Logaritmos

Segunda parte

Antonio Carlos Brolezzi

brolezzi@ime.usp.br

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$a^c = b$$

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$3^2 = 9$$

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$a^c = b$$

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$a^c = b$$

Uma operação inversa da potenciação é a operação chamada radiciação, válida para c natural maior ou igual a 2:

$$a = \sqrt[c]{b}$$

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$3^2 = 9$$

Uma operação inversa da potenciação é a operação chamada radiciação, válida para c natural maior ou igual a 2:

$$3 = \sqrt[2]{9}$$

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$3^2 = 9$$

Uma operação inversa da potenciação é a operação chamada radiciação, válida para c natural maior ou igual a 2:

$$3 = \sqrt{9}$$

Potenciação: $a^c = b$

Radiciação: $a = \sqrt[c]{b}$.

Mas e se formos isolar o expoente c?

Teremos outra operação inversa, chamada de logaritmo, válida para a e b positivos e a≠1.

$$\mathrm{c} = \log_a b$$

(lê-se “log de b na base a”).

Potenciação: $3^2 = 9$

Radiciação: $3 = \sqrt{9}$.

Mas e se formos isolar o expoente c?

Teremos outra operação inversa, chamada de logaritmo, válida para a e b positivos e a≠1.

$$2 = \log_3 9$$

(lê-se “log de b na base a”).

$$a^c = b$$

$$a = \sqrt[c]{b}$$

$$\mathrm{c} = \log_a b$$

$$3^2 = 9$$

$$3 = \sqrt{9}$$

$$2 = \log_3 9$$

$$a^c = b$$

$$a = \sqrt[c]{b}$$

$$\mathrm{c} = \log_a b$$

$$2^3 = 8$$

$$2 = \sqrt[3]{8}$$

$$3 = \log_2 8$$

$$a^c = b$$

$$a = \sqrt[c]{b}$$

$$\mathrm{c} = \log_a b$$

$$10^3 = 1000$$

$$10 = \sqrt[3]{1000}$$

$$3 = \log_{10} 1000$$

$$10^3 = 1000$$

$$10 = \sqrt[3]{1000}$$

$$3 = \log 1000$$

(logaritmo decimal ou comum)

O logaritmo é uma operação inversa da potenciação (ou exponenciação), mas não como a radiciação, que permite expressar a base da potência.

Logaritmos invertem a potenciação, expressando o expoente da potência.

Veja como o logaritmo se relaciona com a potenciação e a radiciação (atendidas as restrições para a, b e c em cada caso):

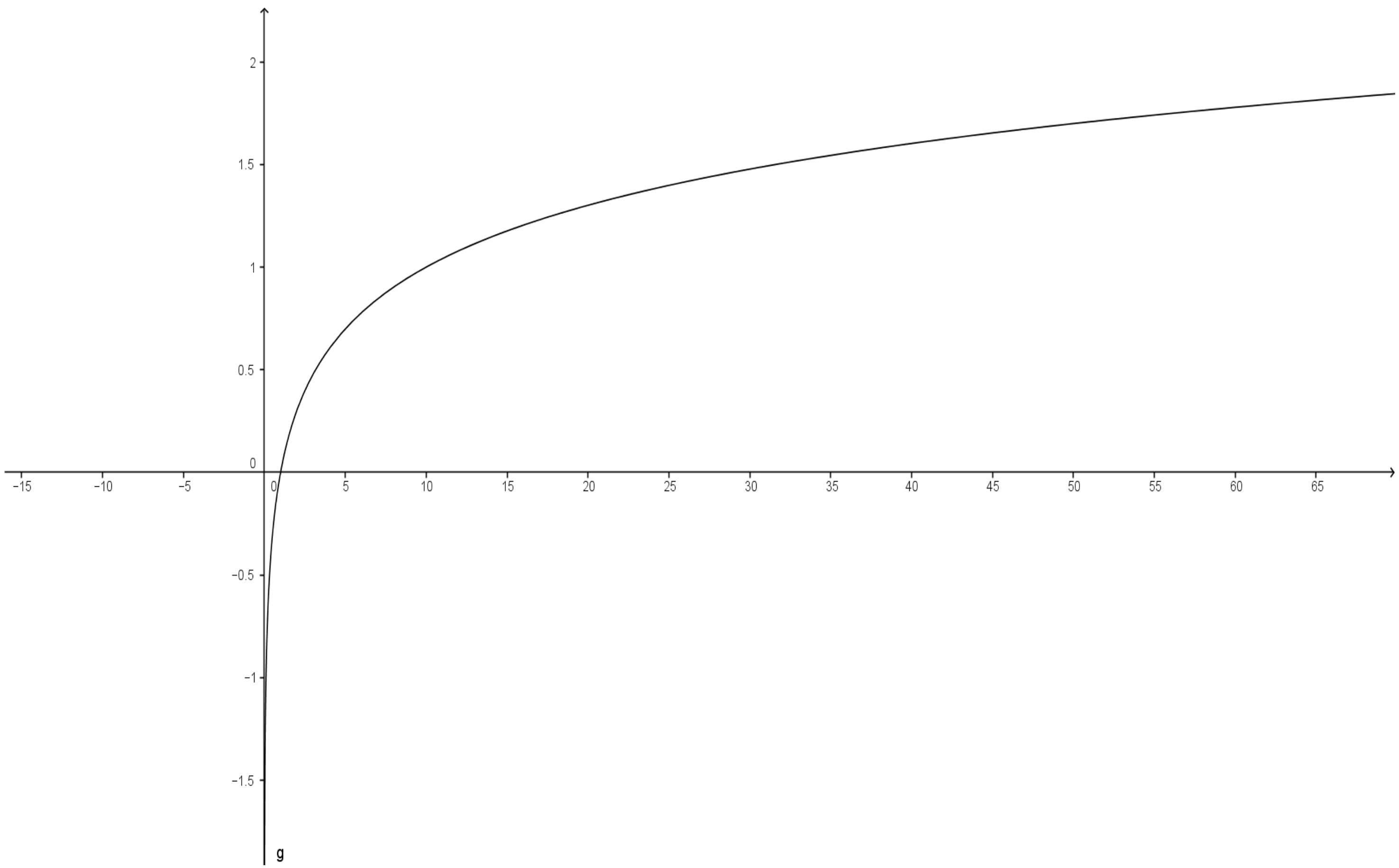
$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \Leftrightarrow a = \sqrt[c]{b}.$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

