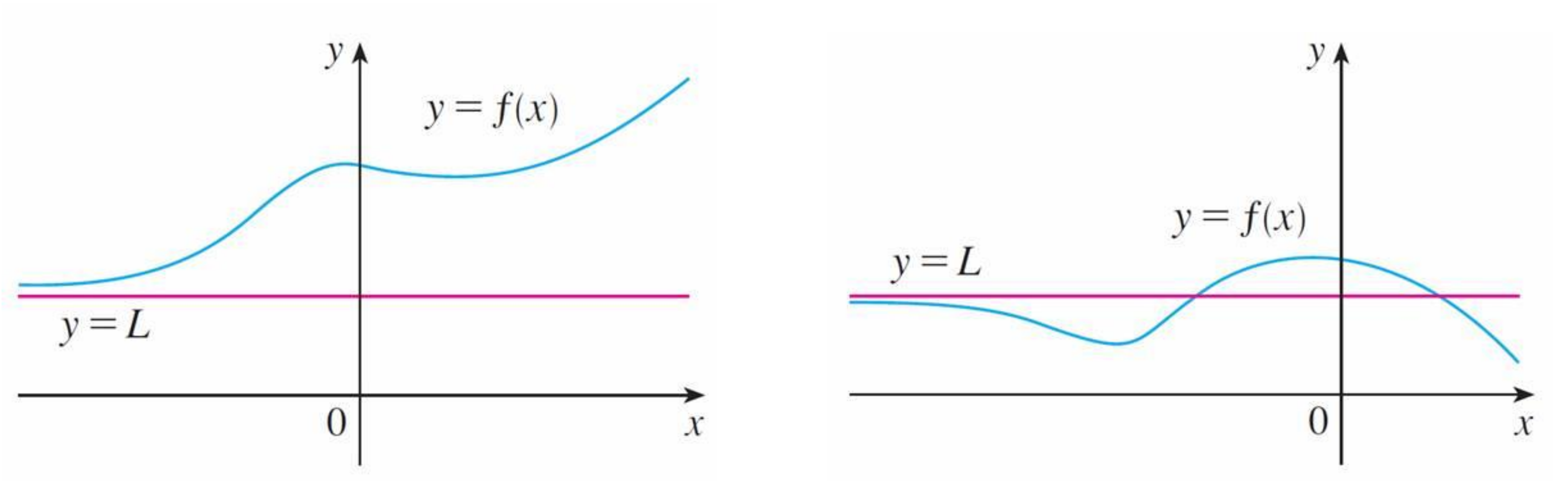
2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L, tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

A Definição 2 está ilustrada na Figura 3. Observe que o gráfico aproxima-se da reta *y* = *L* quando olhamos para a extremidade esquerda de cada gráfico.



Exemplos ilustrando $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

Figura 3

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

3 **Definição** A reta $y = L$ é chamada **assíntota horizontal** da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Exemplo 2

Encontre $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

Solução: Observe que quando *x* é grande, 1/*x* é pequeno. Por exemplo,

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{10.000} = 0{,}0001 \qquad \frac{1}{1.000.000} = 0{,}000001$$

De fato, tomando *x* grande o bastante, podemos fazer 1/*x* tão próximo de 0 quanto quisermos.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Portanto, conforme a Definição 1, temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

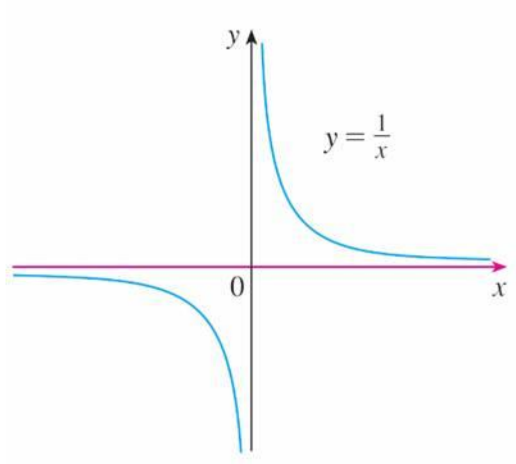
Um raciocínio análogo mostra que, quando *x* é grande em valor absoluto (porém negativo), 1/*x* é pequeno em valor absoluto (mas negativo); logo temos também

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Segue que a reta $y = 0$ (o eixo x) é uma assíntota horizontal da curva $y = 1/x$. (Esta é uma hipérbole equilátera; veja a Figura 6.)



