2

Limites e Derivadas

2.7 Derivadas e Taxas de Variação

Derivadas e Taxas de Variação

O problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema para encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite.

Este tipo especial de limite é chamado *derivada* e veremos que pode ser interpretado como uma taxa de variação tanto nas ciências naturais ou sociais quanto na engenharia.

Tangentes

Tangentes

Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a reta tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$, consideramos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C ao obrigar x tender a a.

Tangentes

Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a *tangente* t como a reta que passa por P e tem inclinação m. (Isso implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P. Veja a Figura 1.)

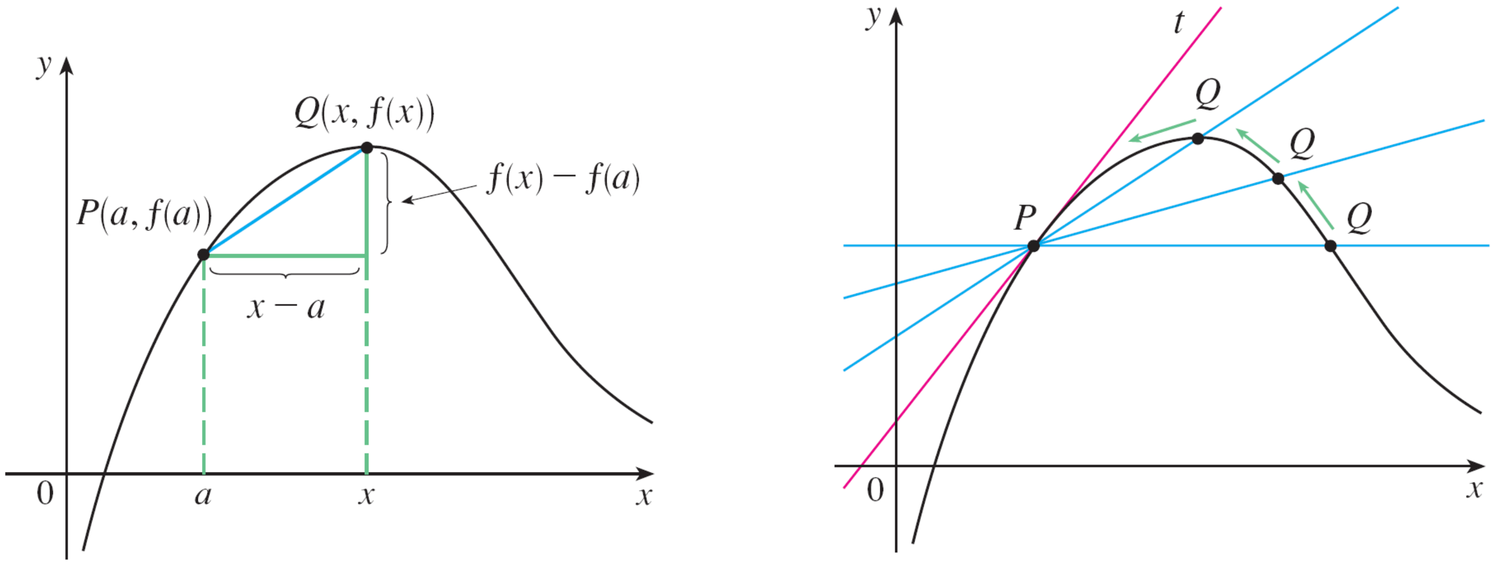


Figura 1

Tangentes

1 **Definição** A **reta tangente** à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Exemplo 1

Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto que $P(1, 1)$.

