3

Regras de Derivação

3.3

Derivadas de Funções Trigonométricas

Derivadas de Funções Trigonométricas

Em particular, é importante lembrar-se de que quando falamos sobre a função f definida para todo o número real x por

$$f(x) = \text{sen } x$$

entende-se que sen x significa que o seno do ângulo cuja *medida em* radianos é x. Uma convenção similar é adotada para as outras funções trigonométricas cos, tg, cossec, sec e cotg. Todas as funções trigonométricas são contínuas em todo número em seus domínios.

Derivadas de Funções Trigonométricas

Se esboçarmos o gráfico da função $f(x)$ = sen x e usarmos a interpretação de $f'(x)$ como a inclinação da tangente à curva do seno a fim de esboçar o gráfico de f', isso dará a impressão de que o gráfico de f' pode ser igual à curva do cosseno (veja a Figura 1).

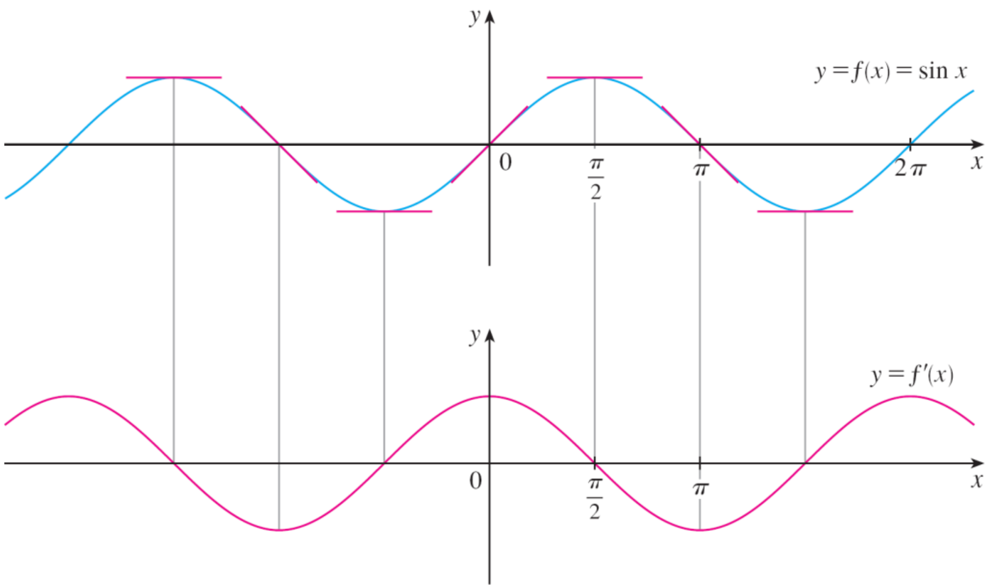

Figura 1

Derivadas de Funções Trigonométricas

Vamos tentar confirmar nossa conjectura de que, se $f(x) = \text{sen } x$, então $f'(x) = \cos x$. Da definição da derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \cos x \text{ sen } h - \text{sen } x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\text{sen } x \cos h - \text{sen } x}{h} + \frac{\cos x \text{ sen } h}{h} \right]$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

$$= \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right]$$

1 $$= \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Dois desses quatro limites são fáceis de calcular. Uma vez que consideramos *x* uma constante quando calculamos um limite quando $h \to 0$, temos

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad \lim_{h \to 0} \cos x = \cos x$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

O limite de (sen *h*)/*h* não é tão óbvio. Fizemos a conjectura, com base nas evidências numéricas e gráficas, de que

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1}$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

Usamos agora um argumento geométrico para demonstrar a Equação 2. Suponha primeiro que θ se encontre entre 0 e $\pi/2$. Figura 2(a) mostra um setor do círculo com o centro *O*, ângulo central θ e raio 1. *BC é traçado* perpendicular a *OA*.

Pela definição de medida em radianos, temos arc $AB = \theta$.