$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Figura 6

Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

$\boxed{5}$ **Teorema** Se $r > 0$ for um número racional, então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0.$$

Se $r > 0$ for um número racional tal que x^r seja definida para todo x, então

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0.$$

Exemplo 3

Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$ e indique quais propriedade de limites forão usados em cada etapa.

Solução: Quando *x* cresce, o numerador e o denominador também crescem, logo, não fica óbvio o que ocorre com a razão entre eles. Para eliminar essa indeterminação, precisaremos antes manipular algebricamente a expressão.

Para calcular o limite no infinito de uma função racional, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de *x* que ocorre no denominador. (Podemos assumir $x \neq 0$, uma vez que estamos interessados apenas em valores grandes de *x*.)

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Nesse caso a maior potência de x no denominador é x^2, logo temos,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}$$

(pela Propriedade Limite 5)

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}$$

(pelas Propriedades 1, 2 e 3)

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0}$$

(pela Propriedade 7 e pelo Teorema 5)

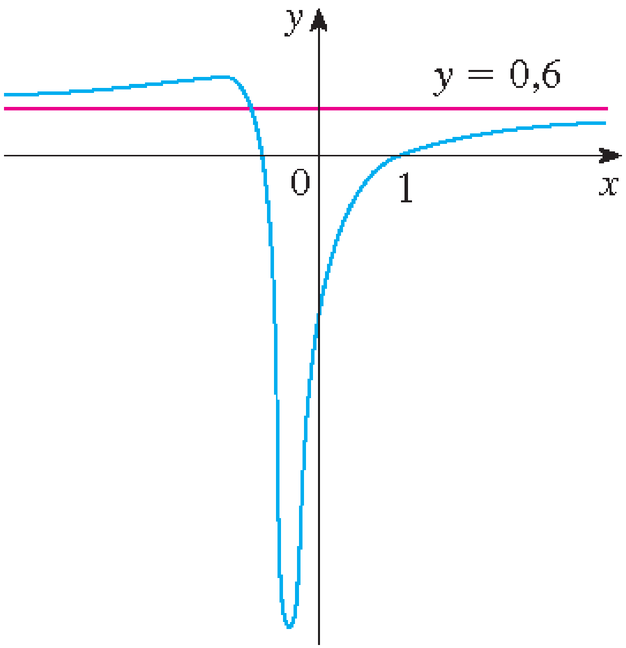
$$= \frac{3}{5}$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Um cálculo análogo mostra que o limite quando $x \to -\infty$ também é $\frac{3}{5}$.

A Figura 7 ilustra o resultado destes cálculos mostrando como o gráfico da função racional dada aproxima-se da assíntota horizontal $y = \frac{3}{5} = 0{,}6$.



$$y = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Figura 7

Exemplo 4

Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Solução: Dividindo o numerador e o denominador por *x* e usando as propriedades de limites, temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}}$$

(pois $\sqrt{x^2} = x$ para $x > 0$)

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x \to \infty} 3 - 5 \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2 + 0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Portanto, a reta $y = \sqrt{2}/3$ é uma assíntota horizontal do gráfico de *f*.

No cálculo do limite como $x \to -\infty$, devemos lembrar que, para $x < 0$, temos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Logo, quando dividimos o numerador por x, para $x < 0$, obtemos

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2 + 1} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Logo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{2 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}}}{3 - 5 \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Assim, a reta $y = -\sqrt{2}/3$ é também uma assíntota horizontal.

Uma assíntota vertical deve ocorre quando o denominador, $3x - 5$, é 0, isto é, quando $x = \frac{5}{3}$. Se x estiver próximo de $\frac{5}{3}$ e $x > \frac{5}{3}$, então o denominador está próximo de 0, e $3x - 5$ é positivo. O numerador $\sqrt{2x^2 + 1}$ é sempre positivo, logo $f(x)$ é positivo. Assim

$$\lim_{x \to (5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \infty \,.$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Se estiver próximo de $\frac{5}{3}$, mas $x < \frac{5}{3}$, então $3x - 5 < 0$, logo $f(x)$ é muito grande em valor absoluto (porém negativa). Assim,

$$\lim_{x \to (5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = -\infty$$

A assíntota vertical é $x = \frac{5}{3}$. Todas as três assíntotas estão mostradas na Figura 8.

