4

Aplicações de Derivação

4.7 Problemas de Otimização

Problemas de Otimização

Na solução destes problemas práticos, o maior desafio está frequentemente em converter o problema em um problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada. Vamos nos lembrar dos princípios da resolução de problemas.

Problemas de Otimização

Passos na Resolução dos Problemas de Otimização

1. **Compreendendo o Problema** A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte-se: O que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?

2. **Faça um Diagrama** Na maioria dos problemas, é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e pedidas no diagrama.

3. **Introduzindo uma Notação** Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (por ora vamos chamá-la Q). Selecione também símbolos ($a, b, c, \ldots, x, y$) para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajudá-lo – por exemplo, A para área, h para altura e t para tempo.

4. Expresse Q em termos de alguns dos outros símbolos da Etapa 3.

5. Se Q for expresso como uma função de mais de uma variável na Etapa 4, use a informação dada para encontrar as relações (na forma de equações) entre essas variáveis. Use então essas equações para eliminar todas menos uma das variáveis na expressão de Q. Assim, Q será expresso como uma função de *uma* variável x, digamos, $Q = f(x)$. Escreva o domínio dessa função.

6. Use os métodos das Seções 4.1 e 4.3 para encontrar os valores máximo ou mínimo *absolutos* de f. Em particular, se o domínio de f é um intervalo fechado, então o Método de Intervalo Fechado da Seção 1.4 pode ser usado.

Exemplo 1

Um fazendeiro tem 1.200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que têm maior área?

Exemplo 1 – *Solução*

A fim de percebermos o que está acontecendo neste problema, vamos fazer uma experiência com alguns casos especiais. A Figura 1, fora de escala, mostra três maneiras possíveis de estender os 1.200 m de cerca.

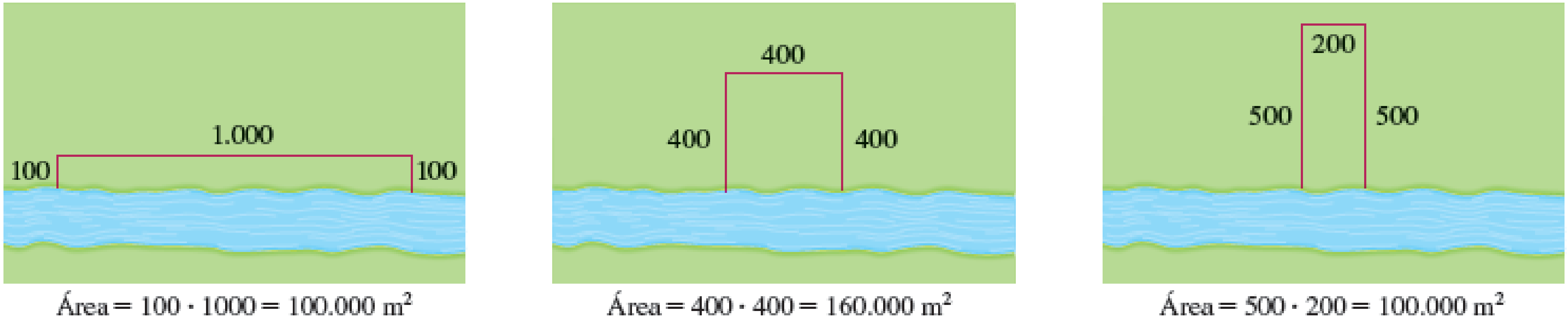

Figura 1

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Vemos que, ao tentarmos os campos rasos e extensos ou profundos e estreitos, obtemos áreas relativamente pequenas. Parece plausível que exista alguma configuração intermediária que produza a maior área.

A Figura 2 ilustra o caso geral. Desejamos maximizar a área *A* do retângulo.

