4

Aplicações de Derivação

4.5 Resumo do Esboço de Curvas

Roteiro para Esboçar uma Curva

Roteiro para Esboçar uma Curva

A lista a seguir pretende servir como um guia para esboçar uma curva $y = f(x)$ à mão. Nem todos os itens são relevantes para cada função. (Por exemplo, uma curva pode não ter assíntotas ou não possuir simetria.) No entanto, o roteiro fornece todas as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função.

A. Domínio É frequentemente útil começar determinando o domínio D de f, isto é, o conjunto dos valores de x para os quais $f(x)$ está definida.

Roteiro para Esboçar uma Curva

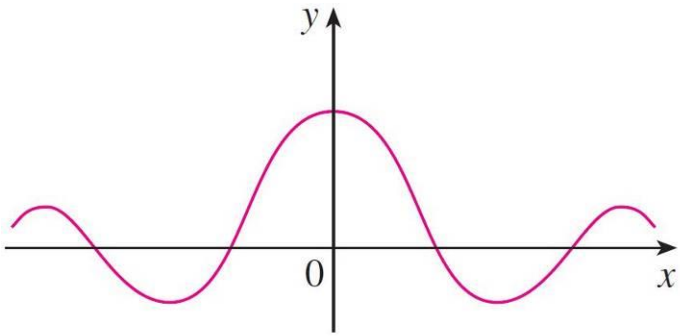
B. Intersecções com os Eixos A intersecção com o eixo *y* é $f(0)$. Para encontrarmos as intersecções com o eixo *x*, fazemos $y = 0$ e isolamos *x*. (Você pode omitir esse passo se a equação for difícil de resolver.)

C. Simetria

(i) Se $f(–x) = f(x)$ para todo *x* em *D*, isto é, a equação da curva não muda se *x* for substituído por $–x$, então *f* é uma **função par**, e a curva é simétrica em relação ao eixo *y*.

Roteiro para Esboçar uma Curva

Isso significa que nosso trabalho fica cortado pela metade. Se soubermos como é a curva para $x \geq 0$, então precisaremos somente refletir em torno do eixo y para obter a curva completa [veja a Figura 3(a)].



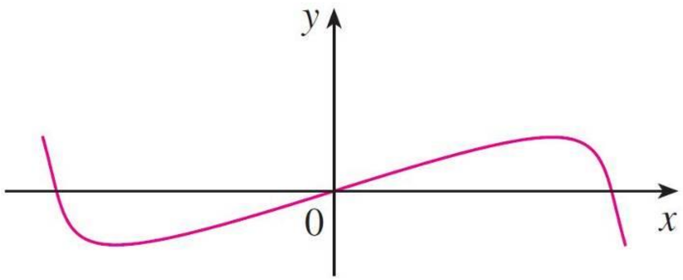
Função par; simetria reflexional

Figura 3(a)

Alguns exemplos são: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$, e $y = \cos x$.

Roteiro para Esboçar uma Curva

(ii) Se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em D, então f é uma **função ímpar** e a curva é simétrica em relação à origem. Novamente, podemos obter a curva completa se soubermos como ela é para $x \geq 0$. [Girando 180° em torno, da origem; veja a Figura 3(b).] Alguns exemplos simples de funções ímpares são: $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ e $y = \text{sen}\, x$.

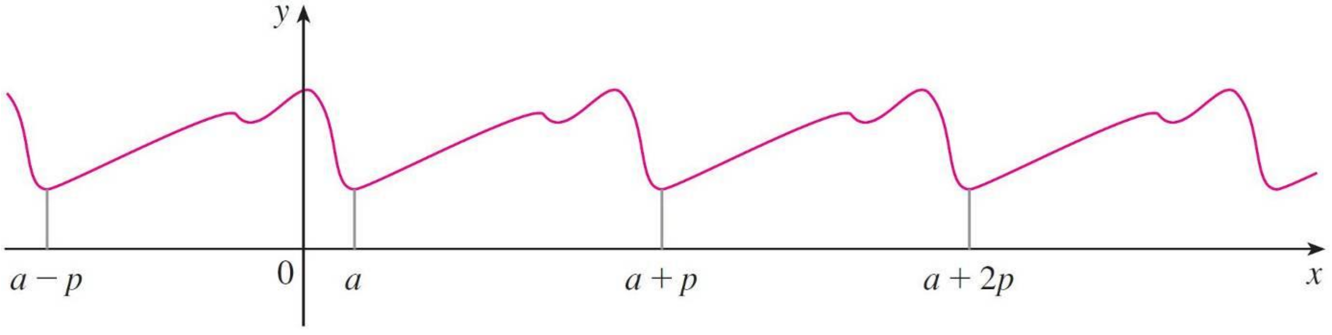


Função ímpar; simetria rotacional

Figura 3(b)