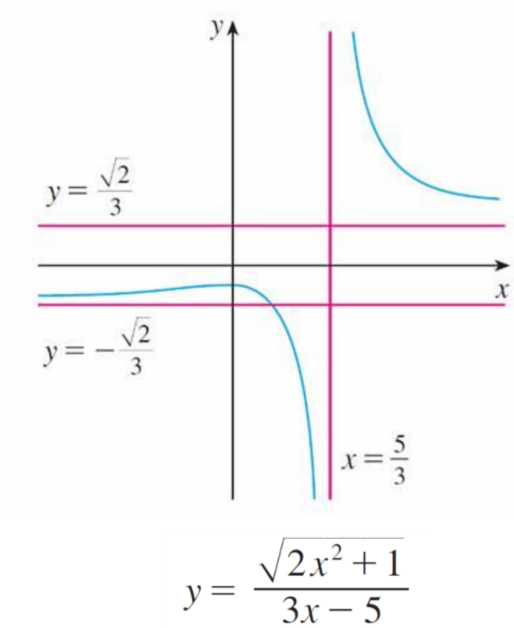


Figura 8

Limites Infinitos no Infinito

Limites Infinitos no Infinito

A notação

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

é usada para indicar que os valores de *f*(*x*) tornam-se grandes quanto *x* se torna grande. Significados análogos são dados aos seguintes símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemplo 9

Encontre $\lim_{x \to \infty} x^3$ e $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

Solução: Quando x torna-se grande, x^3 também fica grande. Por exemplo,

$$10^3 = 1.000, \qquad 100^3 = 1.000.000, \qquad 1000^3 = 1.000.000.000.$$

Na realidade, podemos fazer x^3 ficar tão grande quanto quisermos tomando x grande o suficiente. Portanto, podemos escrever

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty.$$

Exemplo 9 – *Solução*

continuação

Analogamente, quando *x* é muito grande em módulo, porém negativo, x^3 também o é. Assim

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$$

Essas afirmações sobre limites também podem ser vistas no gráfico de $y = x^3$ da Figura 11.

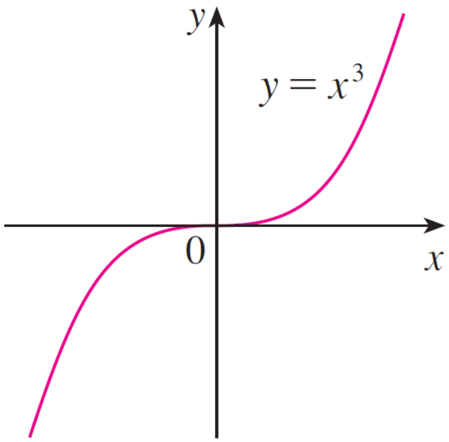


Figura 11

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Definições Precisas

Definições Precisas

Podemos enunciar mais precisamente a Definição 1 da seguinte forma.

7 Definição precisa de limite no infinito Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

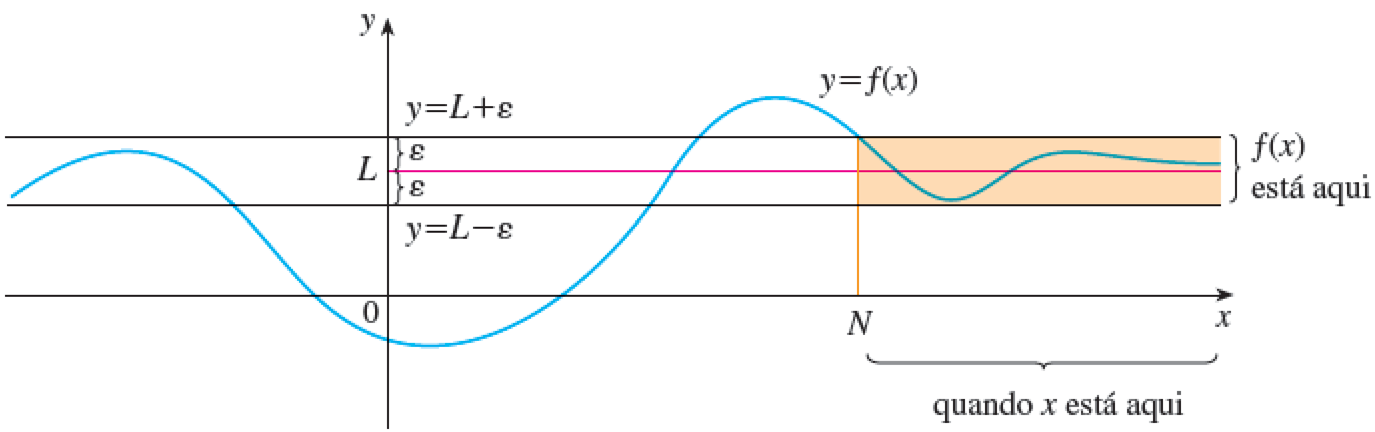
significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um correspondente número N tal que

