2

Limites e Derivadas

2.5 Continuidade

Continuidade

O limite de uma função quando *x* ao tende a *a* pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando o valor da função em *a*. Funções com essa propriedade são chamadas de *contínuas em a*. Veremos que a definição matemática de continuidade têm correspondência bem próxima ao significado da palavra *continuidade* no uso comum. (Um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas.)

$\boxed{1}$ **Definição** Uma função f é **contínua em um número a** se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Continuidade

Observe que a Definição 1 implicitamente requer três coisas para a continuidade de *f* em *a*:

1. *f*(*a*) está definida (isto é, *a* está no domínio de *f*)

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

A definição diz que *f* é contínua em *a* se *f*(*x*) tende a *f*(*a*) quando *x* tende a *a*. Assim, uma função contínua *f* tem a propriedade que uma pequena mudança em *x* produz somente uma pequena alteração em *f*(*x*).

Continuidade

De fato, a alteração em $f(x)$ pode ser mantida tão pequena quanto desejarmos, mantendo-se a variação em x for suficientemente pequena.

Se f está definida próximo de a (em outras palavras, f está definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a), dizemos que f é **descontínua em *a*** (o que f tem uma **descontinuidade** em a) se f não é contínua em a.

Os fenômenos físicos são geralmente contínuos. Por exemplo, o deslocamento ou a velocidade de um veículo variam continuamente com o tempo, como a altura das pessoas. Mas descontinuidades ocorrem em situações tais como a corrente elétrica.

Continuidade

Geometricamente, você pode pensar em uma função contínua em todo número de um intervalo como uma função cujo gráfico não se quebra. O gráfico pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel.

Exemplo 1

A Figura mostra o gráfico da função *f*. Em quais números *f* é descontínua? Por quê?

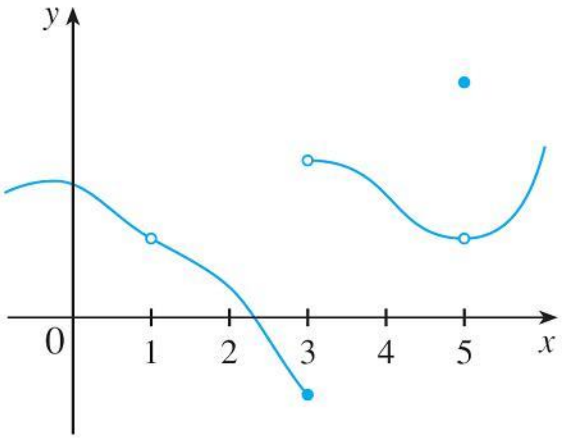


Figura 2

Solução:

Parece haver uma descontinuidade quando $a = 1$ pois aí o gráfico tem um buraco. A razão oficial para *f* ser descontínua em 1 é que $f(1)$ não está definida.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

O gráfico também tem uma quebra em $a = 3$, mas a razão para a descontinuidade é diferente. Aqui, $f(3)$ está definida, mas $\lim_{x\to 3} f(x)$ não existe (pois os limites esquerdo e direito são diferentes). Logo f é descontínua em 3.

E $a = 5$? Aqui, $f(5)$ está definida e $\lim_{x\to 5} f(x)$ existe (pois o limite esquerdo e o direito são iguais).

Mas

$$\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$$

Logo f é descontínua em 5.

Exemplo 2

Onde cada uma das seguintes funções é descontínua?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

Solução:

(a) Observe que $f(2)$ não é definida, logo f é descontínua em 2. Mais à frente veremos porque f é contínua em todos os demais números.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

(b) Aqui *f*(0) = 1 está definida, mas

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

não existe. Então *f* é descontínua em 0.

(c) Aqui *f*(2) = 1 está definida e

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

existe. Mas,

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

logo, *f* não é contínua em 2.

(d) A função maior inteiro *f*(*x*) = $[\![x]\!]$ tem descontinuidades em todos os inteiros, pois $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ não existe se *n* for um inteiro.

Continuidade

A Figura 3 mostra os gráficos das funções no Exemplo 2.

