4

Aplicações de Derivação

4.1 Valores Máximo e Mínimo

4.1 Valores Máximo e Mínimo

Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os *problemas de otimização*, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa. Esses problemas podem ser reduzidos a encontrar os valores máximo ou mínimo de uma função. Vamos primeiro explicar exatamente o que queremos dizer por valores máximo e mínimo.

Vemos que o ponto mais alto no gráfico da função f mostrado na Figura 1 é o ponto (3, 5).

Em outras palavras, o maior valor de

f é $f(3) = 5$. Da mesma forma, o menor valor é $f(6) = 2$.

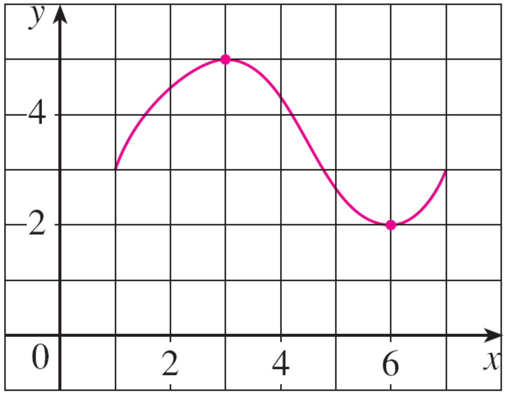


Figura 1

4.1 Valores Máximo e Mínimo

Dizemos que $f(3) = 5$ é o *máximo absoluto* of f e $f(6) = 2$ é o *mínimo absoluto*. Em geral, usamos a seguinte definição.

$\boxed{1}$ **Definição** Seja c um número no domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o

- valor **máximo absoluto** de f em D se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D.
- valor **mínimo absoluto** de f em D se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D.

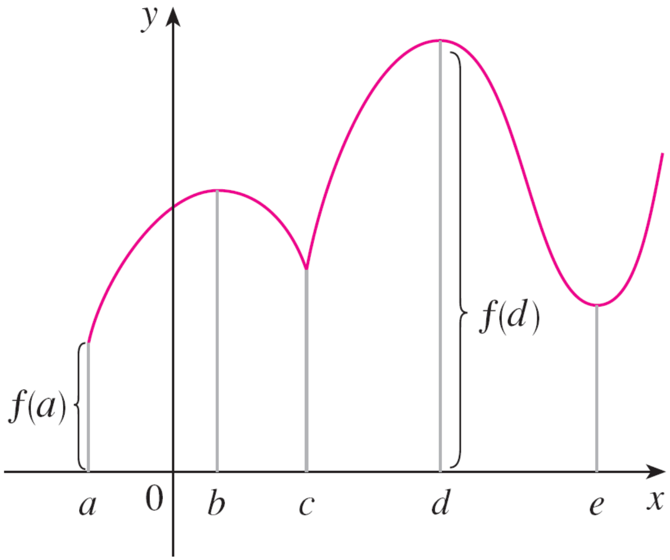
Um máximo ou mínimo absoluto às vezes é chamado de máximo ou mínimo **global**. Os valores máximos e mínimos de f são chamados de **valores extremos** de f.

4.1 Valores Máximo e Mínimo

A Figura 2 mostra um gráfico de uma função *f* com máximo absoluto em *d* e mínimo absoluto em *a*. Observe que

(*d*, *f*(*d*)) é o ponto mais alto no gráfico e (*a*, *f*(*a*)) é o menor ponto.

Na Figura 2, se considerarmos apenas os valores de *x* próximos *b* [por exemplo, se restringirmos nossa atenção ao intervalo (*a*, *c*)], então *f*(*b*) é o maior destes valores de *f*(*x*) e é chamado de *valor máximo local* de *f*.



Mínimos absolutos*f*(*a*), máximos absolutos *f*(*d*), mínimos locais *f*(*c*), *f*(*e*), máximos locais *f*(*b*), *f*(*d*)

Figura 2

4.1 Valores Máximo e Mínimo

Da mesma forma, $f(c)$ é chamado de *valor mínimo local* de f, pois $f(c) \leq f(x)$ para x próximo de c [no intervalo (b, d), por exemplo]. A função f também tem um mínimo local em e. Em geral, temos a seguinte definição.

$\boxed{2}$ **Definição** O número $f(c)$ é um

- valor **máximo local** de f se $f(c) \geq f(x)$ quando x está próximo de c.
- valor **mínimo local** de f se $f(c) \leq f(x)$ quando x está próximo de c.

