2

Limites e Derivadas

2.3 Cálculos Usando Proriedades dos Limites

Cálculos Usando Proriedades dos Limites

Nesta seção usaremos as *Propriedades dos Limites*, para calculá-los.

Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existam, então

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Cálculos Usando Proriedades dos Limites

Essas cinco propriedades podem ser enunciadas da seguinte forma:

Propriedade da Soma

1. O limite de uma soma é a soma dos limites.

Propriedade da Diferença

2. O limite de uma diferença é a diferença dos limites.

Propriedade da Multiplicação por Constante

3. O limite de uma constante multiplicando uma função é a constante multiplicando o limite desta função.

Cálculos Usando Proriedades dos Limites

Propriedade de um Produto

4. O limite de um produto é o produto dos limites.

Propriedade de Quociente

5. O limite de um quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do
denominador não seja zero).

Por exemplo, se $f(x)$ estiver próximo de L e $g(x)$ estiver próximo a M, é razoável concluir que $f(x) + g(x)$ está próximo a $L + M$.

Exemplo 1

Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de *f* e *g* na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

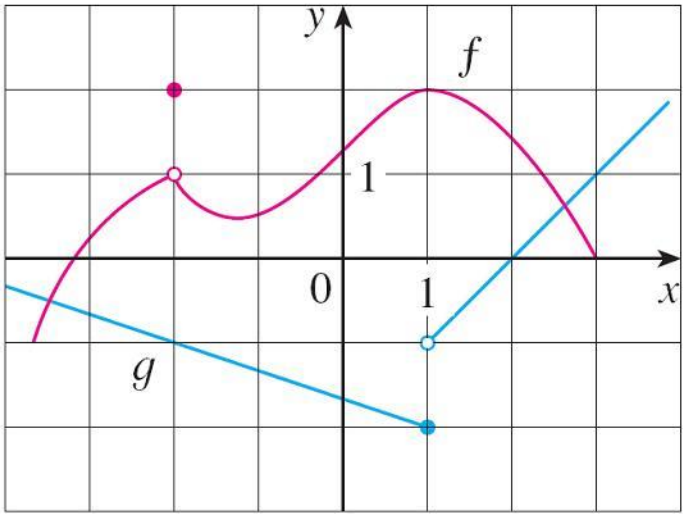

Figura 1

Exemplo 1(a) – *Solução*

Dos gráficos de *f* e *g* vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Portanto, temos

$$\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] = \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)]$$ (pela Propriedade 1)

$$= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x)$$ (pela Propriedade 3)

$$= 1 + 5(-1)$$

$$= -4$$

Exemplo 1(b) – *Solução*

continuação

Vemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Mas, $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe, pois os limites à esquerda e à direita são diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

Assim, não podemos usar a Propriedade 4 para o limite solicitado. Mas *podemos* usar a Propriedade 4 para os limites laterais:

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to 1^-} f(x) \cdot \lim_{x \to 1^-} g(x) = 2 \cdot (-2) = -4$$

$$\lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to 1^+} f(x) \cdot \lim_{x \to 1^+} g(x) = 2 \cdot (-1) = -2$$

Os limites à esquerda e à direita não são iguais, logo $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ não existe.

Exemplo 1(c) – *Solução*

continuação

Os gráficos mostram que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Como o limite do denominador
é 0, não podemos usar a Propriedade 5.

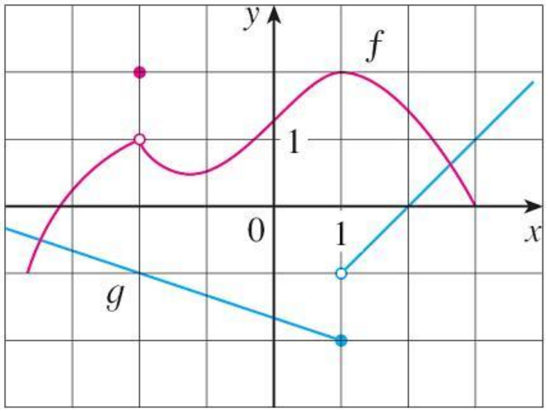

Figura 1

O limite dado não existe, pois o denominador tende a 0, enquanto o numerador tende a um número diferente de 0.

Cálculos Usando Proriedades dos Limites

Usamos a Propriedade do Produto repetidamente com $g(x) = f(x)$, para obter a seguinte equação.

$$6.\quad \lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n \qquad \text{onde } n \text{ é um inteiro positivo}$$

Para aplicar essas seis propriedades, vamos precisar usar dois limites especiais:

$$7.\quad \lim_{x \to a} c = c \qquad\qquad 8.\quad \lim_{x \to a} x = a$$

Esses limites são óbvios do ponto de vista intuitivo (expresse-os em palavras ou esboce os gráficos de $y = c$ e $y = x$).

Cálculos Usando Proriedades dos Limites

Se pusermos agora $f(x) = x$ nas Propriedades 6 e 8, vamos obter outro limite especial útil.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ onde n é um inteiro positivo

Um limite similar é válido para as raízes da forma a seguir.

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ onde n é um inteiro positivo

(Se n for par, supomos que $a > 0$.)

De forma mais geral, temos a seguinte Propriedade.

Propriedade da Raiz

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ onde n é um inteiro positivo

[Se n for par, supomos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

Cálculos Usando Proriedades dos Limites

Propriedade de Substituição Direta Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

As funções que possuem a essa propriedade de substituição direta são chamadas de *contínuas em a.*

Em geral, temos o seguinte fato útil.

Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, desde que o limite exista.

Cálculos Usando Proriedades dos Limites

Para alguns limites, é melhor calcular primeiro os limites laterais (à esquerda e à direita). O seguinte teorema diz que um limite bilateral existe se, e somente se, ambos os limites laterais existem e são iguais.

$\boxed{1}$ **Teorema** $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x).$

Quando calculamos limites laterais, aproveitamos o fato de que as Propriedades dos Limites são válidas também para eles.

Cálculos Usando Proriedades dos Limites

Os próximos dois teoremas dão duas propriedades adicionais dos limites.

2 Teorema Se $f(x) \leqslant g(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e os limites de f e g, ambos, existem, x quando tende a a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x).$$

3 Teorema do Confronto Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Cálculos Usando Proriedades dos Limites

O Teorema do Confronto, algumas vezes chamado Teorema do Sanduíche ou do Imprensamento, está ilustrado na Figura 7. Ele diz que se $g(x)$ ficar imprensado entre $f(x)$ e $h(x)$ nas proximidades de a, e se f e h tiverem o mesmo limite L em a, então t será forçada a ter o mesmo limite L em a.

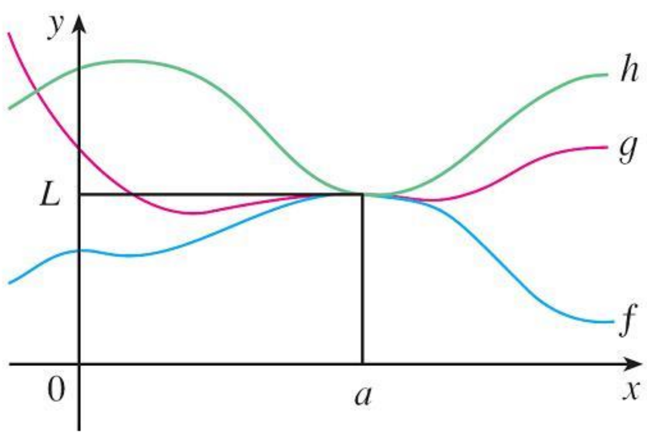

Figura 7