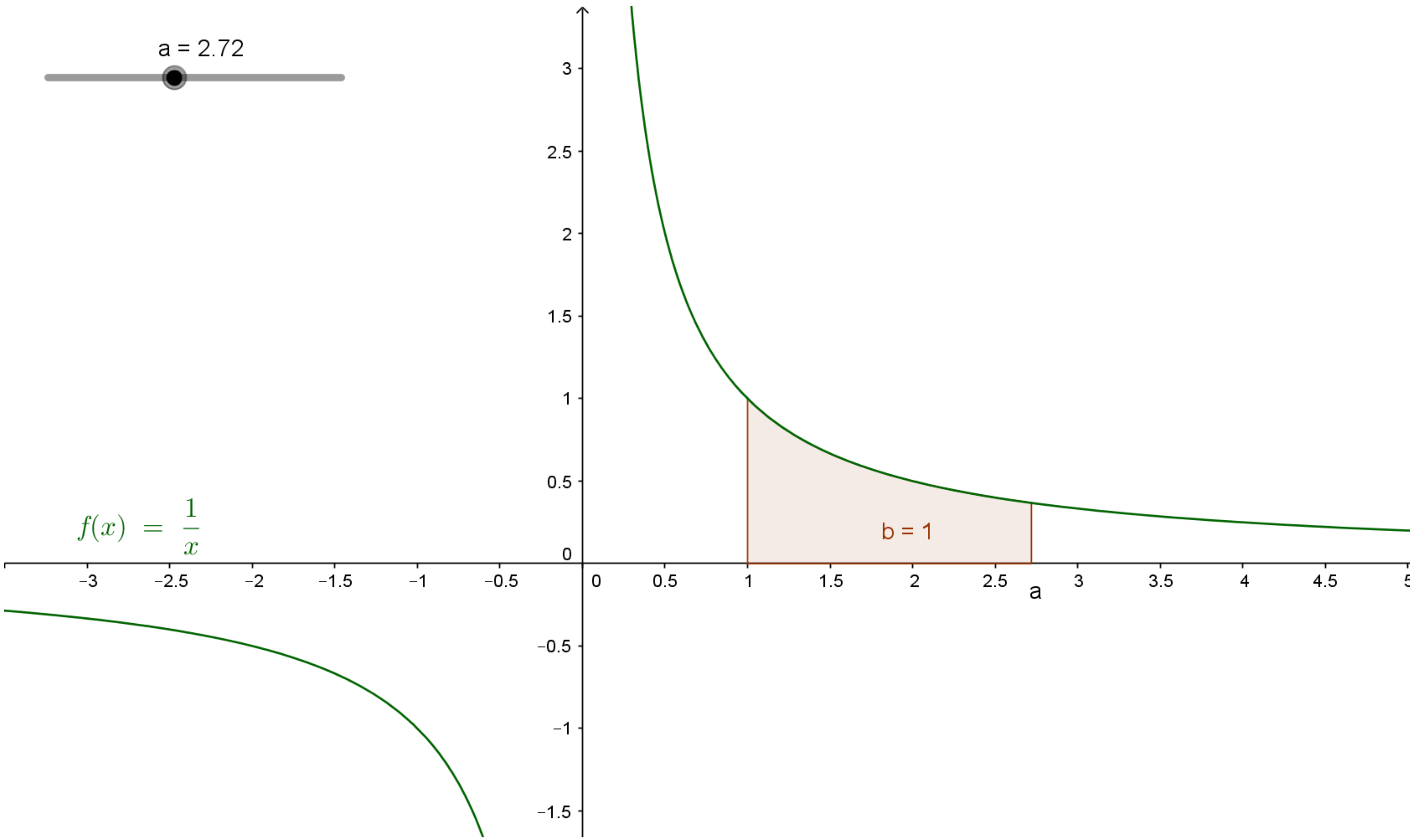
Com números, temos

$$\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 9$$

Como foi criada a função logaritmica?