Roteiro para Esboçar uma Curva

(iii) Se $f(x + p) = f(x)$ para todo x em D, onde p é uma constante positiva, então f é chamada **função periódica**, e o menor desses números p é chamado **período**. Por exemplo, y = sen x tem o período 2π e y = tg x tem período π. Se soubermos como é o gráfico em um intervalo de comprimento p, então poderemos usar a translação para esboçar o gráfico inteiro (veja a Figura 4).



Funções periódica: simetria translacional

Figura 4

Roteiro para Esboçar uma Curva

D. Assíntotas

(i) *Assíntotas horizontais.* Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, então a linha $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$. Se resultar que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não temos uma assíntota à direita, o que também é uma informação proveitosa no esboço da curva.

Roteiro para Esboçar uma Curva

(ii) *Assíntotas verticais.* A reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das seguintes afirmativas for verdadeira:

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para as funções racionais, você pode localizar as assíntotas verticais igualando a zero o denominador, após ter cancelado qualquer fator comum. Mas para as outras funções esse método não se aplica.)

Roteiro para Esboçar uma Curva

Além disso, ao esboçar a curva é muito útil saber exatamente qual das afirmativas em $\boxed{1}$ é verdadeira. Se $f(a)$ não estiver definida, mas a for uma extremidade do domínio de f, então você deve calcular $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x)$, seja esse limite infinito ou não.

(iii) *Assíntotas oblíquas.*

E. Intervalos de Crescimento ou Decrescimento Use o Teste C/D. Calcule $f'(x)$ e encontre os intervalos nos quais $f'(x)$ é positiva (f é crescente) e os intervalos nos quais $f'(x)$ é negativa (f é decrescente).

Roteiro para Esboçar uma Curva

F. Valores Máximos e Mínimos Locais Encontre os números críticos de f [os números c nos quais $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe]. Use então o Teste da Primeira Derivada. Se f' muda de positiva para negativa em um número crítico c, então $f(c)$ é o máximo local. Se f' muda de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um mínimo local. Apesar de ser usualmente preferível usar o Teste da Primeira Derivada, você pode usar o Teste da Segunda Derivada se $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$. Então $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ é um mínimo, enquanto $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ é um máximo local.

Roteiro para Esboçar uma Curva

G. Concavidade e Pontos de Inflexão Calcule $f''(x)$ e use o Teste da Concavidade. A curva é côncava para cima se $f''(x) > 0$, e côncava para baixo se $f''(x) < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.

H. Esboço da Curva Usando as informações nos itens A–G, faça o gráfico. Coloque as assíntotas como linhas tracejadas. Marque as intersecções com os eixos, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão.

Roteiro para Esboçar uma Curva

Então, faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo de acordo com E, com a concavidade de acordo com G e tendendo às assíntotas. Se precisão adicional for desejada próximo de algum ponto, você poderá calcular o valor da derivada aí. A tangente indica a direção na qual a curva segue.

Exemplo 1

Use o roteiro para esboçar a curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. O domínio é

$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

B. As intersecções com os eixos *x* e *y* são ambas 0.

C. Uma vez que $f(-x) = f(x)$, a função *f* é par. A curva é simétrica em relação ao eixo *y*.

Exemplo 1

continuação

D.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Portanto, a reta *y* = 2 é uma assíntota horizontal.

