3

Regras de Derivação

3.4 A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

As fórmulas de derivação que você aprendeu nas seções precedentes deste capítulo não lhe permitem calcular $F'(x)$.

Observe que F é uma função composta. Na realidade, se assumirmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, então podemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$.

Sabemos como derivar ambas f e g, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

A Regra da Cadeia

O resultado é que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g. Esse fato é um dos mais importantes das regras de derivação e é chamado *Regra da Cadeia.* Ela parece plausível se interpretarmos as derivadas como taxas de variação. Considere du/dx como a taxa de variação de u com relação a x, dy/du como a taxa de variação de y com relação a u e dy/dx como a taxa de variação de y com relação a x. Se u variar duas vezes mais rápido que x, e y variar três vezes mais rápido que u, então parece plausível que y varie seis vezes mais rápido que x e, portanto, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia Se g for derivável em x e f for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$ definida por $F(x) = f(g(x))$ é derivável em x e F' é dada pelo produto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia pode ser escrita na notação linha

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, na notação de Leibniz:

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

A Equação 3 é fácil de ser lembrada, pois se dy/du e du/dx fossem quocientes, poderíamos cancelar du. Lembre-se, entretanto, de que du não está definida, e du/dx não deve ser interpretado como um quociente de fato.

Exemplo 1

Encontre $F'(x)$ se $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Solução 1: (usando a Equação 2): Expressamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, onde $f(u) = \sqrt{u}$ e $g(x) = x^2 + 1$.

Uma vez que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{e} \quad g'(x) = 2x,$$

temos $\quad F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Exemplo 1 – *Solução 2*

continuação

SOLUÇÃO 2: (usando a Equação 3): Se fizermos $u = x^2 + 1$ e $y = \sqrt{u}$, então

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

A Regra da Cadeia

Quando usarmos a Fórmula 3, deveremos ter em mente que *dy*/*dx* refere-se à derivada de *y* quando *y* for considerada uma função de *x* (chamada de *derivada de y em relação a x*), enquanto *dy*/*du* se refere à derivada de *y* quando é considerada função de *u* (a derivada de *y* em relação a *u*). No Exemplo 1, *y* pode ser considerada uma função de *x* ($y = \sqrt{x^2 + 1}$) e também uma função de *u* ($y = \sqrt{u}$). Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \text{enquanto} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

A Regra da Cadeia

Em geral, se y = sen u, onde u é uma função derivável de x, então, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Assim

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De modo análogo, todas as fórmulas para derivar funções trigonométricas podem ser combinadas com a Regra da Cadeia.

Vamos explicitar o caso especial da Regra da Cadeia, onde a função de fora f é uma função potência.

A Regra da Cadeia

Se $y = [g(x)]^n$, então podemos escrever $y = f(u) = u^n$ onde $u = g(x)$. Usando a Regra da Cadeia e, em seguida, a Regra da Potência, obteremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

$\boxed{4}$ **A Regra da Potência Combinada com a Regra da Cadeia** Se n for qualquer número real e $u = g(x)$ for derivável, então

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Alternativamente, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

Exemplo 3

Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

Solução: Fazendo $u = g(x) = x^3 - 1$ e $n = 100$ em $\boxed{4}$emos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99} \frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}.$$

A Regra da Cadeia

Podemos usar a Regra da Cadeia para derivar uma função exponencial com qualquer base $a > 0$. Lembre-se de que

$a = e^{\ln a}$. Logo

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

e a Regra da Cadeia dá

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\,\frac{d}{dx}\,(\ln a)x$$

$$= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

A Regra da Cadeia

porque ln *a* é uma constante. Então temos a fórmula

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

A Regra da Cadeia

Em particular, se a = 2, obteremos

$$\boxed{6} \qquad \frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2.$$

Demos a estimativa

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x.$$

Ela é consistente com a fórmula exata (6), pois

$\ln 2 \approx 0{,}693147$.

A razão para o nome “Regra da Cadeia” fica evidente se fizermos uma cadeia maior adicionando mais um elo.

A Regra da Cadeia

Suponha que $y = f(u)$, $u = g(x)$ e $x = h(t)$, onde f, g e h são funções deriváveis. Então, para calcular a derivada de y em relação a t, usamos duas vezes a Regra da Cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}\,\frac{dx}{dt}$$

Como Demonstrar a Regra da Cadeia

Como Demonstrar a Regra da Cadeia

Sabe-se que, se $y = f(x)$ e x varia de a para $a + \Delta x$, definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

De acordo com a definição de derivada, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Dessa forma, se denotarmos por ε a diferença entre o quociente de diferenças e a derivada, obteremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Como Demonstrar a Regra da Cadeia

Mas

$$\Delta y \quad \varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)\,\Delta x \qquad \Rightarrow$$

Se definirmos ε como 0 quando $\Delta x = 0$, então ε se torna uma função contínua de Δx. Assim, para uma função diferenciável f, podemos escrever

$\Delta y \;\boxed{7}\; f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$ onde $\varepsilon \to 0$ como $\Delta x \to 0$

e ε é uma função contínua de Δx. Essa propriedade de funções diferenciáveis é que nos possibilita demonstrar a Regra da Cadeia.