4

Aplicações de Derivação

4.2 O Teorema do Valor Médio

4.2 O Teorema do Valor Médio

Veremos que muitos dos resultados deste capítulo dependem de um fato central, que é chamado Teorema do Valor Médio. Mas, para chegar ao Teorema do Valor Médio, precisamos primeiro do seguinte resultado.

Teorema de Rolle Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

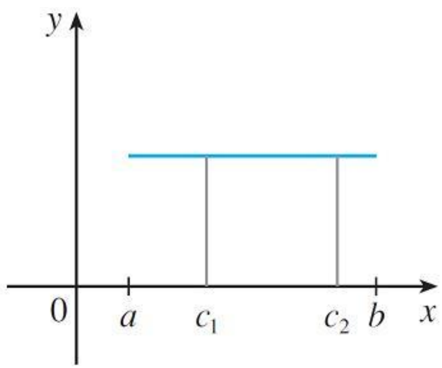
1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$

Então, existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

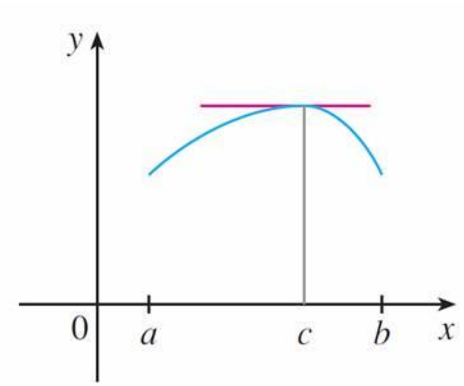
Antes de darmos a demonstração, vamos olhar os gráficos de algumas funções típicas que satisfaçam as três hipóteses.

4.2 O Teorema do Valor Médio

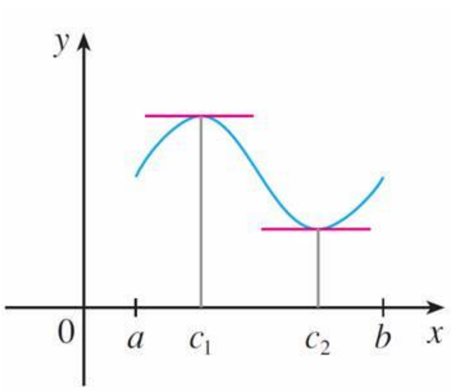
A Figura 1 mostra os gráficos de quatro dessas funções.



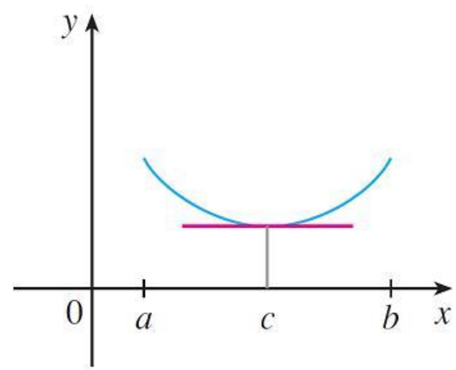
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1

4.2 O Teorema do Valor Médio

Em cada caso, parece que há pelo menos um ponto $(c, f(c))$ onde a tangente é horizontal e, portanto, $f'(c) = 0$. Assim, o Teorema de Rolle é plausível.

Exemplo 2

Demonstre que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

Solução: Primeiro, usamos o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz. Seja $f(x) = x^3 + x - 1$. Então $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua; assim, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 0 e 1 tal que $f(c) = 0$. A equação dada, portanto, tem uma raiz.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Para mostrar que a equação não tem outra raiz real, usamos o Teorema de Rolle e argumentamos por contradição. Suponha que ele tenha duas raízes a e b. Então $f(a) = 0 = f(b)$ e, uma vez que f é uma função polinomial, é derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Assim, pelo Teorema de Rolle, existe um número c entre a e b entre $f'(c) = 0$. Mas

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 \qquad \text{para todos } x$$

(uma vez que $x^2 \geq 0$), portanto, $f'(x)$ nunca pode ser zero. Isso fornece uma contradição. Portanto, a equação não pode ter duas raízes reais.

4.2 O Teorema do Valor Médio

Nosso principal uso do Teorema de Rolle é na demonstração do seguinte importante teorema, o qual foi primeiro enunciado por outro matemático francês, Joseph-Louis Lagrange.

O Teorema do Valor Médio Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).

Então, existe um número c em (a, b) tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

4.2 O Teorema do Valor Médio

Antes de demonstrarmos esse teorema, podemos ver que ele é razoável interpretando-o geometricamente. As Figuras 3 e 4 mostram os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ sobre os gráficos de duas funções deriváveis.