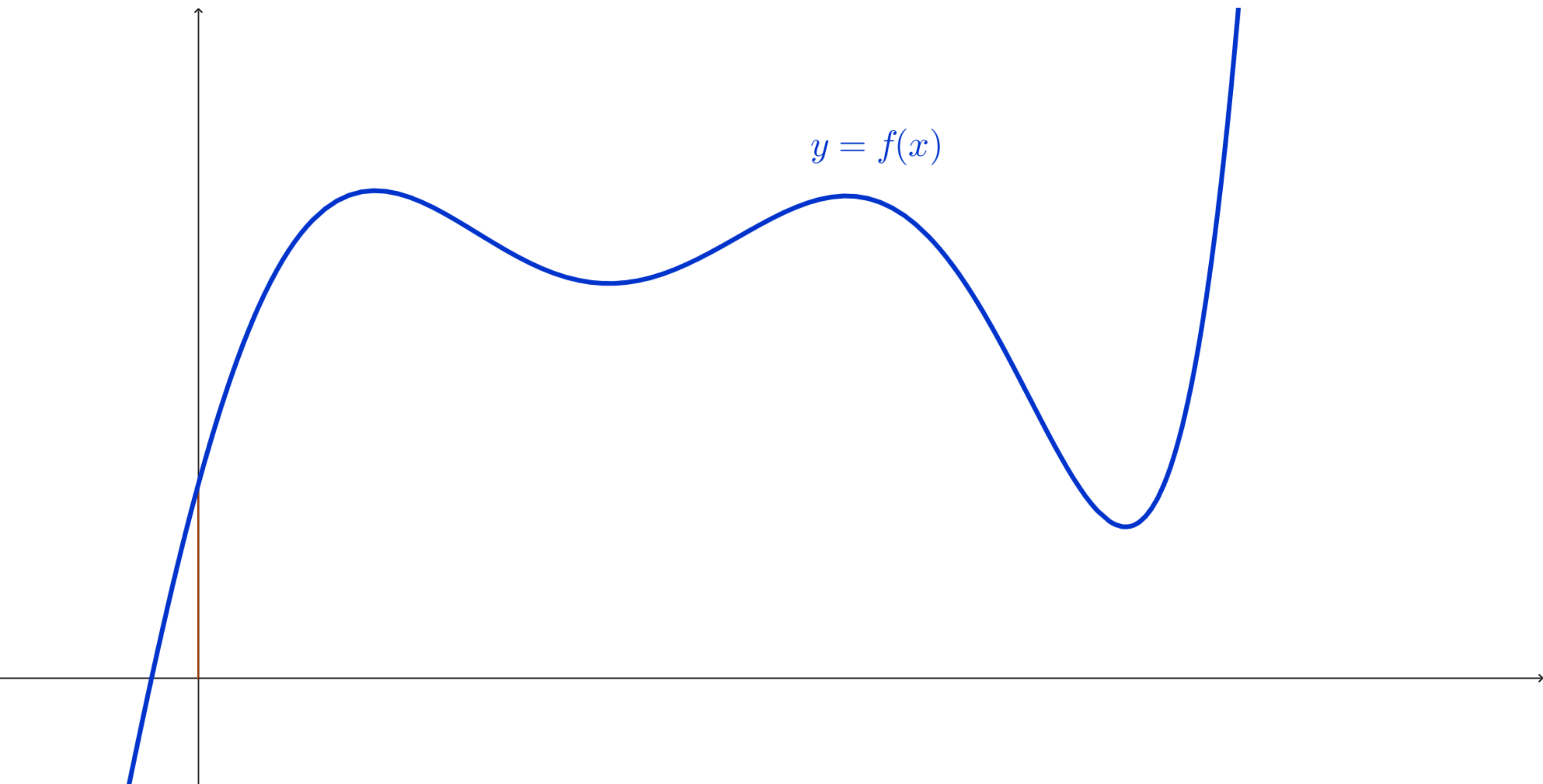
A função logaritmica foi definida como a medida da área sob o gráfico de uma função chamada hipérbole.