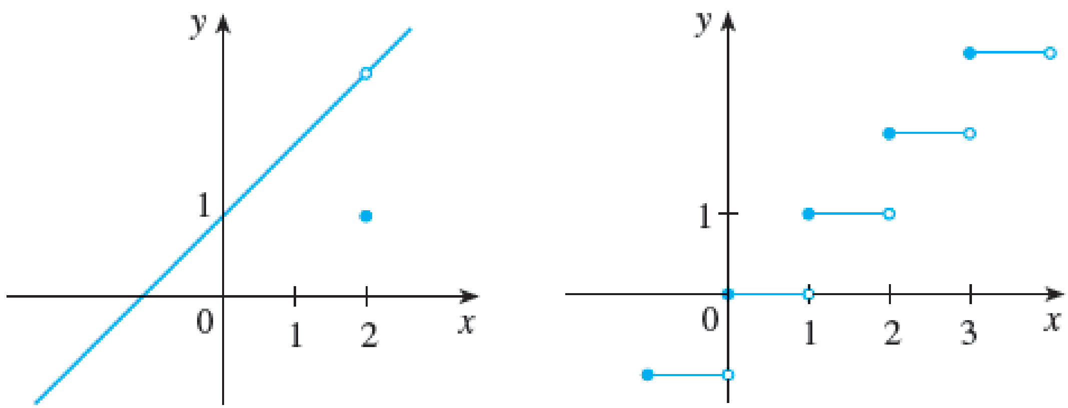
(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

Gráficos das funções do Exemplo 2

Figura 3

Continuidade



(c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{se } x\neq 2 \\ 1 & \text{se } x=2 \end{cases}$

(d) $f(x)=[\![x]\!]$

Gráficos das funções do Exemplo 2

Figura 3

Continuidade

Em cada caso o gráfico não pode ser feito sem levantar a caneta do papel, pois um buraco, uma quebra ou salto ocorrem no gráfico. As descontinuidades ilustradas nas partes (a) e (c) são chamadas **removíveis,** pois podemos removê-las redefinindo f somente no número 2. [A função $g(x) = x + 1$ é contínua]. A descontinuidade da parte (b) é denominada **descontinuidade infinita**. As descontinuidades da parte (d) são ditas **descontinuidades em saltos**, porque a função "salta" de um valor para outro.

Continuidade

2 Definição Uma função f é **contínua à direita em um número *a*** se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e f é **contínua à esquerda em *a*** se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

3 Definição Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos *continuidade* na extremidade como *continuidade à direita* ou *à esquerda*.)

Continuidade

Ao invés de sempre usar as Definições 1, 2 e 3 para verificar a continuidade de uma função, muitas vezes é conveniente usar o próximo teorema, que mostra como construir as funções contínuas complicadas a partir de simples.

$\boxed{4}$ **Teorema** Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

Continuidade

Segue do Teorema 4 e da Definição 3 que se *f* e *g* forem contínuas em um intervalo, então *f* + *g*, *f* – *g*, *cf*, *fg*, (se *g* nunca for 0) *f*/*g* também o são. O seguinte teorema foi enunciado na Propriedade da Substituição Direta.

5 Teorema

(a) Qualquer polinômio é contínuo em toda a parte; ou seja, é contínuo em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

(b) Qualquer função racional é contínua sempre que estiver definida; ou seja, é contínua em seu domínio.

Continuidade

Como uma ilustração do Teorema 5, observe que o volume de uma esfera varia continuamente com seu raio, pois a fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ mostra que V é denominada polinomial de r. Da mesma forma, se uma bola for atirada verticalmente no ar com uma velocidade de 20 m/s, então a altura da bola em metros, t segundos mais tarde, é dada pela fórmula $h = 20t - 4{,}9t^2$.

Novamente, essa é uma função polinomial, portanto a altura é uma função contínua do tempo decorrido.

Continuidade

Resulta que as funções familiares são contínuas em todos os números de seus domínios.

Pela forma dos gráficos das funções seno e cosseno iríamos certamente conjecturar que elas são contínuas.

Sabemos das definições de sen θ e cos θ que as coordenadas do ponto *P* na Figura 5 são (cos θ, sen θ). À medida que $\theta \to 0$, vemos que *P* tende ao ponto (1, 0) e, portando, cos $\theta \to 1$ e sen $\theta \to 0$.

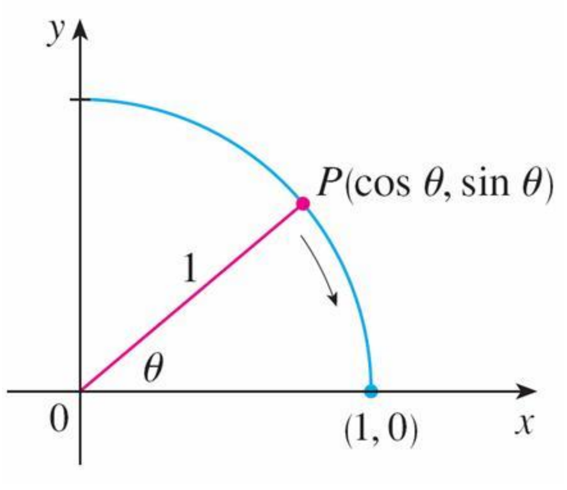


Figura 5

Continuidade

Assim,

$$\boxed{6} \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \sin \theta = 0$$

Uma vez que cos 0 = 1 e sen 0 = 0, as equações em $\boxed{6}$ asseguram que as funções seno e cosseno são contínuas em 0. As fórmulas de adição para seno e cosseno podem, então, ser usadas para deduzir que essas funções são contínuas em toda a parte.