$$\text{se} \quad x > N \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Em palavras, isso diz que os valores de *f*(*x*) podem ficar arbitrariamente próximos de *L* (dentro de uma distância *ε*, onde *ε* é qualquer número positivo), exigindo-se que *x* seja suficientemente grande (maior que *N*, onde *N* depende de *ε*).

Definições Precisas

Graficamente, isso quer dizer que, mantendo *x* suficientemente grande (maior que algum número *N*), podemos fazer o gráfico de *f* ficar entre duas retas horizontais dadas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$, como na Figura 14.

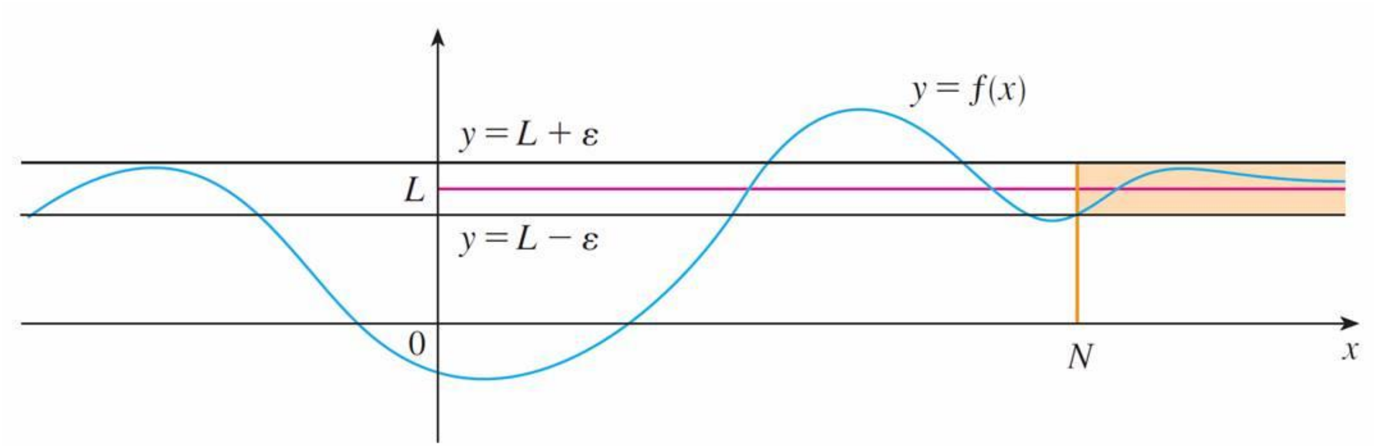


$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Figura 14

Definições Precisas

Isso deve ser verdadeiro, não importando quão pequeno seja *ε*. A Figura 15 indica que se for escolhido um valor menor de *ε*, então poderá ser necessário um valor maior para *N*.



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Figura 15

Definições Precisas

$\boxed{8}$ **Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um correspondente número N tal que

$$\text{se} \quad x < N \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 14

Use a Definição 7 para demonstrar que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que

se $x > N$ então $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$.

Ao calcular o limite, podemos assumir que $x > 0$.

Então, $1/x < \varepsilon \iff x > 1/\varepsilon$.