Na Definição 2 (e em outros lugares), se dissermos que algo é verdadeiro **próximo a** c, queremos dizer que é verdadeiro no intervalo aberto contendo c.

4.1 Valores Máximo e Mínimo

Por exemplo, na Figura 3 observamos que $f(4) = 5$ é um valor mínimo local, pois é o menor valor de f no intervalo I.

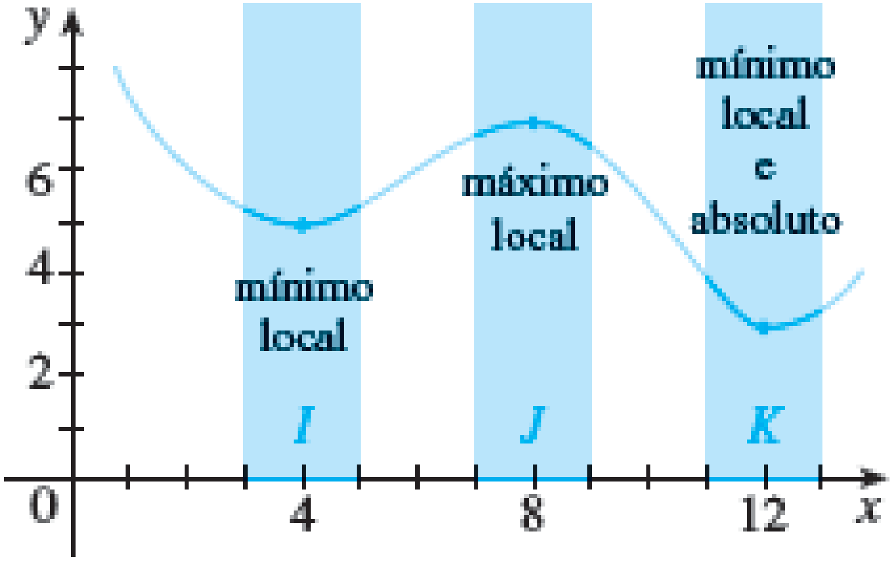


Figura 3

4.1 Valores Máximo e Mínimo

Não é o mínimo absoluto porque $f(x)$ tem valores menores quando x está próximo de 12 (no intervalo K, por exemplo).

Na verdade, $f(12) = 3$ é tanto o mínimo local quanto o mínimo absoluto. De forma análoga, $f(8) = 7$ é o máximo local, mas não é o máximo absoluto porque f tem valores maiores perto de 1.

Exemplo 1

A função $f(x) = \cos x$ assume seu valor máximo (local e absoluto) 1 infinitas de vezes, uma vez que $\cos 2n\pi = 1$ para todo inteiro n e $-1 \le \cos x \le 1$ para todo x. Da mesma forma, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ é seu valor mínimo, onde n é qualquer número inteiro. (Veja a Figura 4.)

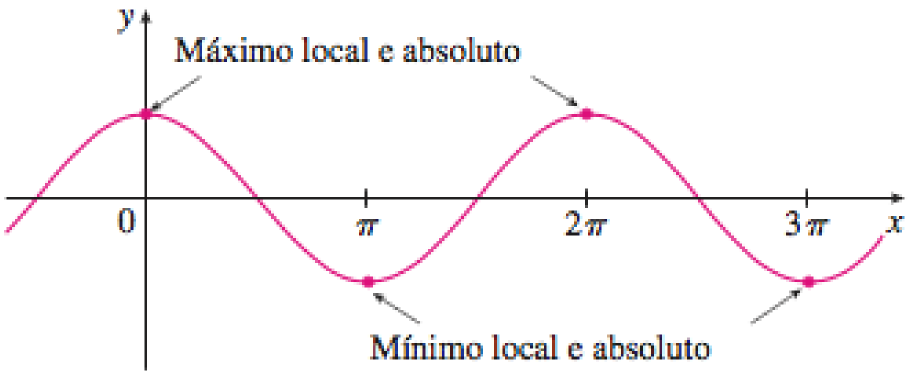


FIGURA 4

Da mesma forma, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ é seu valor mínimo, onde n é qualquer número inteiro.

4.1 Valores Máximo e Mínimo

O teorema a seguir dá condições para garantir que uma função tenha valores extremos.

