2

Limites e Derivadas

2.8 A Derivada como uma Função

A Derivada como uma Função

Na seção precedente consideramos a derivada de uma função *f* em um número fixo *a*:

1

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Aqui mudamos nosso ponto de vista e deixamos o número *a* variar. Se substituirmos *a* na Equação 1 por uma variável *x*, obtemos

2

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.}$$

A Derivada como uma Função

Dado qualquer número x para o qual esse limite exista, atribuímos a x o número $f'(x)$. Assim, podemos considerar f' como a nova função, chamada **derivada de *f*** e definida pela Equação 2. Sabemos que o valor de f' em x, $f'(x)$, podem ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

A função f' é denominada derivada de f, pois foi "derivada“ a partir de f pela operação-limite na Equação 2.
O domínio de f' é o conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ e pode ser menor que o domínio de f.

Exemplo 1

O gráfico de uma função *f* é ilustrado na Figura 1. Use-o para esboçar o gráfico da derivada *f*′.

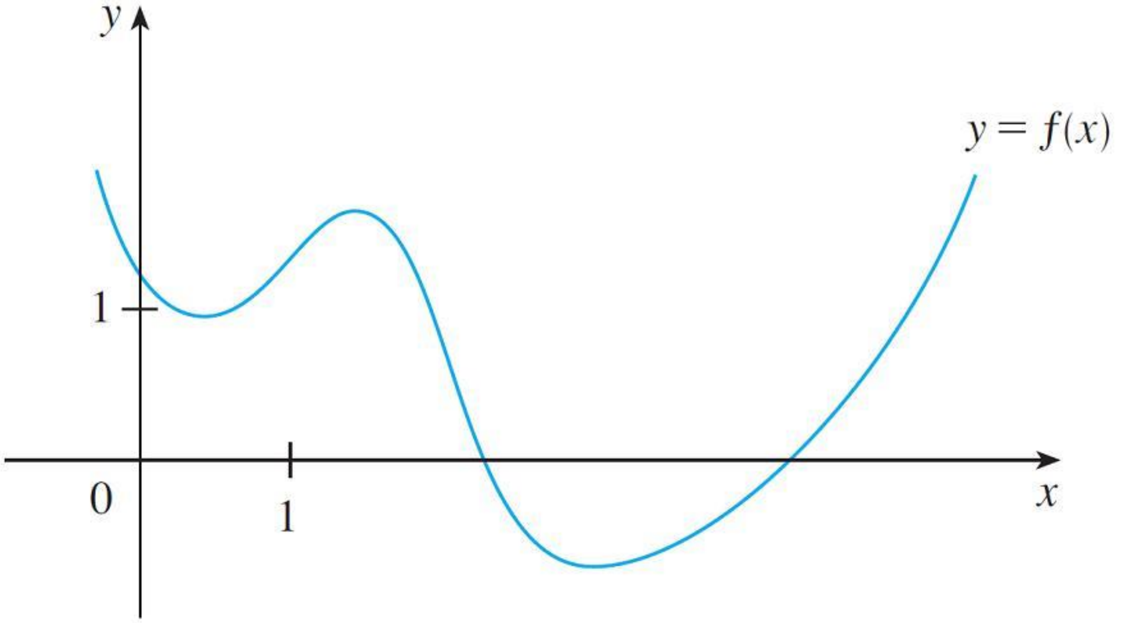


Figura 1

Exemplo 1 – *Solução*

Podemos estimar o valor da derivada para qualquer valor de *x* traçando a tangente no ponto (*x*, *f*(*x*)) e estiman$\frac{3}{2}$o sua inclinação. Por exemplo, para *x* = 5 traçamos a tangente em *P* na Figura 2(a) e estimamos sua inclinação como cerca de , então *f*′(5) ≈ 1,5.