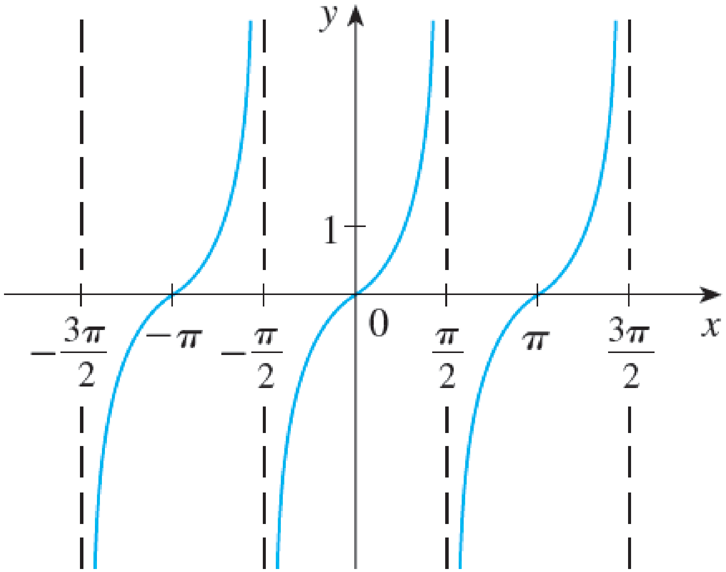
Segue da parte 5 do Teorema 4 que

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

é contínua, exceto onde cos x = 0.

Continuidade

Isso acontece quando *x* é um múltiplo inteiro ímpar de $\pi/2$, portanto $y = \text{tg } x$ tem descontinuidades infinitas quando $x = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2$, e assim por diante (veja a Figura 6).



$y = \text{tg } x$

Figura 6

Continuidade

7 Teorema Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios:

polinômios	funções racionais	funções raízes
funções trigonométricas	funções trigonométricas inversas	
funções exponenciais	funções logarítmicas	

Outra forma de combinar as funções contínuas *f* e *g* para obter novas funções contínuas é formar a função composta $f \circ g$. Esse fato é uma consequência do seguinte teorema.

8 Teorema Seja f contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Em outras palavras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

Continuidade

Intuitivamente, o Teorema 8 é razoável, pois se x está próximo de a, então $g(x)$ estará próximo de b, e como f é contínua em b, se $g(x)$ está próxima de b, então $f(g(x))$ estará próxima de $f(b)$.

9 Teorema Se g for contínua em a e f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Uma propriedade importante das funções contínuas está expressa pelo teorema a seguir, cuja demonstração é encontrada em textos mais avançados de cálculo.

10 Teorema do Valor Intermediário Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.

Continuidade

O Teorema do Valor Intermediário afirma que uma função contínua assume todos os valores intermediários entre os valores da função *f*(*a*) e *f*(*b*). Isso está ilustrado na Figura 8.

Observe que o valor *N* pode ser assumido uma vez [como na parte (a)] ou mais [como na parte (b)].