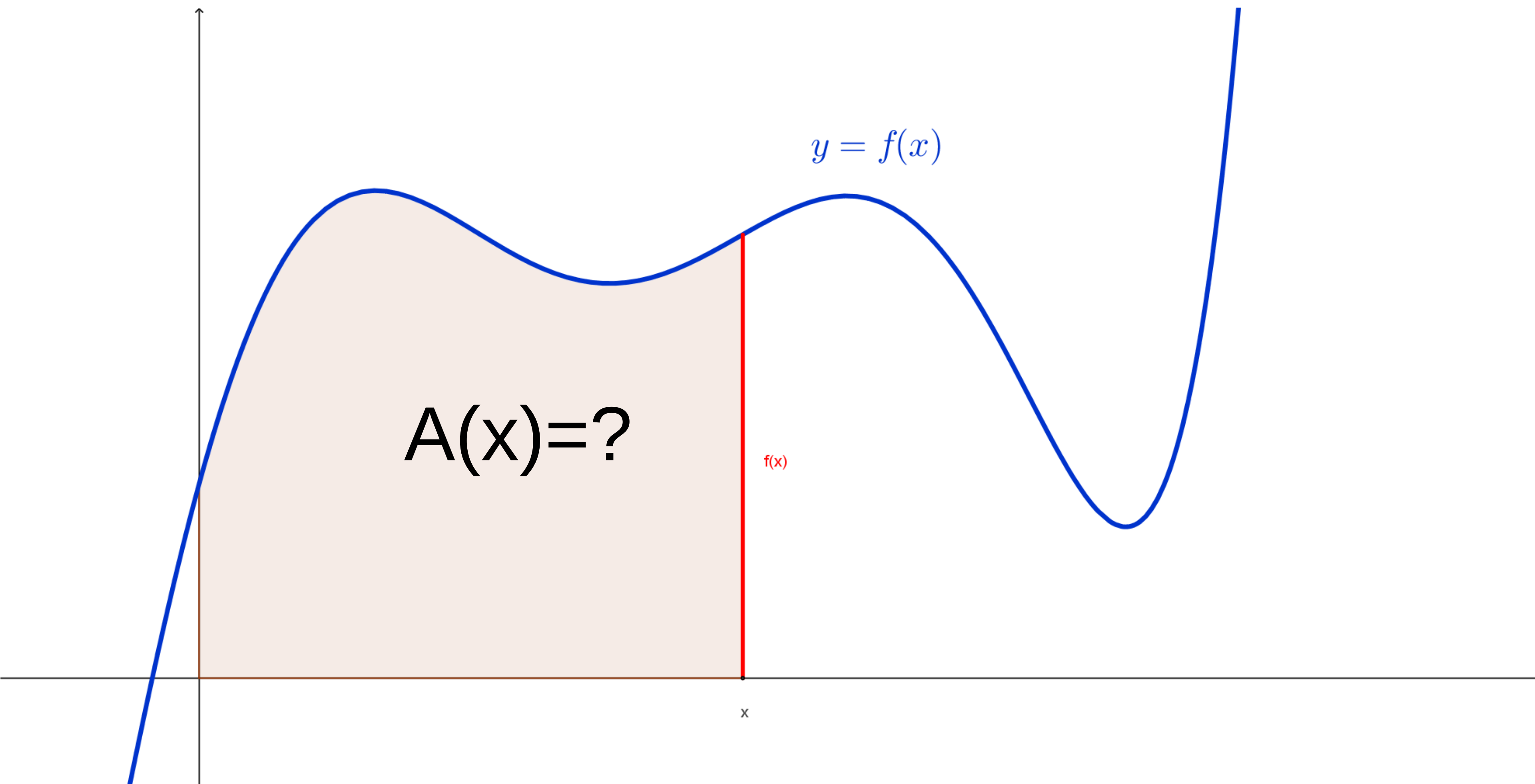
Área sob o gráfico de uma função?

Mas isso não é uma integral?

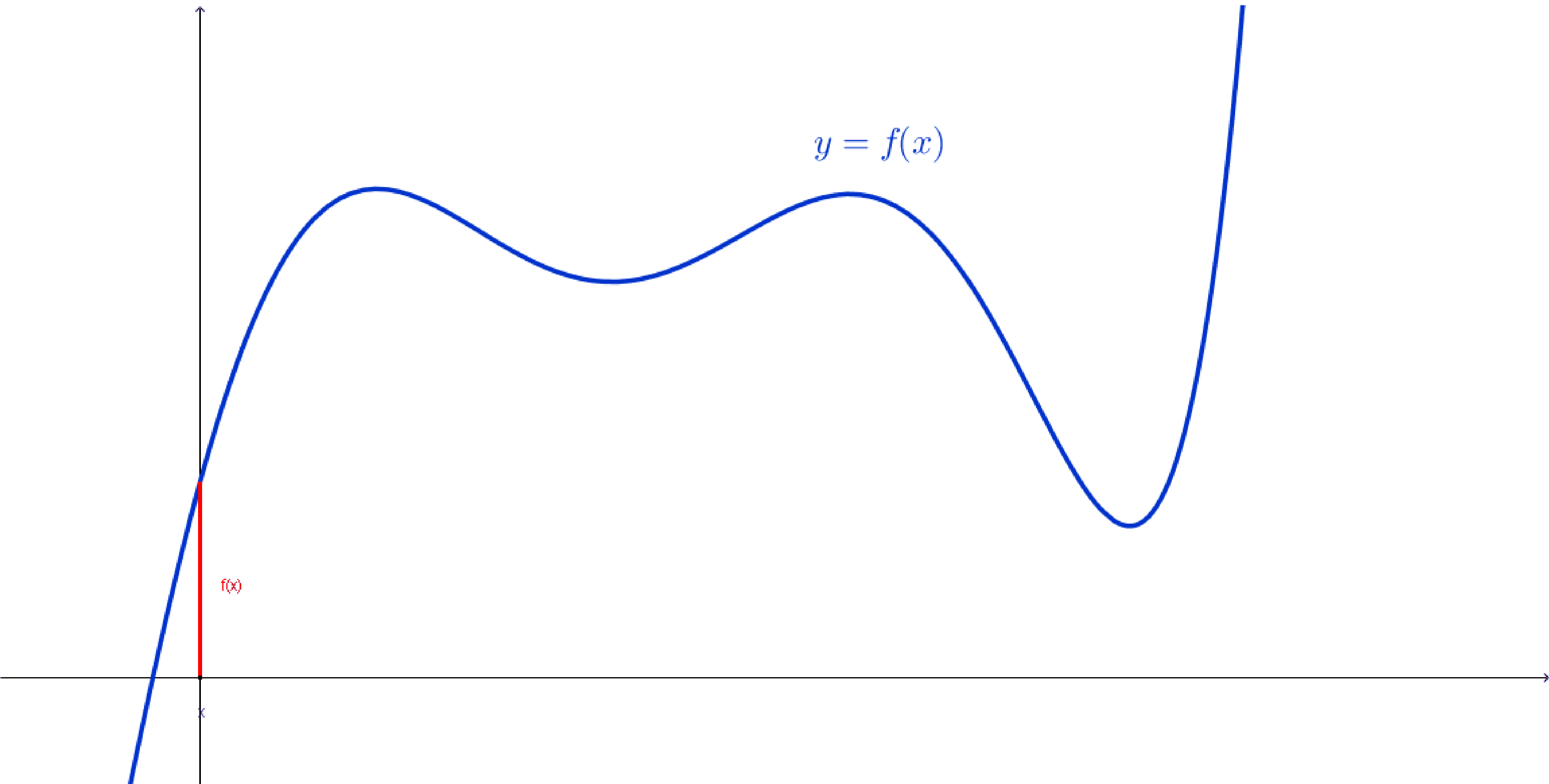
Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?



Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?



A variação instantânea da área A(x) é A’(x)=f(x).



Por volta de 1640, Pierre de Fermat (1601-1665) estabeleceu que a área sob a curva $y = x^n$,

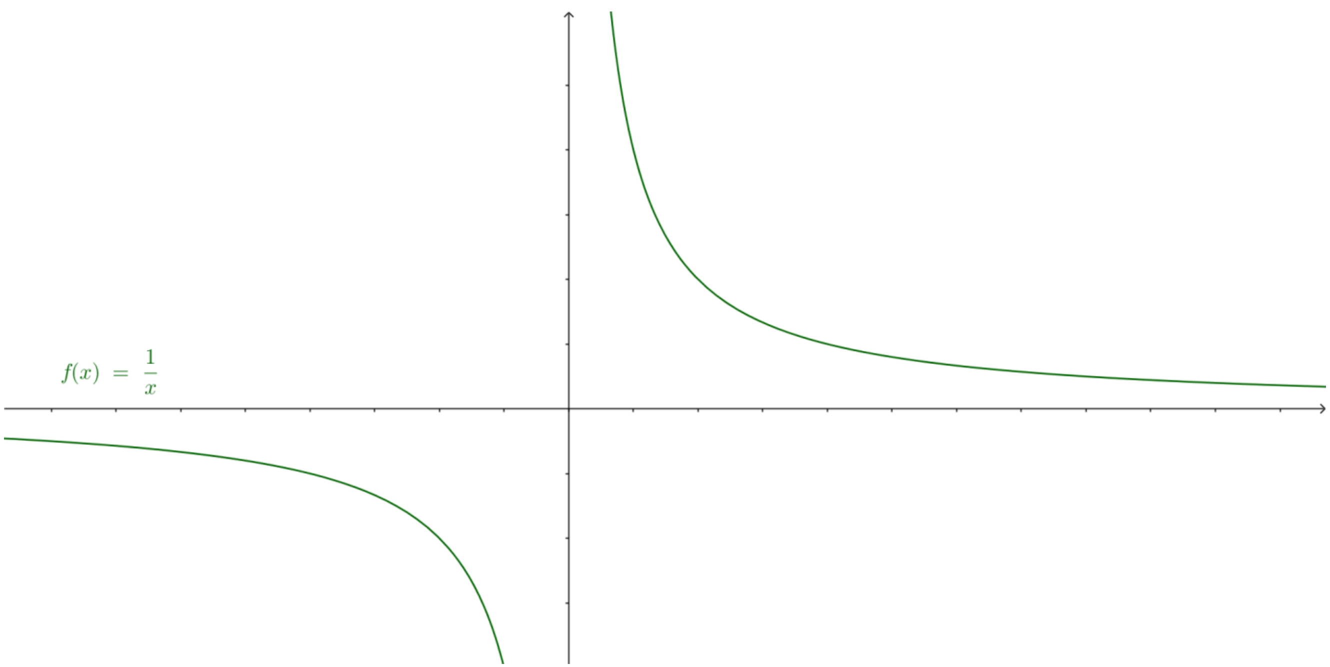
entre x = 0 e x = a, é dada por

$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

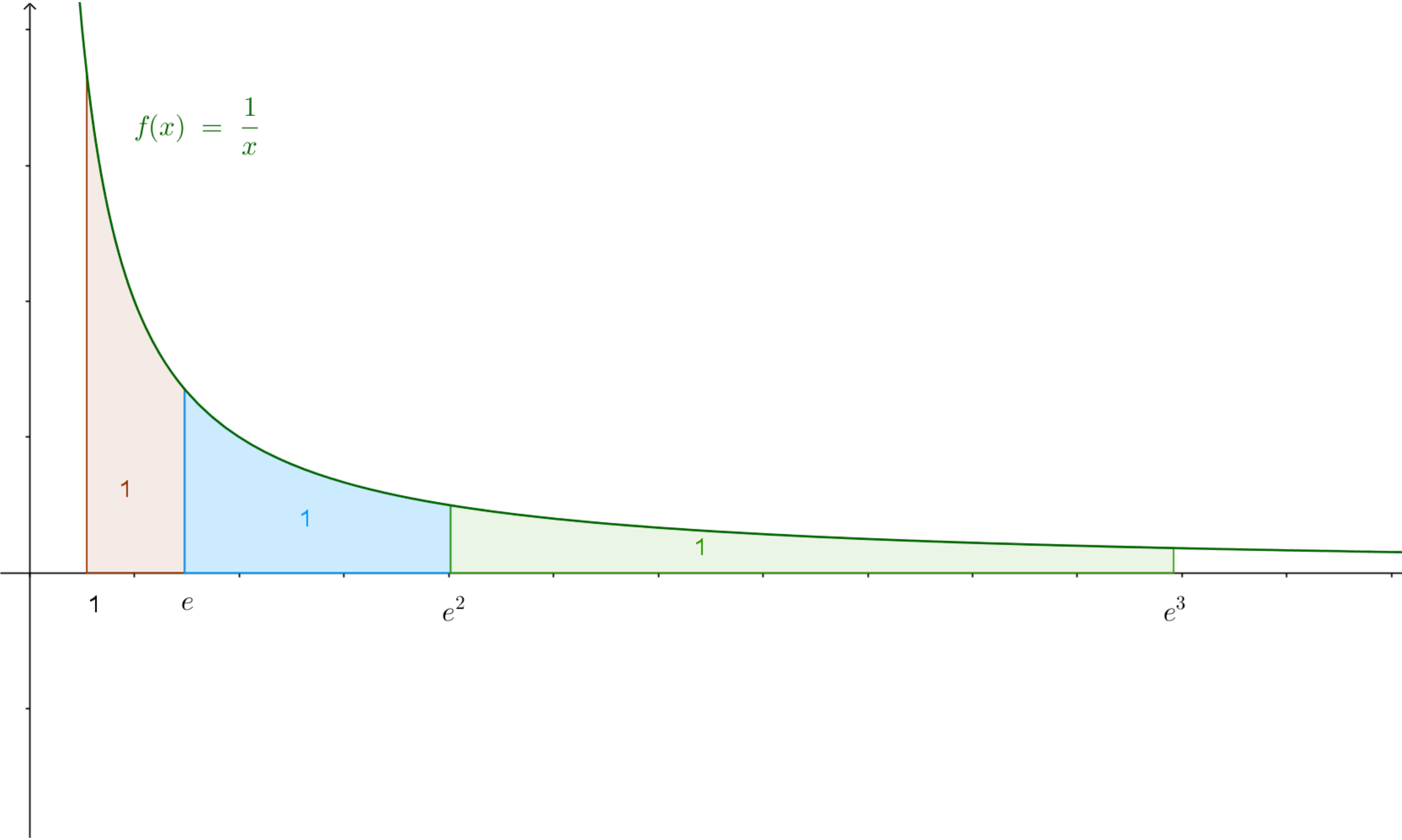
Ou seja, se $y = x^2$, então a função $\mathrm{y} = \frac{x^3}{3}$ fornece a área sob a curva entre 0 e x.

Mas, e se n = - 1?