Além disso,

$|BC| = |OB| \text{ sen } \theta = \text{sen } \theta$.

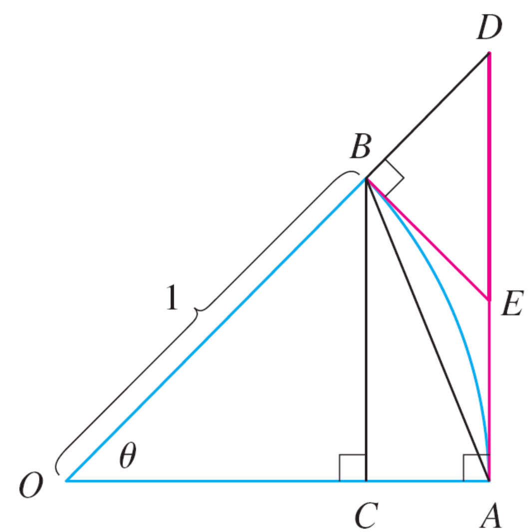

Figura 2(a)

Derivadas de Funções Trigonométricas

Do diagrama, vemos que

$$|BC| < |AB| < \text{arco } AB$$

Portanto, sen $\theta < \theta$ de modo que $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} < 1$

Assuma que as retas tangentes em *A* e *B se* interceptam em *E*. Você pode ver da Figura 2(b) que o comprimento de um círculo é menor que o comprimento de um polígono circunscrito; de modo que arc $AB < |AE| + |EB|$.

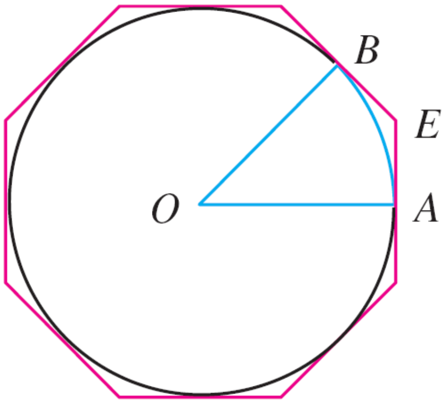

Figura 2(b)

Derivadas de Funções Trigonométricas

Assim,

$$\begin{aligned}\theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \text{ tg } \theta \\ &= \text{tg } \theta.\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\theta < \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

de modo que $$\cos \theta < \frac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

Sabemos que $\lim_{\theta \to 0} 1 = 1$ e $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$. Portanto, pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

Mas a função $(\operatorname{sen} \theta)/\theta$ é uma função par; assim, seus limites à direita e à esquerda devem ser iguais. Logo, temos

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

e, demonstramos a Equação 2.

Derivadas de Funções Trigonométricas

Podemos deduzir o valor do limite que restou em $\boxed{1}$ como segue

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1} \right) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{u \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1} \right)$$

$$= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1}$$

$$= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0$$ (Pela Equação 2)

Derivadas de Funções Trigonométricas

$\boxed{3}$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$$

Se agora colocarmos os limites $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$ em $\boxed{1}$, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

Logo, demonstramos a fórmula para a derivada da função seno:

4

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x}$$

Exemplo 1

Derive $y = x^2$ sen x.

Solução: Usando a Regra do Produto e a Fórmula 4, temos

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\text{sen } x) + \text{sen } x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \cos x + 2x \,\text{sen } x$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

Utilizando o mesmo método que na demonstração da Fórmula 4, você pode demonstrar que

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$$

A função tangente também pode ser derivada empregando a definição de derivada, mas é mais fácil usar a Regra do Quociente com as Fórmulas 4 e 5:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\text{sen } x) - \text{sen } x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen } x(-\text{sen } x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

6 $$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2 x$$

As derivadas das funções trigonométricas que restaram, cossec, sec e cotg, também podem ser encontradas facilmente usando a Regra do Quociente .