Solução: Temos aqui $a = 1$ e $f(x) = x^2$, então a inclinação é

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em (1, 1) é

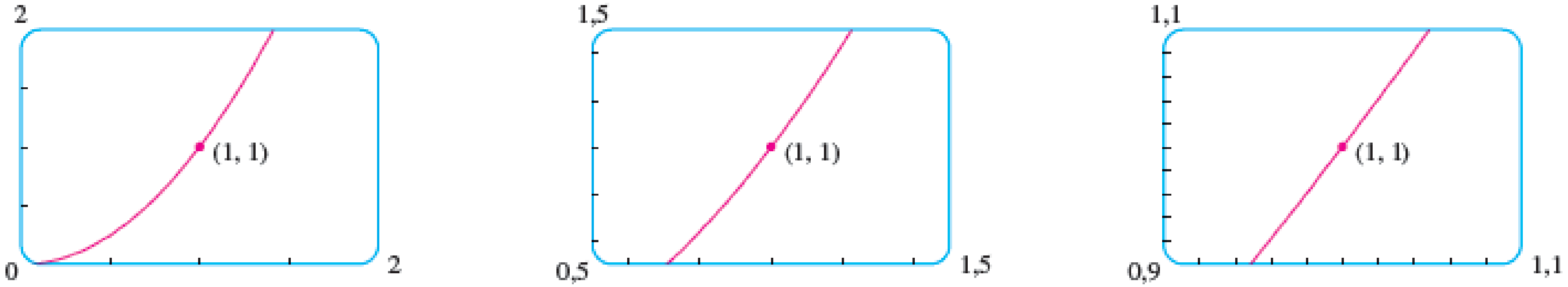
$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1.$$

Tangentes

Algumas vezes nos referimos à inclinação da reta tangente como a **inclinação da curva** no ponto. A ideia por detrás disso é que, se dermos *zoom* (suficiente) em direção ao ponto, a curva parecerá quase uma reta.

Tangentes

A Figura 2 ilustra esse procedimento para a curva $y = x^2$ do Exemplo 1.



Um *zoom* cada vez maior da parábola $y = x^2$ em torno do ponto (1, 1)

Figura 2

Tangentes

Quanto maior for o *zoom*, mais indistinguível da reta tangente será a parábola. Em outras palavras, a curva se torna quase indistinguível de sua reta tangente. Há outra expressão para a inclinação da reta tangente que é, às vezes, mais fácil de ser usada.

Tangentes

Se $h = x - a$, então $x = a + h$ e, assim, a inclinação da reta secante PQ é

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

(Veja a Figura 3 onde o caso $h > 0$ é ilustrado e Q está à direita de P. Se acontecesse que $h < 0$, entretanto, Q estaria à esquerda de P.)

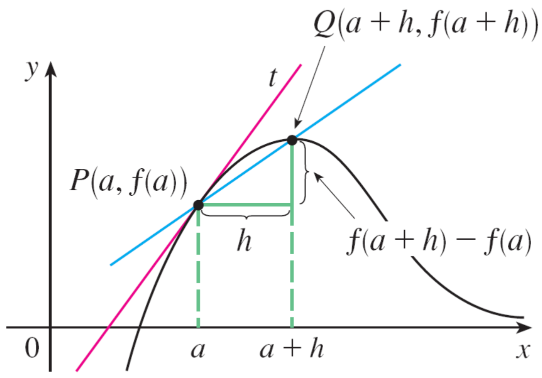


Figura 3

Tangentes

Observe que quando *x* tende a *a*, *h* tende a 0 (pois, $h = x - a$); assim, a expressão para a inclinação da reta tangente na Definição 1 fica

2

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Velocidades

Velocidades

Em geral, suponha que um objeto se mova sobre uma reta de acordo com a equação $s = f(t)$, na qual s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t. A função f que descreve o movimento é chamada **função posição** do objeto. No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição será de $f(a + h) - f(a)$.

Velocidades

Veja a Figura 5.