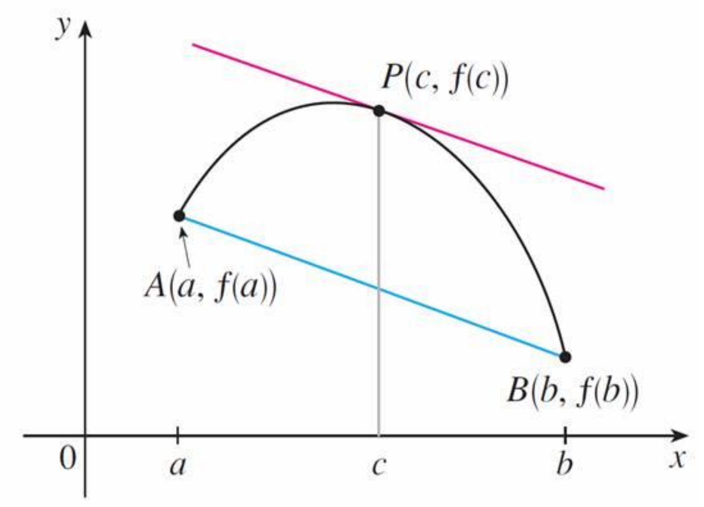


Figura 3

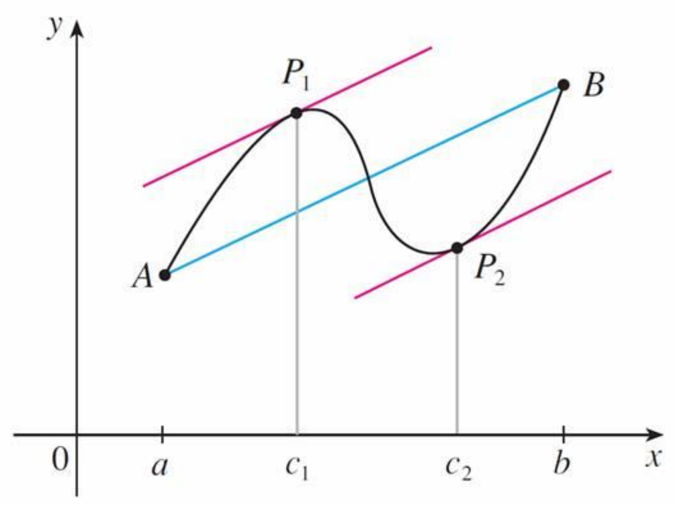


Figura 4

4.2 O Teorema do Valor Médio

A inclinação da reta secante *AB* é

$$\boxed{3} \qquad m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que é a mesma expressão mostrada no lado direito da Equação 1. Uma vez que $f'(c)$ é a inclinação da reta tangente no ponto $(c, f(c))$, o Teorema do Valor Médio na forma dada pela Equação 1, diz que há, no mínimo, um ponto $P(c, f(c))$ sobre o gráfico onde a inclinação da reta tangente é igual à inclinação da reta secante *AB*. Em outras palavras, há um ponto *P* onde a reta tangente é paralela à reta secante *AB*.

Exemplo 3

Para ilustrarmos o Teorema do Valor Médio com uma função específica, vamos considerar $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Uma vez f é uma função polinomial, então ela é contínua e derivável para todo x; logo, é certamente contínua em $[0, 2]$ e derivável em $(0, 2)$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c em $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0).$$

Agora $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ e $f'(x) = 3x^2 - 1$, e essa equação fica

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

o que dá $c^2 = \frac{4}{3}$, isto é $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Mas c deve estar $(0, 2)$, então, $c = 2/\sqrt{3}$.

Exemplo 3

continuação

A Figura 6 ilustra esse cálculo: a reta tangente neste valor de *c* é paralela à reta secante *OB*.

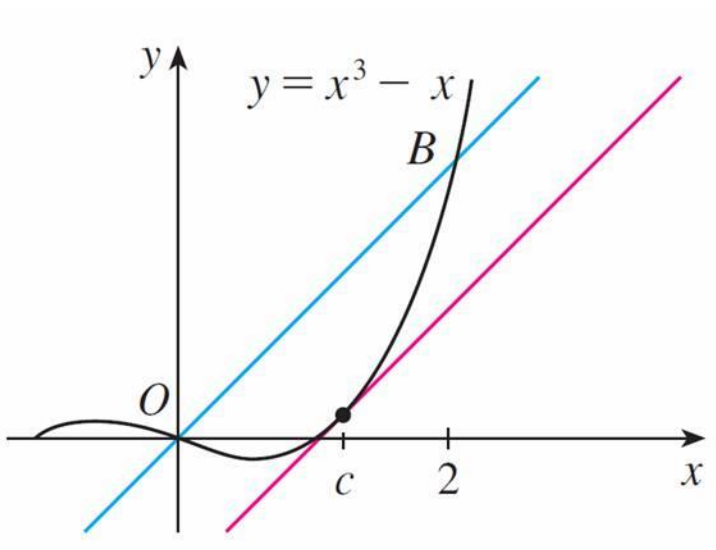


Figura 6

Exemplo 5

Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?

Solução: Foi-nos dado que f é derivável (e, portanto, contínua) em toda parte. Em particular, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio ao intervalo [0, 2]. Existe, então, um número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

logo $$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c).$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Foi-nos dado que $f'(x) \leq 5$ para todo x; assim, sabemos que $f'(c) \leq 5$. Multiplicando por 2 ambos os lados dessa desigualdade, temos $2f'(c) \leq 10$, logo

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7.$$

O maior valor possível para $f(2)$ é 7.

4.2 O Teorema do Valor Médio

O Teorema do Valor Médio pode ser usado para estabelecer alguns dos fatos básicos do cálculo diferencial. Um deles é o teorema a seguir.

5 Teorema Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

7 Corolário Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b); isto é, $f(x) = g(x) + c$, em que c é uma constante.

4.2 O Teorema do Valor Médio

Observação:

É necessário cuidado ao aplicar o Teorema 5. Seja

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O domínio de *f* é $D = \{x \mid x \neq 0\}$ e $f'(x) = 0$ para todo *x* em *D*. Mas *f* não é, obviamente, uma função constante. Isso não contradiz o Teorema 5, pois *D* não é um intervalo. Observe que *f* é constante no intervalo $(0, \infty)$ e também no intervalo $(-\infty, 0)$.