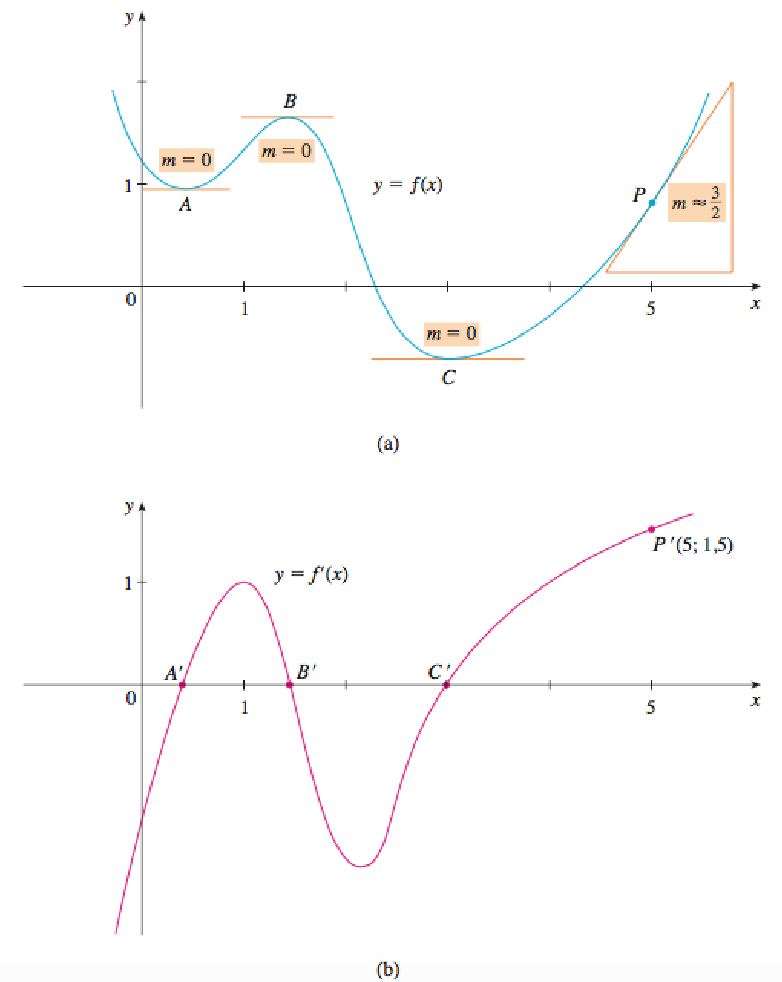


Figura 2

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Isso nos permite desenhar o ponto $P'(5, 1,5)$ sobre o gráfico de f' diretamente abaixo de P. Repetindo esse procedimento em vários pontos, obteremos o gráfico ilustrado na Figura 2(b).