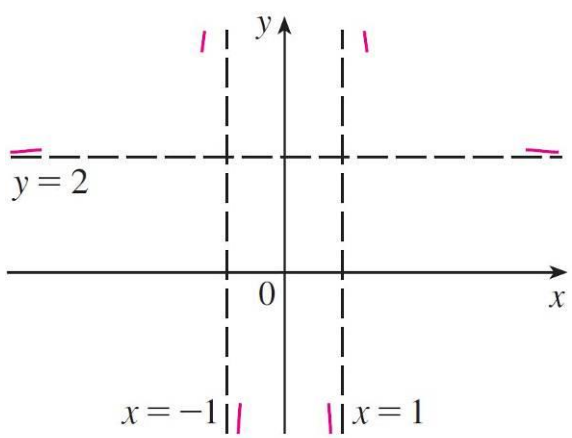
Uma vez que o denominador é zero quando *x* = ±1, calculamos os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

Exemplo 1

Consequentemente, as retas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais. Essa informação sobre os limites e as assíntotas permite-nos traçar um esboço preliminar na Figura 5 mostrando as partes da curva próximas das assíntotas.



Esboço preliminar

Figura 5

Exemplo 1

continuação

E. $$f'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Como $f'(x) > 0$ quando $x < 0$ ($x \neq -1$) e $f'(x) < 0$ quando $x > 0$ ($x \neq 1$), f é crescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$ e decrescente em $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

F. O único número crítico é $x = 0$. Uma vez que f' muda de positiva para negativa em 0, $f(0) = 0$ é um máximo local pelo Teste da Primeira Derivada.

Exemplo 1

continuação

G. $$f''(x) = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

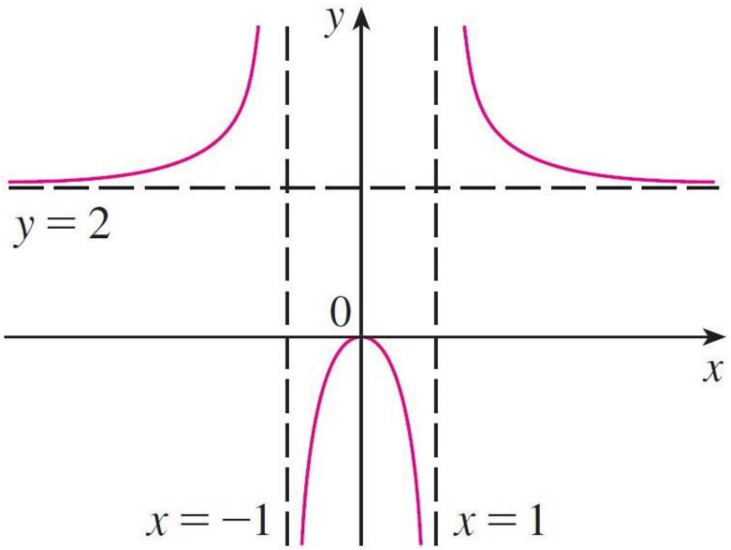
Uma vez que $12x^2 + 4 > 0$ para todo x, temos

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

e $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Assim, a curva é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ e côncava para baixo em $(-1, 1)$. Não há ponto de inflexão, já que 1 e –1 não estão no domínio de f.

Exemplo 1

H. Usando a informação em E–G, finalizamos o esboço da Figura 6.



Esboço final de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

Figura 6

Assíntotas oblíquas

Assíntotas Oblíquas

Algumas curvas têm assíntotas que são *oblíquas,* isto é, não são horizontais nem verticais. Se

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

onde m ≠ 0, então a reta $y = mx + b$ é chamada **assíntota oblíqua**, pois a distância vertical entre a curva $y = f(x)$ e a linha $y = mx + b$ Tende a 0, como na Figura 12. (Uma situação similar existe se $x \to -\infty$.)

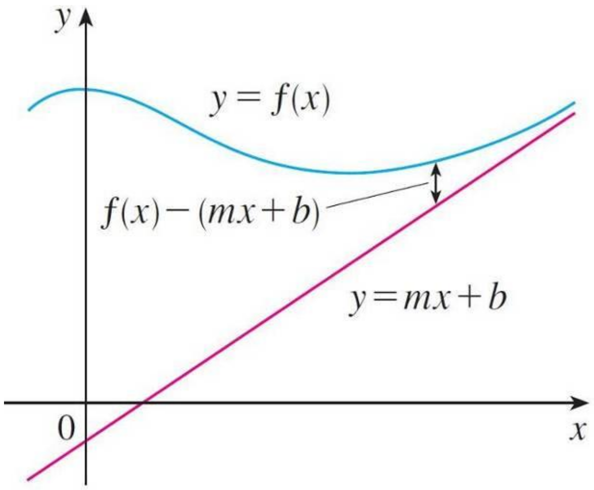


Figura 12

Assíntotas Oblíquas

Para funções racionais, assíntotas oblíquas ocorrem quando a diferença entre os graus do numerador é do denominador é igual a 1. Neste caso, a equação de uma assíntota oblíqua pode ser encontrada por divisão de polinômios, como no exemplo a seguir:

Exemplo 6

Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. O domínio é $\mathbb{R}$ = $(-\infty, \infty)$.

B. As intersecções com os eixos *x* e *y* são ambas 0.

C. Vista que *f*(–*x*) = –*f*(*x*), *f* é ímpar, e seu gráfico, simétrico em relação à origem.

D. Como $x^2 + 1$ nunca é 0, não há assíntota vertical. Uma vez que *f*(*x*) $\to \infty$ quando *x* $\to \infty$ e *f*(*x*) $\to -\infty$ quando *x* $\to -\infty$ não há assíntota horizontal.

Exemplo 6

continuação

Mas a divisão de polinômios fornece

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

Essa equação sugere que y = x é uma candidata a assíntota oblíqua. De fato,

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow \pm\infty$$

Logo, a reta *y* = *x* é uma assíntota oblíqua.

Exemplo 6

continuação

E. $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Uma vez que $f'(x) > 0$ para todo x (exceto 0), f é crescente em $(-\infty, \infty)$.

F. Embora $f'(0) = 0$, f' não muda o sinal em 0, logo não há máximo ou mínimo local.

Exemplo 6

continuação

G. $f''(x) = \dfrac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \dfrac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$

Visto que $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, montamos o a seguinte tabela:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CC em $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CB em $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CC em $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CB em $(\sqrt{3}, \infty)$

Os pontos de inflexão são $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$, (0, 0), e $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

Exemplo 6

H. O gráfico de *f* está esboçado na Figura 13.

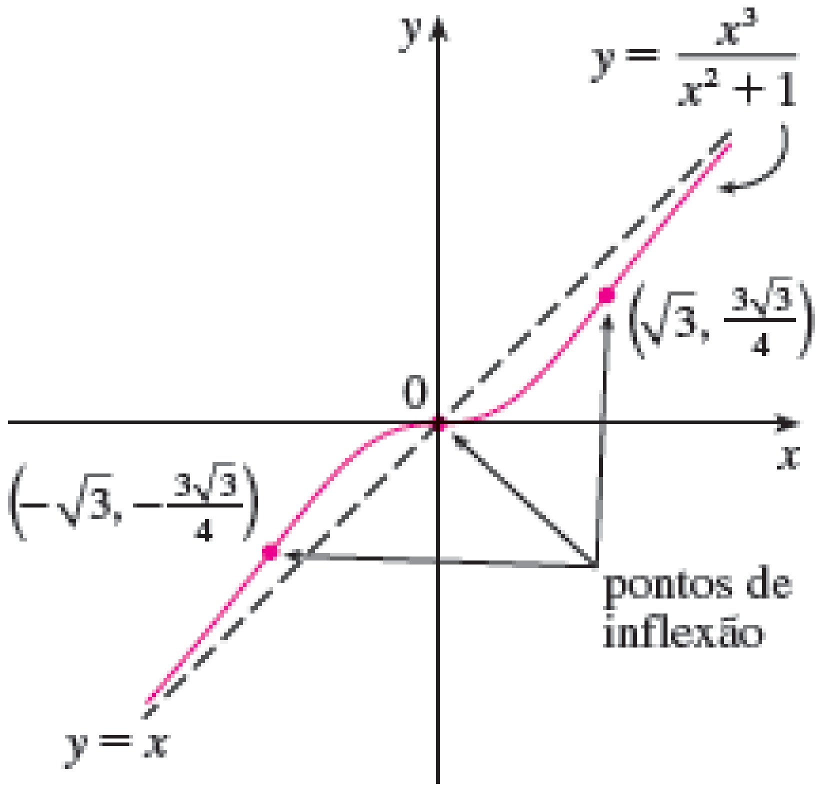


Figura 13