3 Regras de Derivação

3.2

As Regras de Produto e Quociente

A Regra do Produto

A Regra do Produto

Por analogia com as Regras da Soma e da Diferença, alguém poderia tentar conjecturar, como Leibniz o fez três séculos atrás, que a derivada de um produto é o produto da derivada. Contudo, podemos ver que esta conjectura está errada examinando um exemplo particular.Seja

$f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Então a Regra da Potência fornece $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 2x$. Mas $(fg)(x) = x^3$, logo $(fg)'(x) = 3x^2$.

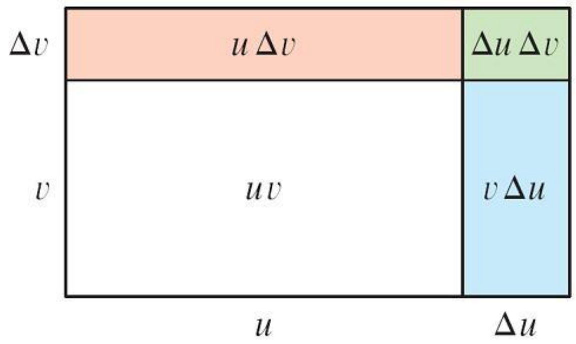
Assim. $(fg)' \neq f'g'$.

A Regra do Produto

A fórmula correta foi descoberta por Leibniz (logo depois de tentar a fórmula falsa) e é chamada Regra do Produto.

Antes de enunciar a Regra do Produto, vamos ver como poderíamos descobri-la. Começamos assumindo que

$u = f(x)$ e $v = g(x)$ são ambas funções positivas deriváveis. Então podemos interpretar o produto uv como uma área de uma retângulo (veja a Figura 1).



Geometria da Regra do Produto

Figura 1

A Regra do Produto

Se x variar uma quantidade Δx, as variações correspondentes então em u e v são

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x), \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

e o novo valor do produto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, pode ser interpretado como a área do retângulo maior da Figura 1 desde Δu e Δv sejam positivos).

A variação na área do retângulo é

$$\boxed{1} \quad \Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

= a soma das três sombreadas.

A Regra do Produto

Se dividirmos por Δx, obtemos

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Se fizermos $\Delta x \to 0$, obteremos a derivada de uv:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \\
&= u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \\
&= u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

A Regra do Produto

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, uma vez que f é derivável e, portanto, contínua).

Embora tenhamos inicialmente suposto (para a interpretação geométrica) que todas as quantidades são positivas, vemos que a Equação 1 é sempre verdadeira. (A álgebra é válida se u, v, Δu e Δv forem positivos ou negativos).

A Regra do Produto

Logo, demonstramos a Equação 2, conhecida como a Regra do Produto, para todas as funções diferenciáveis *u* e *v*.

A Regra do Produto Se f e g são ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)].$$

Em outras palavras, a Regra do Produto diz que *a derivada de um produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada da primeira função.*

Exemplo 1

(a) Se $f(x) = xe^x$, encontre $f'(x)$.

(b) Encontre n-enésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

Solução

(a) Pela Regra do Produto, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x)$$

$$= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= xe^x + e^x \cdot 1 = (x + 1)e^x$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

(b) Usando a Regra do Produto uma segunda vez, obtemos

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(x+1)e^x]$$

$$= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x$$

Exemplo 1 – *Solução*

Aplicações subsequentes da Regra do Produto nos dão

$$f'''(x) = (x + 3)e^{x}, \qquad f^{(4)}(x) = (x + 4)e^{x}$$

Na realidade, cada derivação sucessiva adiciona outro termo e^{x}, logo

$$f^{(n)}(x) = (x + n)e^{x}.$$

A Regra do Quociente

A Regra do Quociente

Vamos determinar uma fórmula para derivar o quociente de duas funções diferenciáveis $u = f(x)$ e $v = g(x)$ do mesmo modo que obtivemos a Regra do Produto. Se x, u, e v variam em quantidades Δx, Δu e Δv, então a correspondente variação no quociente u/v será

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

$$= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

A Regra do Quociente

logo,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Como $\Delta x \to 0$, $\Delta v \to 0$ também, pois $v = g(x)$ é derivável e, portanto, contínua. Logo, usando Propriedades dos Limites, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\,\dfrac{du}{dx} - u\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

A Regra do Quociente

A Regra do Quociente Se f e g são deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

Em outras palavras, a Regra do Quociente diz que *a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador.*

Exemplo 4

Seja $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Então

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

A Regra do Quociente

Tabela de Fórmulas de Derivação

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$	