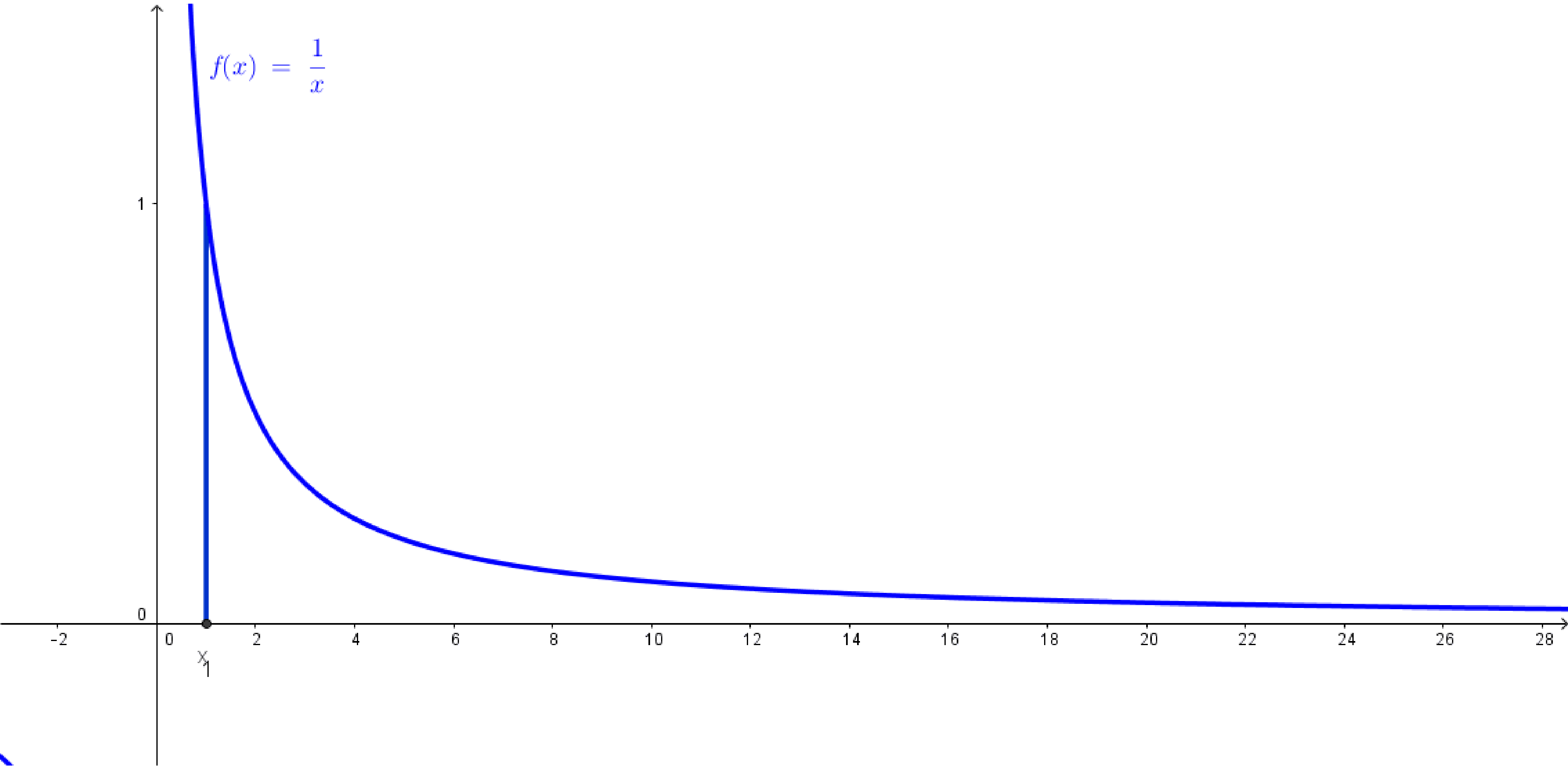
A curva $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, tem como gráfico uma hipérbole. Se fizermos $A = \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{a^0}{0}$ temos uma indeterminação.