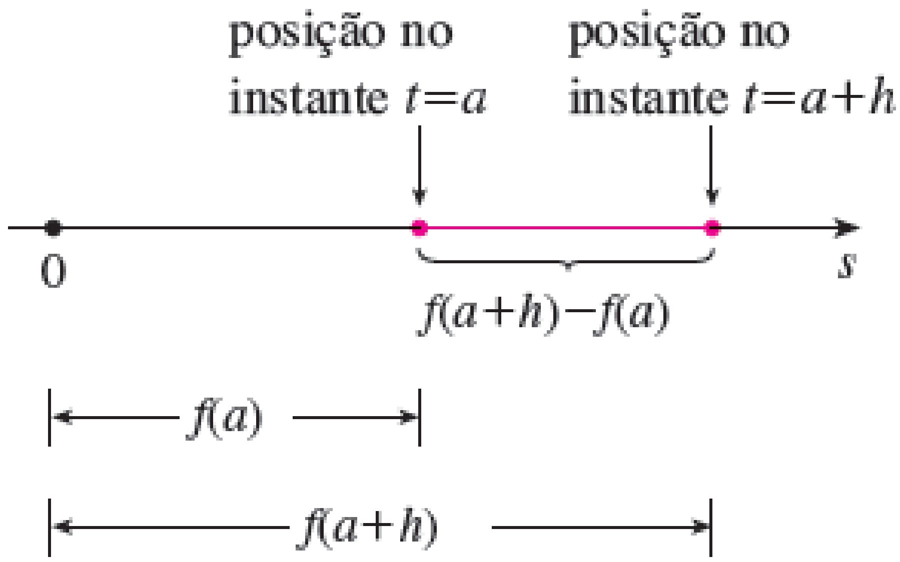


Figura 5

Velocidades

A velocidade média nesse intervalo é

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que é o mesmo que a
inclinação da reta secante *PQ* na Figura 6.

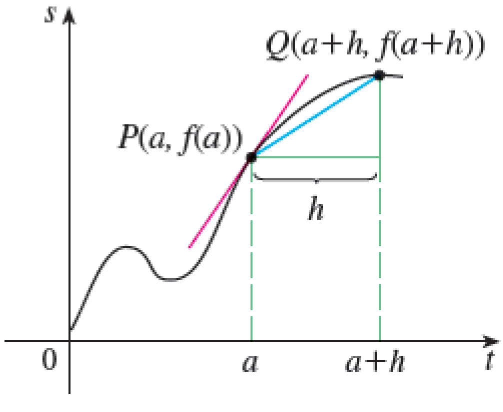


Figura 6

Velocidades

Suponha agora que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores [*a*, *a* + *h*]. Em outras palavras, fazemos *h* tender a 0. Como no exemplo da queda da bola, definimos **velocidade** (ou **velocidade instantânea**) *v*(*a*) no instante *t* = *a* como o limite dessas velocidades médias:

3

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.}$$

Isso significa que a velocidade no instante *t* = *a* é igual à inclinação da reta tangente em *P*.

Exemplo 3

Suponha que uma bola foi deixada cair do ponto de observação da torre, 450 m acima do solo.

(a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?

(b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

Solução: Precisaremos encontrar a velocidade quando $t = 5$ quanto a bola atinge o solo, de modo que é eficiente começar encontrando a velocidade em um instante gera $t = a$.

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Usando a equação de movimento $s = f(t) = 4{,}9t^2$, temos

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a + h)^2 - 4{,}9a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(2ah + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4{,}9(2a + h) = 9{,}8a$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

(a) A velocidade após 5 segundos é de $v(5) = (9{,}8)(5) = 49$ m/s.