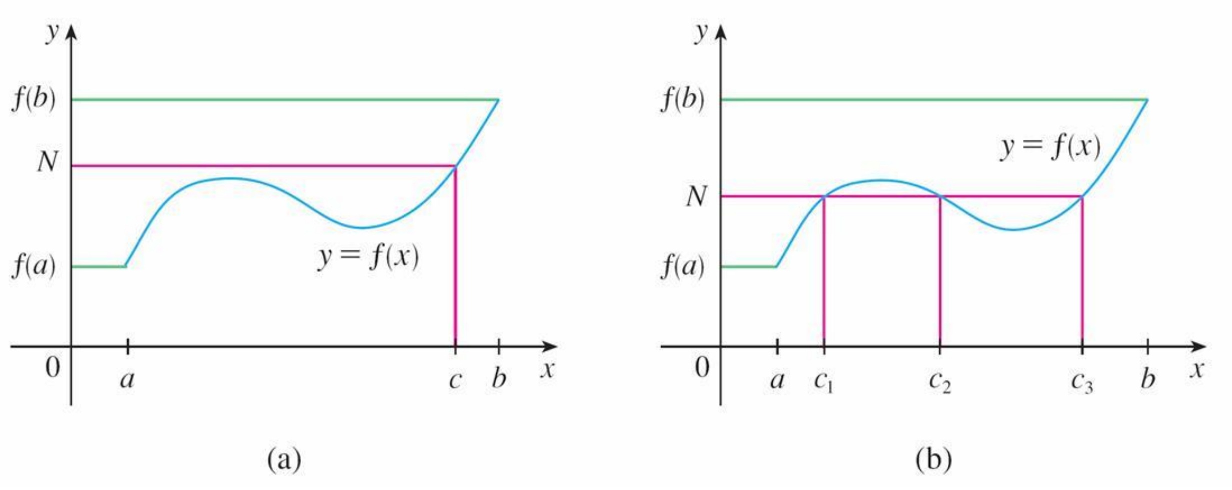


Figura 8

Continuidade

Se pensarmos em uma função contínua como aquela cujo gráfico não tem nem saltos nem quebras, então é fácil acreditar que o Teorema do Valor Intermediário é verdadeiro.

Em termos geométricos, ele afirma que, se for dada uma reta horizontal qualquer $y = N$ entre $y = f(a)$ e $y = f(b)$, como na Figura 9, então o gráfico de f não poderá saltar a reta. Ele precisará interceptar $y = N$ em algum ponto.

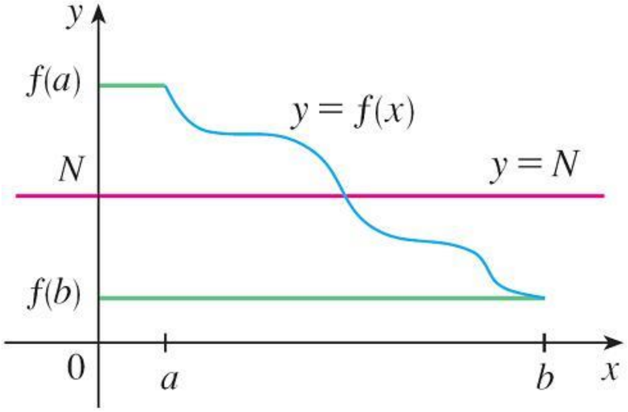


Figura 9

Continuidade

É importante que a função *f* do Teorema 10 seja contínua. O Teorema do Valor Intermediário não é verdadeiro em geral para as funções descontínuas.

Podemos usar uma calculadora gráfica ou computador para ilustrar o uso do Teorema do Valor Intermediário.

A Figura 10 mostra um gráfico de *f* em uma janela retangular [–1, 3] por [–3, 3], e você pode ver que o gráfico cruzando o eixo *x* entre 1 e 2.

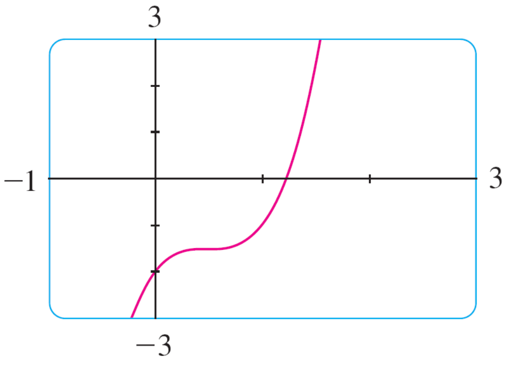


Figura 10

Continuidade

A Figura 11 mostra o resultado ao se aplicar o *zoom*, obtendo a janela retangular [1,2, 1,3] por [–0,2, 0,2].

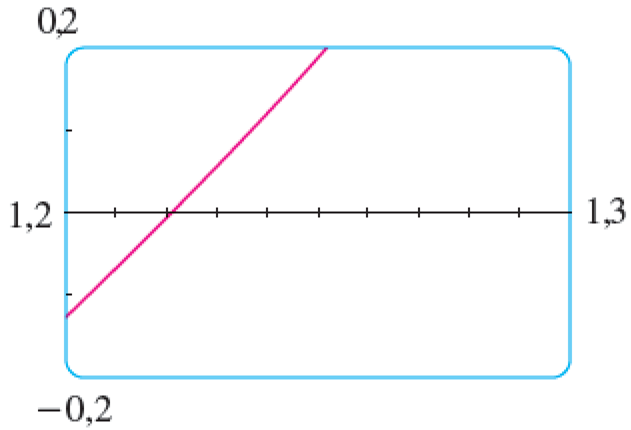


Figura 11

De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar destas ferramentas gráficas.

Continuidade

Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contêm os pontos calculados. Ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, “conecta os pontos” acendendo os pixels intermediários.