Exemplo 14 – *Solução*

continuação

Escolhemos $N = 1/\varepsilon$. Então

Se $x > N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ então $\left| \dfrac{1}{x} - 0 \right| = \dfrac{1}{x} < \varepsilon.$

Logo, pela Definição 7,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exemplo 14 – *Solução*

continuação

A Figura 18 ilustra a demonstração mostrando alguns valores de *ε* e os valores correspondentes de *N*.

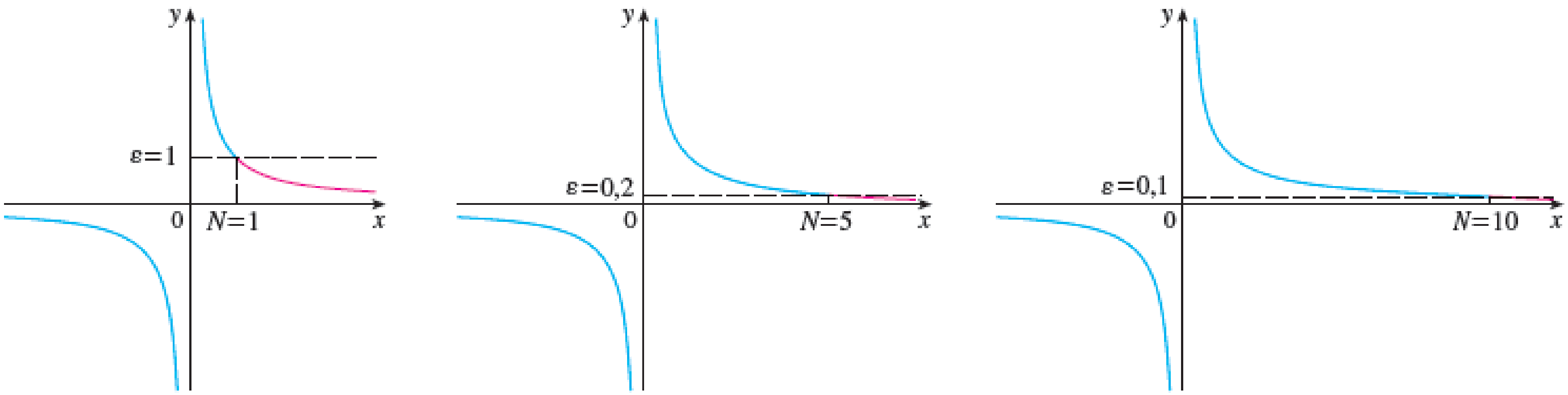
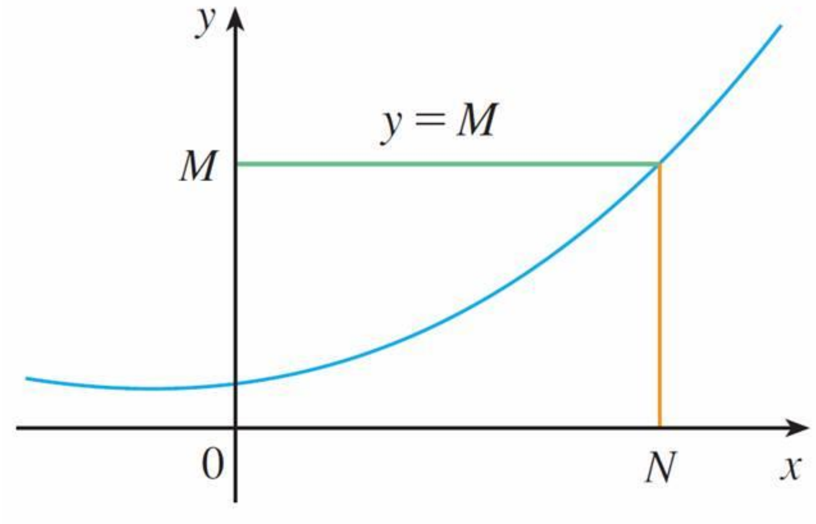


Figura 18

Definições Precisas

Finalmente, observamos que pode ser definido um limite infinito no infinito da forma a seguir. A ilustração geométrica está dada na Figura 19.



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Figura 19

Definições Precisas

9 Definição de Limite Infinito no Infinito Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo positivo M existe um correspondente número positivo N tal que

$$\text{se} \quad x > N \qquad \text{então} \qquad f(x) > M.$$

Definições análogas podem ser feitas quando o símbolo ∞ é substituído por $-\infty$.