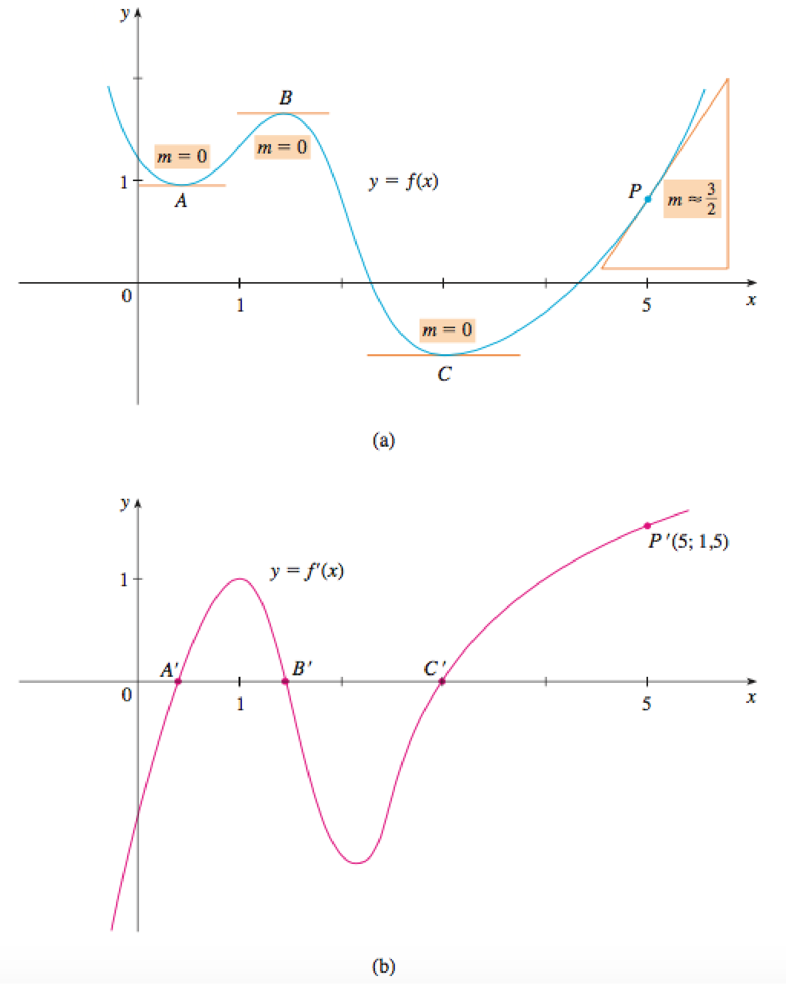


Figura 2

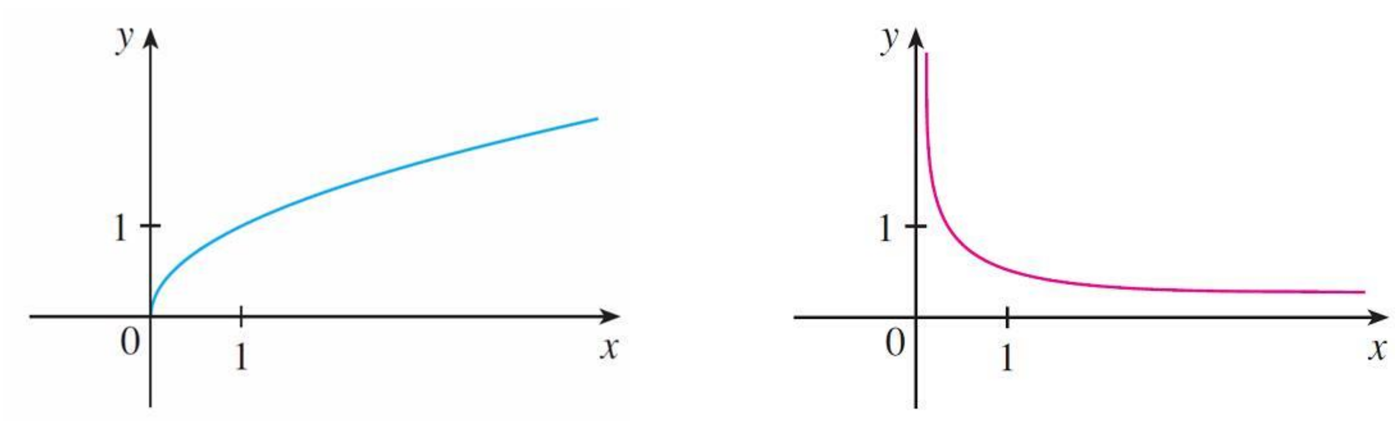
Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Observe que as tangentes em A, B e C são horizontais; logo, ali a derivada é 0 e o gráfico de f' cruza o eixo x nos pontos A', B' e C', diretamente abaixo de A, B e C. Entre A e B, as tangentes têm inclinação positiva; logo $f'(x)$ é positiva ali. Mas entre B e C as tangentes têm inclinação negativa; logo, $f'(x)$ lá é negativa.

A Derivada como uma Função

Quando *x* estiver próximo de 0, $\sqrt{x}$ estará próximo a 0, logo, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ é muito grande, e isso corresponde a retas tangentes íngremes próximas de *j’*(*x*) na Figura 4(a) e os grandes valores de $f'(x)$ logo à direita de 0 na Figura 4(b).