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

(b) Uma vez que o posto de observação está 450 m acima do solo, a bola vai atingir o chão em t_1 quando $s(t_1) = 450$, isto é,

$$4{,}9t_1^2 = 450$$

Isso fornece

$$t_1^2 = \frac{450}{4{,}9} \qquad \text{e} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 9{,}6 \text{ s}.$$

Exemplo 3 – *Solução* continuação

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v\left(\sqrt{\frac{450}{4,9}}\right) = 9,8\sqrt{\frac{450}{4,9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

Derivadas

Derivadas

Vimos que o mesmo tipo de limite aparece ao encontrar a inclinação de uma reta tangente (Equação 2) ou a velocidade de um objeto (Equação 3). De fato, os limites do tipo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

surgem sempre que calculamos uma taxa de variação em qualquer ramo das ciências ou engenharia, tais como a taxa de uma reação química ou o custo marginal em economia. Uma vez que esse tipo de limite ocorre amplamente, ele recebe nome e notação especiais.

Derivadas

4 Definição **A derivada de uma função *f* em um número *a***, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e h tende a 0 se, e somente se, x tende a a. Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição da derivada, como vimos na determinação das retas tangentes, é

5

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Exemplo 4

Encontre a derivada da função $f(x) = x^2 – 8x + 9$ em um número a.

Solução: Da Definição 4, temos

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(a + h)^2 - 8(a + h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h}$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} \quad = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) = 2a - 8$$

Derivadas

Definimos a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$ como a reta que passa por P e tem uma inclinação m dada pela Equação 1 ou 2.

Uma vez que, pela Definição 4, isso é o mesmo que a derivada $f'(a)$, podemos dizer o seguinte:

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

Derivadas

Se usarmos a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, poderemos escrever uma equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Taxas de Variação

Taxas de Variação

Suponha que y seja uma quantidade que depende de outra quantidade x. Assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x (também chamada **incremento** de x) será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

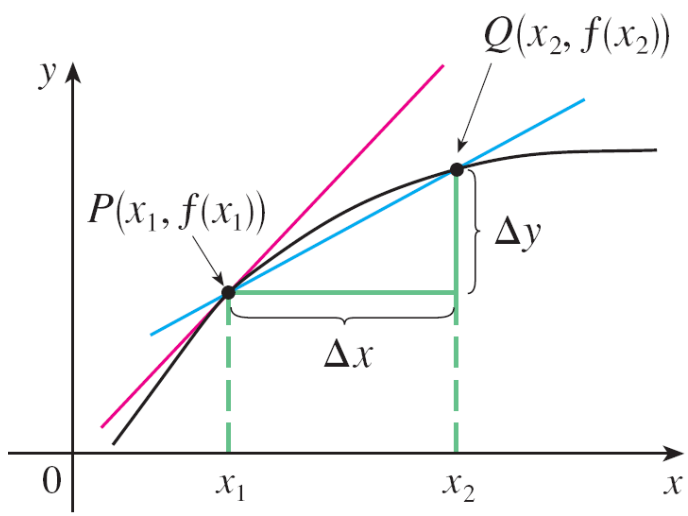
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Taxas de Variação

O quociente da diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado **taxa média de variação de *y* em relação a *x*** no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante *PQ* na Figura 8.



taxa média de variação = m_{PQ}
taxa instantânea de variação = inclinação da tangente em *P*

Figura 8

Taxas de Variação

Por analogia com a velocidade, consideramos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, fazendo Δx tender a 0.

O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa** (**instantânea**) **de variação de *y* em relação a *x*** em

$x = x_1$, que (como no caso da velocidade) é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\boxed{6} \qquad \text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Reconhecemos este limite como a derivada $f'(x_1)$.