Derivadas de Funções Trigonométricas

Reunimos todas as fórmulas de derivação para funções trigonométricas na tabela a seguir. Lembre-se de que elas são válidas apenas quando *x* estiver medido em raios.

Derivadas de Funções Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossec } x) = -\text{cossec } x \text{ cotg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \text{ tg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotg } x) = -\text{cossec}^2 x$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas muitas vezes são usadas em modelos de fenômenos do mundo real. Em particular, as vibrações, ondas, movimentos elásticos e outras grandezas que variem de maneira periódica podem ser descritos utilizando-se as funções trigonométricas. A seguir, analisaremos um exemplo de movimento harmônico simples.

Exemplo 3

Um objeto na extremidade de uma mola vertical é esticado 4 cm além de sua posição no repouso e solto no tempo $t = 0$. (Veja a Figura 5 e observe que o sentido positivo é para baixo). Sua posição no tempo t é

$$s = f(t) = 4 \cos t,$$

Encontre a velocidade e a aceleração no tempo t e use-as para analisar o movimento do objeto.

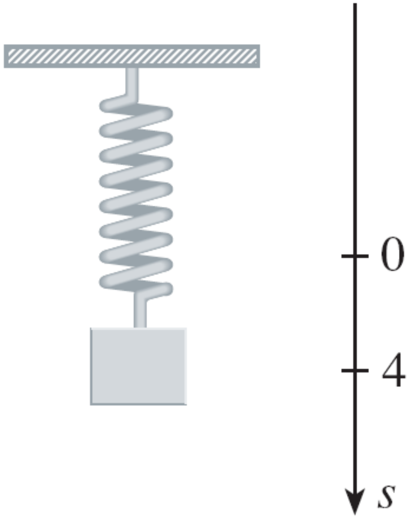

Figura 5

Exemplo 3 – *Solução*

A velocidade e a aceleração são

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

O objeto oscila desde o ponto mais baixo ($s = 4$ cm) até o ponto mais alto ($s = -4$ cm). O período de oscilação é 2π, o período de cos t.

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

A velocidade é $|v| = 4\,|\text{sen}\ t|$, que é a máxima quando $|\text{sen}\ t| = 1$, ou seja, quando $\cos t = 0$. Assim, o objeto move-se mais rapidamente quando passa por sua posição de equilíbrio ($s = 0$). Sua velocidade escalar é 0 quando $\text{sen}\ t = 0$, ou seja, no ponto mais alto e no mais baixo. A aceleração $a = -4 \cos t = 0$ quando $s = 0$. Ela tem seu maior módulo nos pontos mais altos e mais baixos. Veja os gráficos na Figura 6.

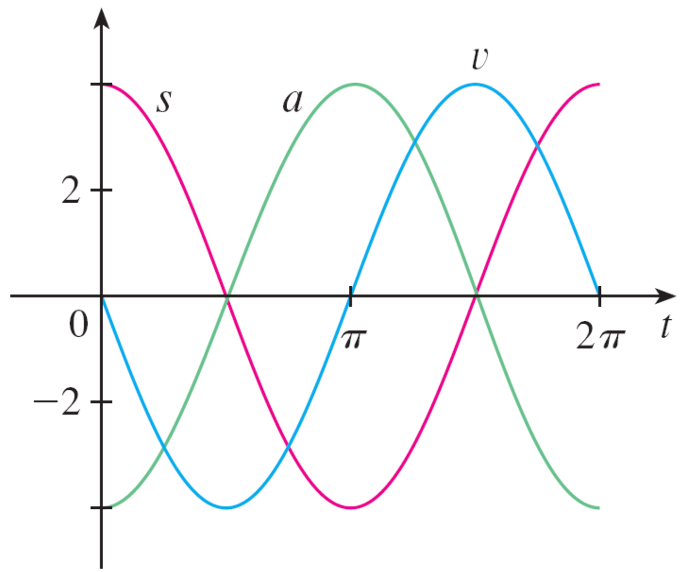

Figura 6