(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Figura 4

A Derivada como uma Função

Quando *x* for grande, $f'(x)$ será muito pequena, o que corresponde ao achatamento das retas tangentes no extremo direito do gráfico de *f* e à assíntota horizontal do gráfico de f'.

Outras Notações

Outras Notações

Se usarmos a notação tradicional $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x e a variável dependente é y, então algumas notações alternativas para a derivada são as seguintes:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Os símbolos D e d/dx são chamados **operadores diferenciais**, pois indicam a operação de **diferenciação**, que é o processo de cálculo de uma derivada.

Outras Notações

O símbolo *dy*/*dx*, introduzido por Leibniz, não deve ser encarado como um quociente (por ora); trata-se simplesmente de um sinônimo para $f'(x)$. Todavia, essa notação é muito útil e proveitosa, especialmente quando usada em conjunto com a notação de incremento.

Podemos reescrever a definição de derivada como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Outras Notações

Para indicar o valor de uma derivada *dy*/*dx* na notação de Leibniz em um número específico *a*, usamos a notação

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que é um sinônimo para $f'(a)$.

$\boxed{3}$ **Definição** Uma função f é derivável ou **diferenciável em a**, se $f'(a)$ existir. É **derivável ou diferenciável em um intervalo aberto** (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

Exemplo 5

Onde a função $f(x) = |x|$ é diferenciável?

Solução: Se $x > 0$, então $|x| = x$ podemos escolher h suficientemente pequeno suficiente para que $x + h > 0$ e portanto $|x + h| = x + h$. Consequentemente, para $x > 0$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

e, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x > 0$.

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Analogamente, para $x < 0$ temos $|x| = -x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h < 0$, e assim $|x + h| = -(x + h)$. Portanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

e, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x < 0$.

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Para x = 0 devemos averiguar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \qquad \text{(se existir)}$$

Vamos calcular os limites à esquerda e à direita:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1.$$

Exemplo 5 – *Solução*

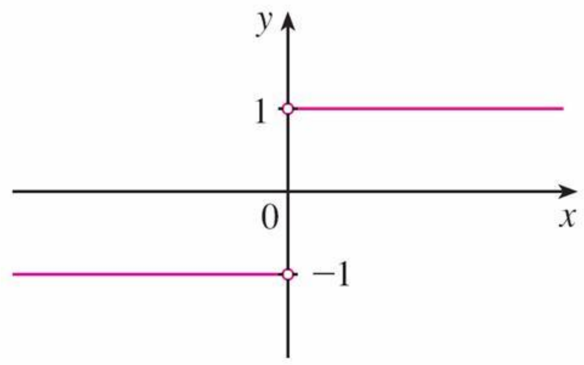
continuação

Uma vez que esses limites são diferentes, $f'(0)$ não existe. Logo, f é diferenciável para todo x, exceto 0.

Uma fórmula para f' é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e seu gráfico está ilustrado na Figura 5(b).



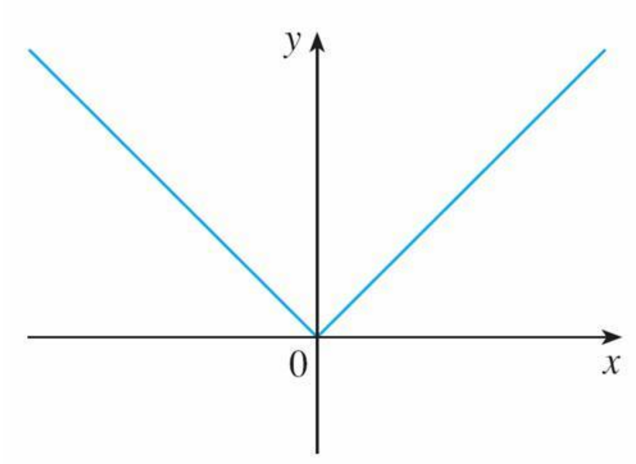
$y = f'(x)$

Figura 5(b)

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

O fato de que $f'(0)$ não existe está refletido geometricamente no fato de que a curva $y = |x|$ não tem reta tangente em (0, 0). [Veja a Figura 5(a).]