$\boxed{3}$ **O Teorema do Valor Extremo** Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

O Teorema do Valor Extremo está ilustrado na Figura 8.

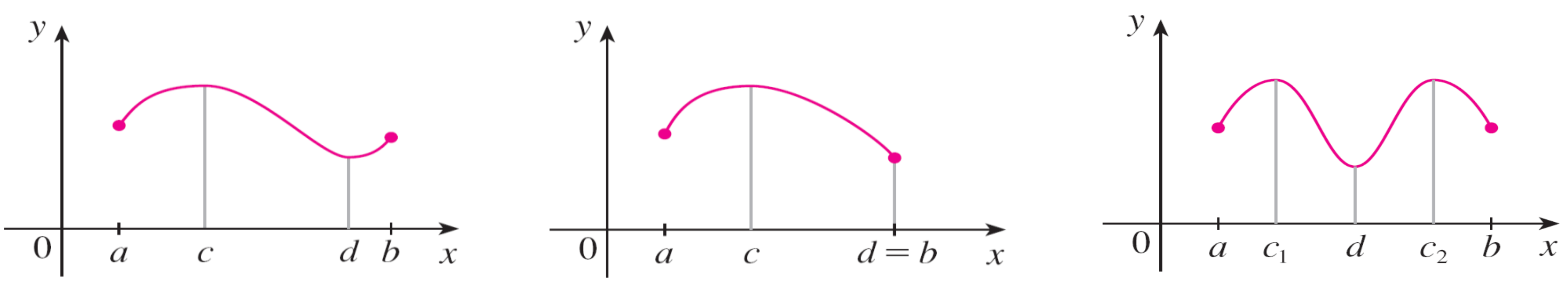
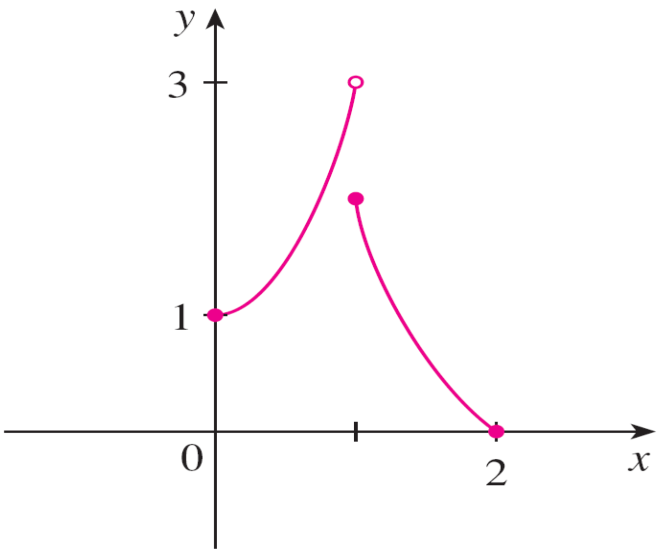


FIGURA 8
Funções contínuas em um intervalo fechado sempre atingem valores extremos.

Observe que um valor extremo pode ser assumido mais de uma vez.

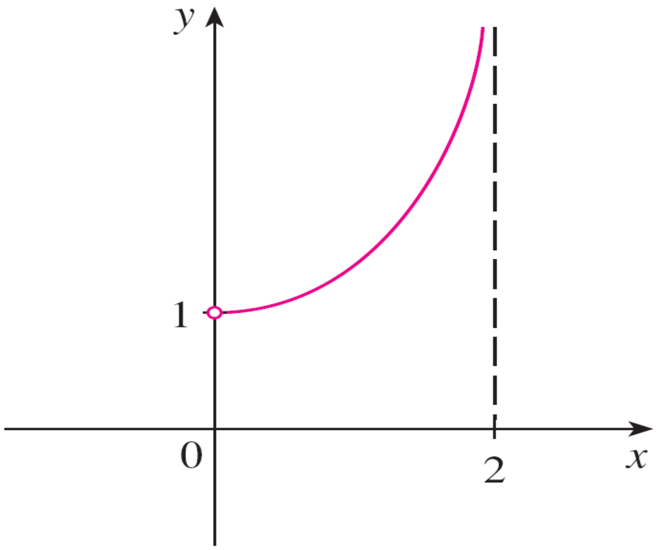
4.1 Valores Máximo e Mínimo

As Figuras 9 e 10 mostram que uma função pode não possuir valores extremos se for omitida uma das duas hipóteses (continuidade ou intervalo fechado) do Teorema do Valor Extremo.



