4

Aplicações de Derivação

4.9 Primitivas

Primitivas

Um físico que conhece a velocidade de uma partícula pode desejar saber sua posição em um dado instante. Um engenheiro que pode medir a taxa de variação segundo a qual a água está escoando de um tanque quer saber a quantidade escoada durante um certo período. Um biólogo que conhece a taxa segundo a qual uma população de bactérias está crescendo pode querer deduzir qual o tamanho da população em um certo momento futuro.

Primitivas

Em cada caso, o problema é encontrar uma função *F* cuja derivada é uma função conhecida *f*. Se a função *F* existir, ela é chamada *antiderivada* de *f*.

Definição Uma função F é denominada uma **primitiva** de f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Primitivas

Por exemplo, seja $f(x) = x^2$. Não é difícil descobrir uma primitiva de f se tivermos em mente a Regra da Potência. De fato, se $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, logo $F'(x) = x^2 = f(x)$. Mas a função $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ também satisfaz $G'(x) = x^2$. Portanto, F e G são primitivas de f. De fato, qualquer função da forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, onde C é uma constante, é uma primitiva de f.

Primitivas

O seguinte teorema diz que *f* não tem outra primitiva.

1 **Teorema** Se F é uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é

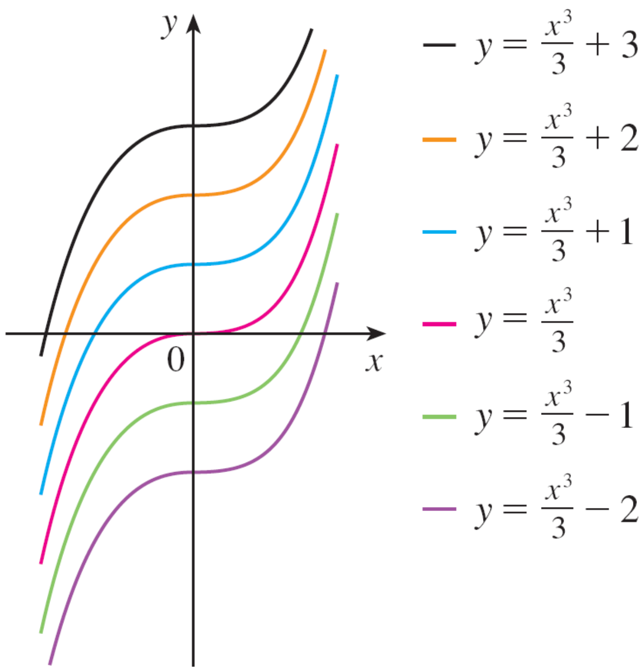
$$F(x) + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Voltando à função $f(x) = x^2$, vemos que primitiva geral de f é $\frac{1}{3}x^3 + C$.

Primitivas

Atribuindo valores específicos para a constante *C*, obtemos uma família de funções cujos gráficos são translações verticais uns dos outros (veja a Figura 1). Isso faz sentido, pois cada curva deve ter a mesma inclinação em qualquer valor dado de *x*.



Membros da família de primitivas de $f(x) = x^2$

Figura 1

Exemplo 1

Encontre a primitiva mais geral de cada uma das seguintes funções.

(a) $f(x) = \text{sen } x$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = x^n$, $n \neq -1$

SOLUÇÃO:

(a) Se $F(x) = -\cos x$, então $F'(x) = \text{sen } x$, logo uma primitiva de $\text{sen } x$ é $-\cos x$. Pelo Teorema 1, a primitiva mais geral é $G(x) = -\cos x + C$.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

(b) Sabe-se que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Logo, no intervalo $(0, \infty)$ a primitiva geral de 1/x é ln $x + C$. Também sabemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

para todos $x \neq 0$. O Teorema 1 então nos diz que a primitiva geral de $f(x) = 1/x$ é ln $|x| + C$ em qualquer intervalo que não contenha 0. Em particular, isso é verdadeiro em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Logo a primitiva geral de f é

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(c) Usamos a Regra da Potência para descobrir uma primitiva de x^n. De fato, se $n \neq -1$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Logo, a primitiva geral de $f(x) = x^n$ é

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Isso é válido para $n \geq 0$, uma vez que $f(x) = x^n$ está definida em um intervalo. Se n for negativo (mas $n \neq -1$), é válido em qualquer intervalo que não contenha 0.

Primitivas

Como no Exemplo 1, toda fórmula de derivação, quando lida da direita para a esquerda, dá origem a uma fórmula de primitivação. Na Tabela 2 listamos algumas primitivas particulares.

2 Tabela de Fórmulas de Primitivação

Função	Primitiva particular	Função	Primitiva particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \operatorname{tg} x$	$\sec x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1 + x^2}$	$\operatorname{tg}^{-1} x$
b^x	$\dfrac{b^x}{\ln b}$	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$

Para obtermos a primitiva mais geral (em um intervalo) a partir daquelas da Tabela 2, devemos adicionar uma constante (ou constantes), como no Exemplo 1.

Primitivas

Cada fórmula na tabela é verdadeira, pois a derivada da função na coluna direita aparece na coluna esquerda. Em particular, a primeira fórmula diz que a primitiva de uma constante vezes uma função é a constante vezes a primitiva da função. A segunda fórmula afirma que a primitiva de uma soma das primitivas. (Usamos a notação $F' = f$, $G' = g$.)

Primitivas

Uma equação que envolva as derivadas de uma função é chamada **equação diferencial**. A solução geral de uma equação diferencial envolve uma constante arbitrária (ou constantes). Contudo, podem ser dadas condições extras que vão determinar as constantes e assim especificar univocamente a solução.

Movimento Retilíneo

Movimento Retilíneo

A primitivação é particularmente útil na análise do movimento de um objeto que se move em uma reta. Sabe-se que se o objeto tem função posição $s = f(t)$, então a função velocidade é $v(t) = s'(t)$. Isso significa que a função posição é uma primitiva da função velocidade. Da mesma maneira, a função aceleração é $a(t) = v'(t)$, logo, a função velocidade é uma primitiva da aceleração. Se a aceleração e os valores iniciais $s(0)$ e $v(0)$ forem conhecidos, então a função posição pode ser determinada encontrando primitivas duas vezes.

Exemplo 6

Uma partícula se move em linha reta e tem aceleração dada pelo $a(t) = 6t + 4$. Sua velocidade inicial é $v(0) = –6$ cm/s, e seu deslocamento inicial é $s(0) = 9$ cm. Encontre sua função posição $s(t)$.

SOLUÇÃO: Como $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, a primitivação dá

$$v(t) = 6\,\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C.$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Observe que $v(0) = C$. Mas nos é dado que $v(0) = –6$, assim $C = –6$ e

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6 .$$

Uma vez que $v(t) = s'(t)$, s é a primitiva de v:

$$s(t) = 3\,\frac{t^3}{3} + 4\,\frac{t^2}{2} - 6t + D \quad = t^3 + 2t^2 - 6t + D.$$

Isso dá $s(0) = D$. Temos $s(0) = 9$, logo $D = 9$ e a função posição pedida é

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9.$$