$y = f(x) = |x|$

Figura 5(a)

Outras Notações

Tanto a continuidade como a diferenciabilidade são propriedades desejáveis em uma função. O seguinte teorema mostra como essas propriedades estão relacionadas.

$\boxed{4}$ **Teorema** Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

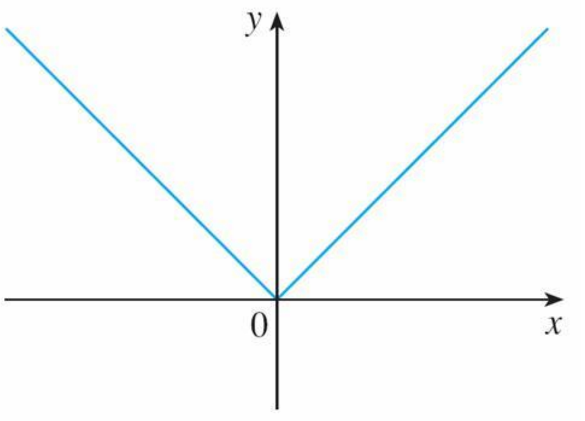
Observação: A recíproca do Teorema 4 é falsa, isto é, há funções que são contínuas, mas não são diferenciáveis.

Como uma Função Pode Não Ser Diferenciável?

Como uma Função Pode Não Ser Diferenciável?

Vimos que a função $y = |x|$ do Exemplo 5 não é diferenciável em 0, e a Figura 5(a) mostra que em $x = 0$ a curva muda abruptamente de direção.

Em geral, se o gráfico de uma função f tiver uma "quina" ou uma "dobra", então o gráfico de f não terá tangente nesse ponto e f não será diferenciável ali. (Ao tentar calcular $f'(a)$, vamos descobrir que os limites à esquerda e à direita são diferentes).



$y = f(x) = |x|$

Figura 5(a)

Como uma Função Pode Não Ser Diferenciável?

O Teorema 4 nos dá outra forma de uma função deixar de ter uma derivada. Ele afirma que se não for contínua em *a*, então *f* não é diferenciável em *a*. Então, em qualquer descontinuidade (por exemplo, uma descontinuidade de salto) *f* deixa de ser diferenciável.

Uma terceira possibilidade surge quando a curva tem uma **reta tangente vertical** quando $x = a$; isto é, *f* é contínua em *a* e

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

Como uma Função Pode Não Ser Diferenciável?

Isso significa que a reta tangente fica cada vez mais íngreme quando $x \to a$. A Figura 6 mostra uma forma de isso acontecer, e a Figura 7(c), outra.