Esta função tem valor mínimo
f(2) = 0, mas não tem valor máximo

Figura 9



Esta função contínua *g* não tem máximo, nem mínimo

Figura 10

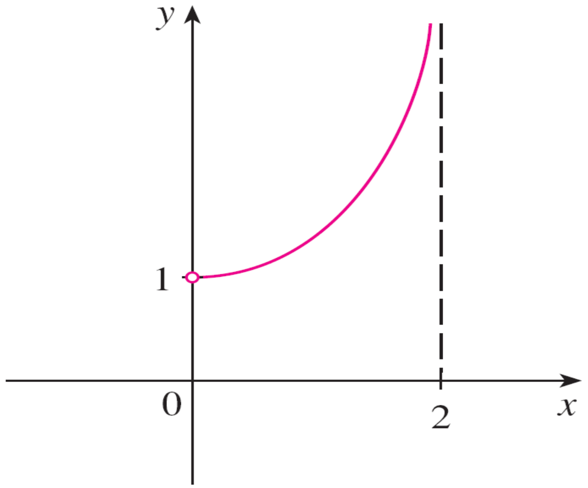
4.1 Valores Máximo e Mínimo

A função *f* cujo gráfico está mostrado na Figura 9, está definida no intervalo fechado [0, 2], mas não tem valor máximo. [Observe que a imagem de *f* é [0, 3]. Essa função assume valores arbitrariamente próximos de 3, mas nunca atinge o valor 3.] Isso não necessariamente contradiz o Teorema de Valores Extremos, pois *f* não é contínua.

4.1 Valores Máximo e Mínimo

A função *g* da Figura 10 é contínua no intervalo aberto (0, 2), mas não tem nem valor máximo nem mínimo. [A amplitude de *g* é $(1, \infty)$. Essa função assume valores arbitrariamente grandes.] Isso não contradiz o Teorema de Valores Extremos,

pois o intervalo (0, 2) não é fechado.



Esta função contínua *g* não tem mínimo, nem máximo

Figura 10

4.1 Valores Máximo e Mínimo

O Teorema do Valor Extremo afirma que uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo; contudo, não diz como encontrar esses valores extremos. Vamos começar procurando os valores extremos locais.

A Figura 11 mostra o gráfico de uma função *f* com máximo Local em *c* e mínimo local em *d*.