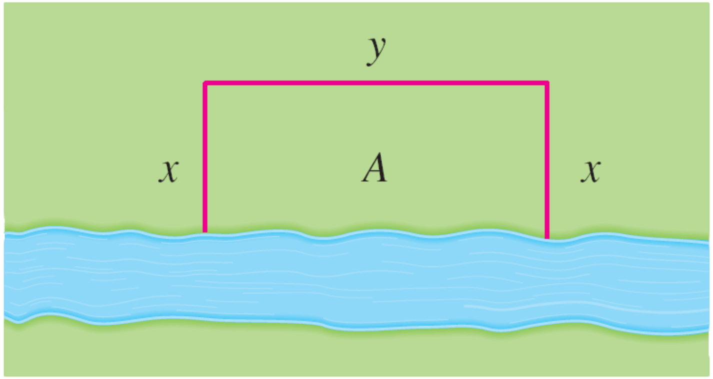

Figura 2

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Seja x e y a profundidade e a largura do retângulo (em metros). Então, expressamos A em termos de x e y:

$$A = xy$$

Queremos expressar A como uma função de apenas uma variável; assim, eliminamos y expressando-o em termos de x. Para fazermos isso, usamos a informação dada de que o comprimento total da cerca é de 1.200 m. Logo,

$$2x + y = 1.200$$

Dessa equação temos $y = 1.200 – 2x$, resultando assim

$$A = x(1.200 – 2x) = 1.200x – 2x^2.$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Observe que $x \geq 0$ e $x \leq 600$ (de outra forma resultaria $A < 0$). Logo, a função que desejamos maximizar é

$$A(x) = 1.200x - 2x^2 \qquad 0 \leq x \leq 600.$$

A derivada é $A'(x) = 1.200 - 4x$, logo, para encontrarmos os números críticos, resolvemos a equação

$$1.200 - 4x = 0$$

que nos fornece $x = 300$. O valor máximo de A deve ocorrer ou nesse número crítico ou em uma extremidade do intervalo.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Uma vez que $A(0) = 0$, $A(300) = 180.000$ e $A(600) = 0$, o Método do Intervalo Fechado nos fornece o valor máximo como $A(300) = 180.000$.

[Alternativamente poderíamos ter observado que $A''(x) = -4 < 0$ para todo x, logo A é sempre côncava para baixo, e o máximo local em $x = 300$ deve ser um máximo absoluto.]

Assim, o campo retangular deve ter 300 m de profundidade e 600 m de extensão.

Problemas de Otimização

Teste da Primeira Derivada para Valores Extremos Absolutos Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f definida em um certo intervalo.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor máximo absoluto de f.

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor mínimo absoluto de f.

Aplicações à Administração e à Economia

Aplicações à Administração e à Economia

Sabemos que se $C(x)$, a **função custo**, for o custo da produção de x unidades de certo produto, então o **custo marginal** é a taxa de variação de C em relação a x. Em outras palavras, a função de custo marginal é a derivada, $C'(x)$, da função custo.

Vamos considerar agora o marketing. Seja $p(x)$ o preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender x unidades. Então, p é chamada **função demanda** (ou **função preço**) e esperaríamos que ela fosse uma função decrescente de x.

Aplicações à Administração e à Economia

Se x unidades forem vendidas e o preço por unidade for $p(x)$, então a receita total será

$$R(x) = \text{qunatidade x preço} = xp(x)$$

e R é chamada **função receita**. A derivada R' da função receita é chamada **função receita marginal** e é a taxa de variação da receita com relação ao número de unidades vendidas.

Aplicações à Administração e à Economia

Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

e P é chamada de **função lucro**. A **função lucro marginal** é P', a derivada da função lucro.

Exemplo 6

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de televisores de tela plana por semana a $ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada $10 de desconto oferecido aos compradores, o número de TVs vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

Solução: Se x for o número de reprodutores de TVs vendidas por semana, então o aumento semanal nas vendas será x – 200. Para cada aumento de 20 unidades vendidas, o preço cai em $ 10.

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Portanto, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será $\frac{1}{20} \times 10$ e a função demanda será

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}\,(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}\,x.$$

A função receita é

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Uma vez que $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Este valor de x dá um máximo absoluto pelo Teste da Primeira Derivada (ou simplesmente observando que o gráfico de R é uma parábola que abre para baixo).

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

O preço correspondente é

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

e o desconto é 350 – 225 = 125. Portanto, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de $ 125.