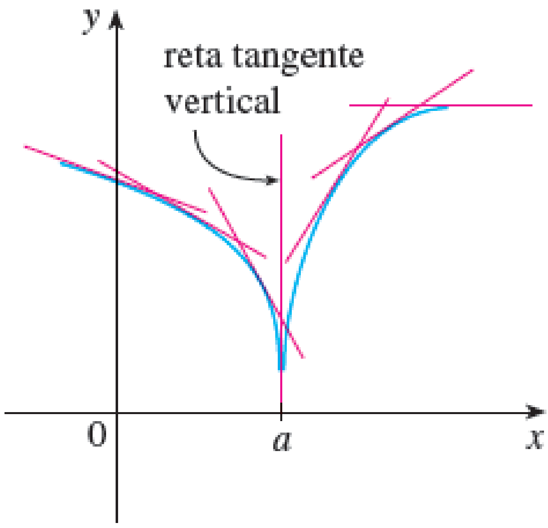
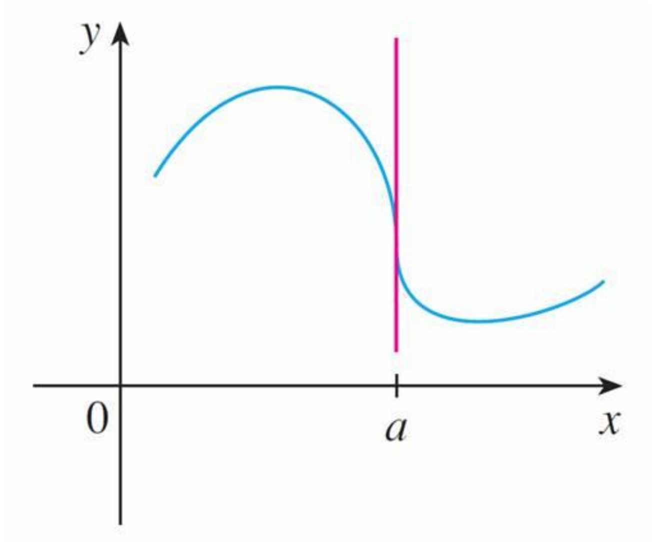


Figura 6

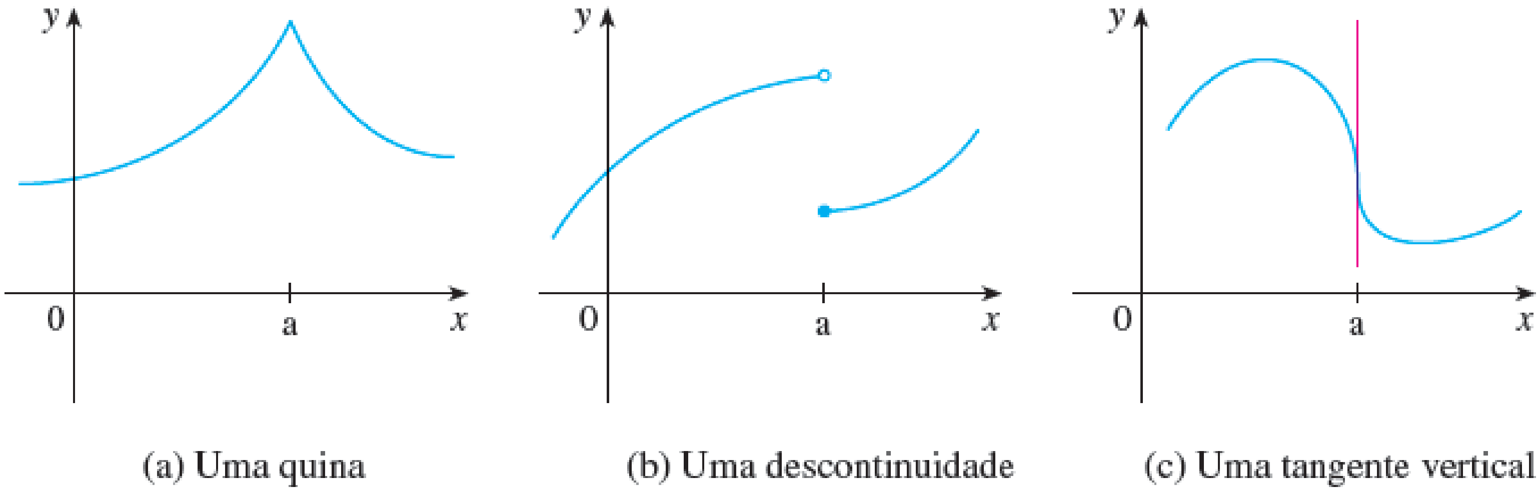


Uma tangente vertical

Figura 7(c)

Como uma Função Pode Não Ser Diferenciável?

A Figura 7 ilustra as três possibilidades discutidas.



Três maneiras de *f* não ser diferenciável em *a*

Figura 7

Derivadas de Ordem Superior

Derivadas de Ordem Superior

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Esta nova função f'' é chamada de **segunda derivada** de f pois é a derivada de ordem dois de f.