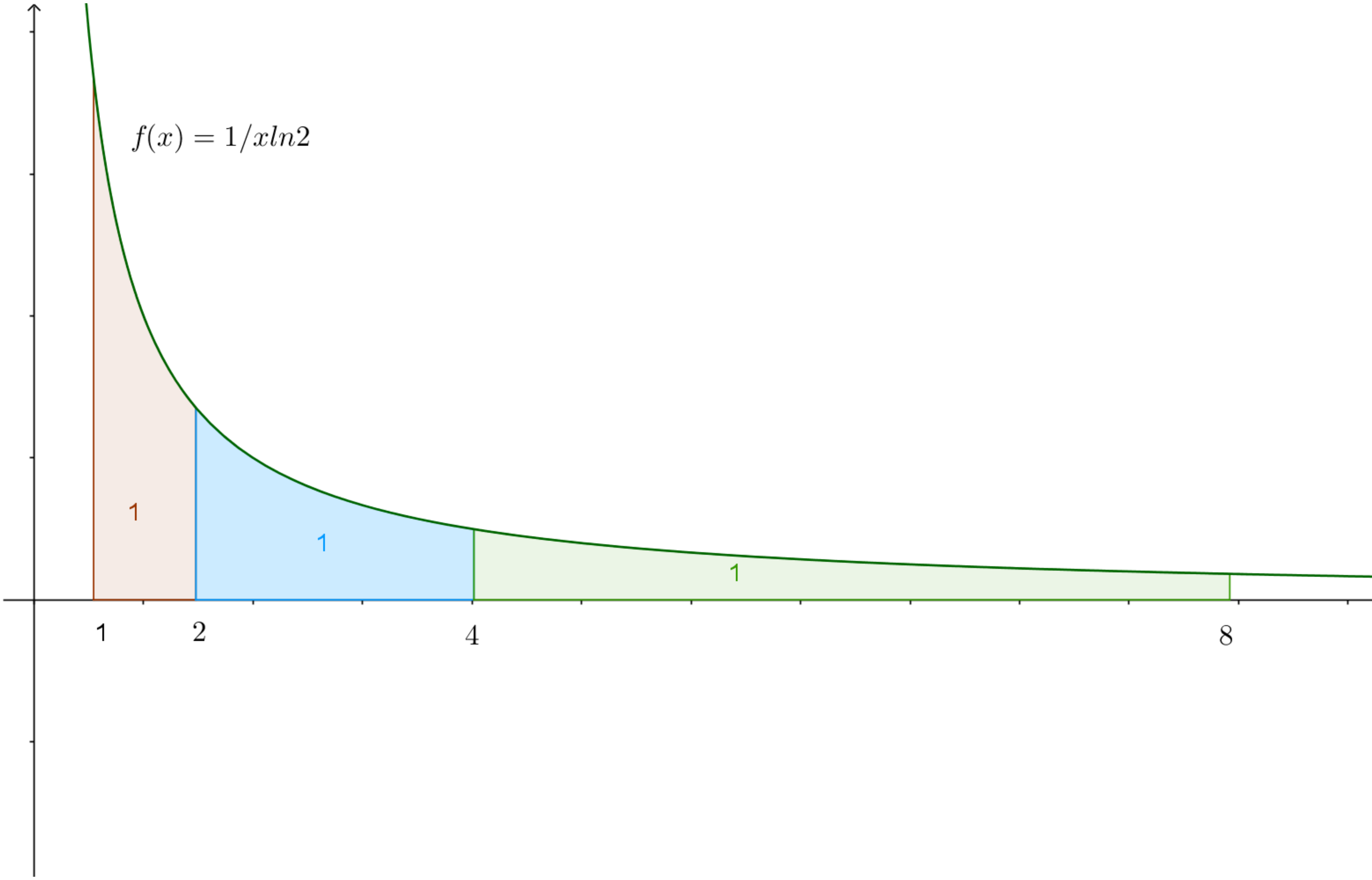
Em 1647, o jesuíta belga Gregorius de Saint Vicent (1584-1667), notou que áreas correspondentes a abscissas que formam uma PG, formam uma PA.