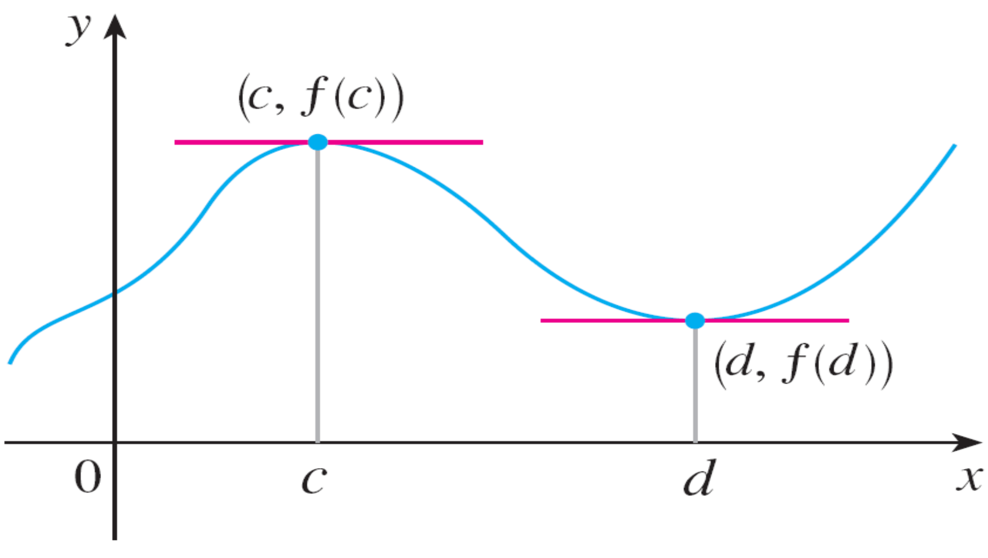


Figura 11

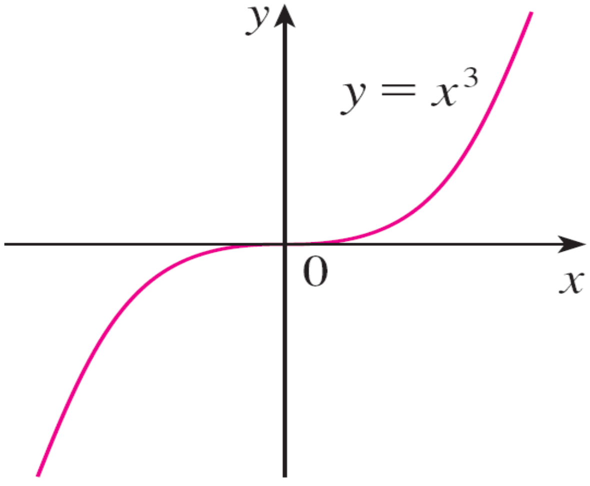
4.1 Valores Máximo e Mínimo

Parece que nos pontos de máximo e de mínimo as retas tangentes são horizontais e, portanto, cada uma tem inclinação 0. Sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente; assim, parece que $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$. O teorema a seguir afirma que isso é sempre verdadeiro para as funções diferenciáveis.

4 Teorema de Fermat Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Exemplo 5

Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$, logo $f'(0) = 0$. Porém f não tem máximo nem mínimo em 0, como podemos ver em seu gráfico na Figura 12.



Se $f(x) = x^3$, então $f'(0) = 0$ mas f não tem mínimo ou máximo

Figura 12

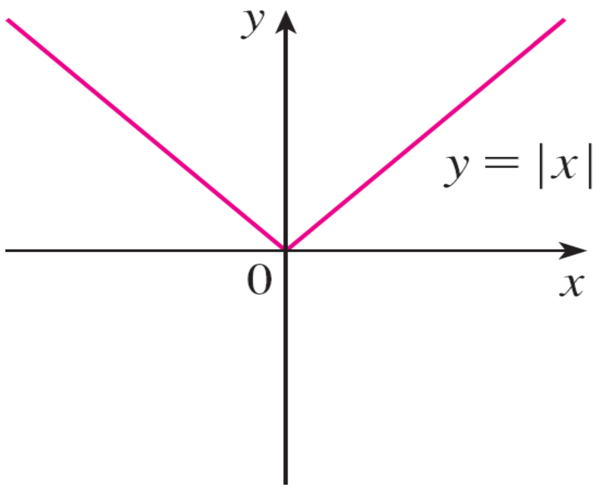
Exemplo 5

continuação

O fato de que $f'(0) = 0$ simplesmente significa que a curva $y = x^3$ tem uma reta tangente horizontal em (0, 0). Em vez de ter máximo ou mínimo em (0, 0), a curva cruza sua tangente horizontal aí.

Exemplo 6

A função $f(x) = |x|$ em seu valor mínimo (local e absoluto) em 0; contudo, mas o valor não pode ser encontrado por considerar $f'(x) = 0$, porque $f'(0)$ não existe. (Veja a Figura 13).



Se $f(x) = |x|$, então $f(0) = 0$ é um valor mínimo, mas $f'(0)$ não existe

Figura 13

4.1 Valores Máximo e Mínimo

Os Exemplos 5 e 6 mostram que devemos ser muito cuidadosos ao usar o Teorema de Fermat. O Exemplo 5 demonstra que, mesmo quando $f'(c) = 0$, não é necessário existir um mínimo ou máximo c. (Em outras palavras, a recíproca do Teorema de Fermat é falsa, em geral.) Além disso, pode existir um valor extremo mesmo quando $f'(c)$ não existir (como no Exemplo 6).

4.1 Valores Máximo e Mínimo

O Teorema de Fermat sugere que devemos pelo menos *começar* procurando por valores extremos de f nos números c onde $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe. Esses números têm um nome especial.

6 Definição Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que a $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existem.

Em termos de números críticos, o Teorema de Fermat pode ser reescrito como a seguir.

7 Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f.

4.1 Valores Máximo e Mínimo

Para encontrarmos um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado, observamos que ele é local ou acontece em uma extremidade do intervalo. Assim, o seguinte procedimento de três etapas sempre funciona.

O Método do Intervalo Fechado Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.