Usando a notação de Leibniz, escrevemos a segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{derivada de}} \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{primeira derivada}} = \underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{segunda derivada}}$$

Exemplo 6

Se $f(x) = x^3 - x$, encontre e interprete $f''(x)$.

Solução: A primeira derivada de $f(x) = x^3 - x$ é $f'(x) = 3x^2 - 1$.

Assim, a segunda derivada é

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h} \end{aligned}$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x.$$

Os gráficos de *f*, *f′* e *f″* são mostrados na Figura 10.

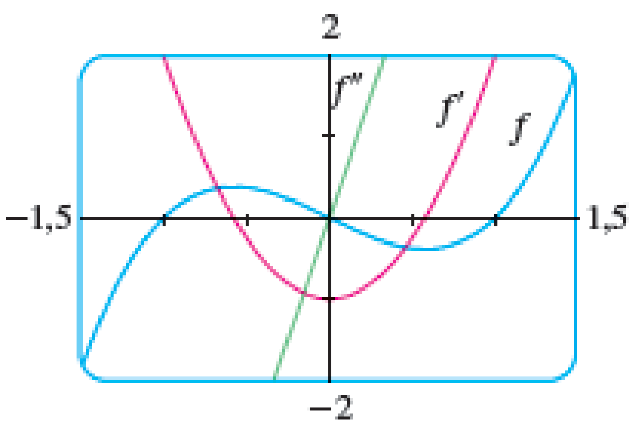


Figura 10

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Podemos interpretar $f''(x)$ como a inclinação da curva $y = f'(x)$ no ponto $(x, f'(x))$. Em outras palavras, é a taxa de variação da inclinação da curva original $y = f(x)$.

Observe pela Figura 10 que $f''(x)$ é negativa quando $y = f'(x)$ tem inclinação negativa e positiva quando $y = f'(x)$ tem inclinação positiva. Assim, os gráficos servem como verificação de nossos cálculos.

Derivadas de Ordem Superior

Em geral, podemos interpretar uma segunda derivada como uma taxa de variação de uma taxa de variação. O exemplo mais familiar disso é a *aceleração*, que é definida desta maneira:

Se $s = s(t)$ for a função posição de um objeto que se move em uma reta, sabemos que sua primeira derivada representa a velocidade $v(t)$ do objeto como uma função do tempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Derivadas de Ordem Superior

A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é chamada **aceleração** $a(t)$ do objeto. Assim, a função aceleração é a derivada da função velocidade e, portanto, é a segunda derivada da função posição:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

ou, na notação de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Derivadas de Ordem Superior

A **terceira derivada** f''' (ou derivada de terceira ordem) é a derivada da segunda derivada: $f''' = (f'')'$. Assim, $f'''(x)$ pode ser interpretada como a inclinação da curva $y = f''(x)$ ou como a taxa de variação $f''(x)$. Se $y = f(x)$, então as notações alternativas são

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Derivadas de Ordem Superior

Podemos interpretar fisicamente a terceira derivada no caso em que a função é a função posição $s = s(t)$ de um objeto que se move ao longo de uma reta. Como $s''' = (s'')'$ $= a'$, a terceira derivada da função posição é a derivada da função aceleração e é chamada **jerk**:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

Derivadas de Ordem Superior

Assim, o *jerk j* é a taxa de variação da aceleração. O nome é adequado (*jerk*, em português, significa solavanco, sacudida), pois um jerk grande significa uma variação súbita na aceleração, o que causa um movimento abrupto em um veículo.

Derivadas de Ordem Superior

O processo pode continuar. A quarta derivada *j''''* (ou derivada de quarta ordem) é usualmente denotada por $f^{(4)}$. Em geral, a *n*-ésima derivada de *f* é denotada por$f^{(n)}$ e é obtida a partir de *f,* derivado *n* vezes. Se $y = f(x)$, escrevemos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$