Taxas de Variação

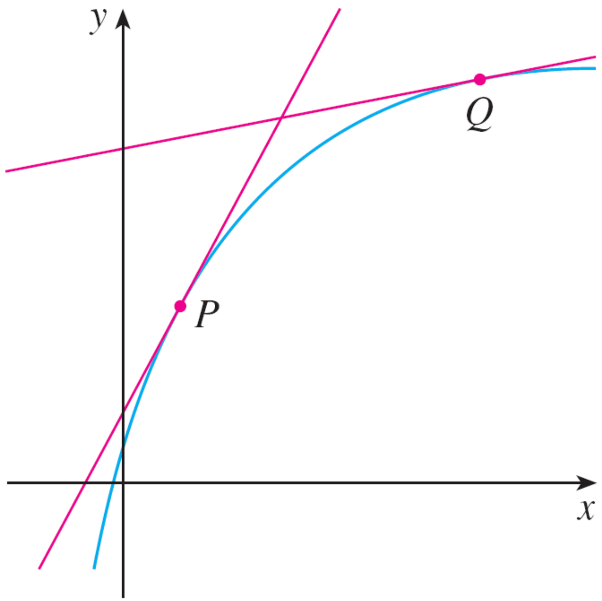
Sabemos que uma das interpretações da derivada $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ quando $x = a$. Agora temos uma segunda interpretação:

> A derivada $f'(a)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

A conexão com a primeira interpretação é que, se esboçarmos a curva $y = f(x)$, então a taxa instantânea da variação será a inclinação da tangente a essa curva no ponto onde $x = a$.

Taxas de Variação

Isso significa que quando a derivada for grande (e, portanto, a curva for íngreme no ponto P na Figura 9), os valores de y mudarão rapidamente.



Os valores de y estão variando rapidamente em P e de modo lento em Q.

Figura 9

Taxas de Variação

Quando a derivada for pequena, a curva será relativamente achatada (como no ponto *Q*) e os valores de *y* mudarão lentamente.

Em particular, se $s = f(t)$ for a função de posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então, $f'(a)$ será a taxa de variação do deslocamento *s* em relação ao tempo *t*. Em outras palavras, $f'(a)$ *é a velocidade da partícula no instante* $t = a$. A **velocidade** escalar da partícula é o valor absoluto da velocidade, isto é, $|f'(a)|$.

Exemplo 6

Um fabricante produz peças de tecido com tamanho fixo. O custo, em dólares, da produção de x metros de certo tecido é $C = f(x)$.

(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais são suas unidades?

(b) Em termos práticos, o que significa dizer que

$f'(1.000) = 9$?

(c) O que você acha que é maior, $f'(50)$ ou $f'(500)$? E quanto a $f'(5.000)$?

Exemplo 6(a) – *Solução*

(a) A derivada $f'(x)$ é a taxa de variação instantânea de C em relação a x; isto é, $f'(x)$ significa a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de metros produzidos.

Como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

as unidades para $f'(x)$ são iguais àquelas do quociente de diferenças $\Delta C/\Delta x$. Uma vez que ΔC é medida em dólares e Δx em metros, segue que a unidade para $f'(x)$ é dólares por metro.

Exemplo 6(b) – *Solução*

continuação

(b) A afirmação que $f'(1.000) = 9$ significa que, depois de 1.000 metros da peça terem sido fabricados, a taxa segundo a qual o custo de produção está aumentando é $ 9/m.
(quando $x = 1.000$, C está aumentando 9 vezes mais rápido que x.)

Uma vez que $\Delta x = 1$ é pequeno comparado com $x = 1.000$, podemos usar a aproximação

$$f'(1.000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C.$$

e dizer que o custo de fabricação do milésimo metro (ou do 1001º) está em torno de $ 9.

Exemplo 6(c) – *Solução*

continuação

(c) A taxa segundo a qual o custo de produção está crescendo (por metro) é provavelmente menor quando x = 500 do que quando x = 50 (o custo de fabricação do 500º metro é menor que o custo do 50º metro), em virtude da economia de escala. (O fabricante usa mais eficientemente os custos fixos de produção.) Então

$$f'(50) > f'(500).$$

Exemplo 6(c) – *Solução*

continuação

Mas, à medida que a produção expande, a operação de larga escala resultante pode se tornar ineficiente, e poderiam ocorrer custos de horas extras. Logo, é possível que a taxa de crescimento dos custos possa crescer no futuro. Assim, pode ocorrer que

$$f'(5.000) > f'(500).$$