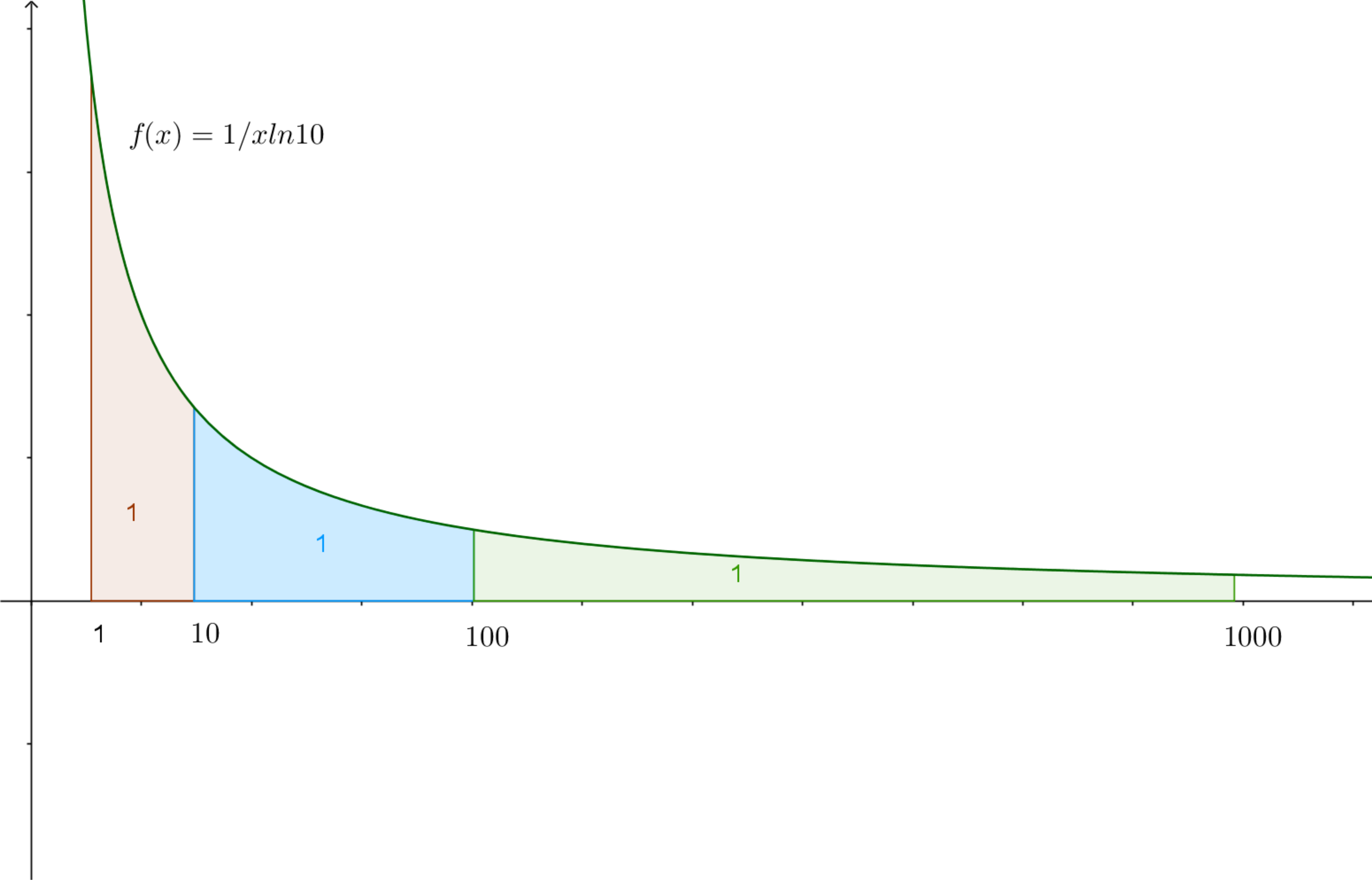
(gráfico fora de escala)



$f(x) = \frac{1}{x}$
1
0
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
x_1



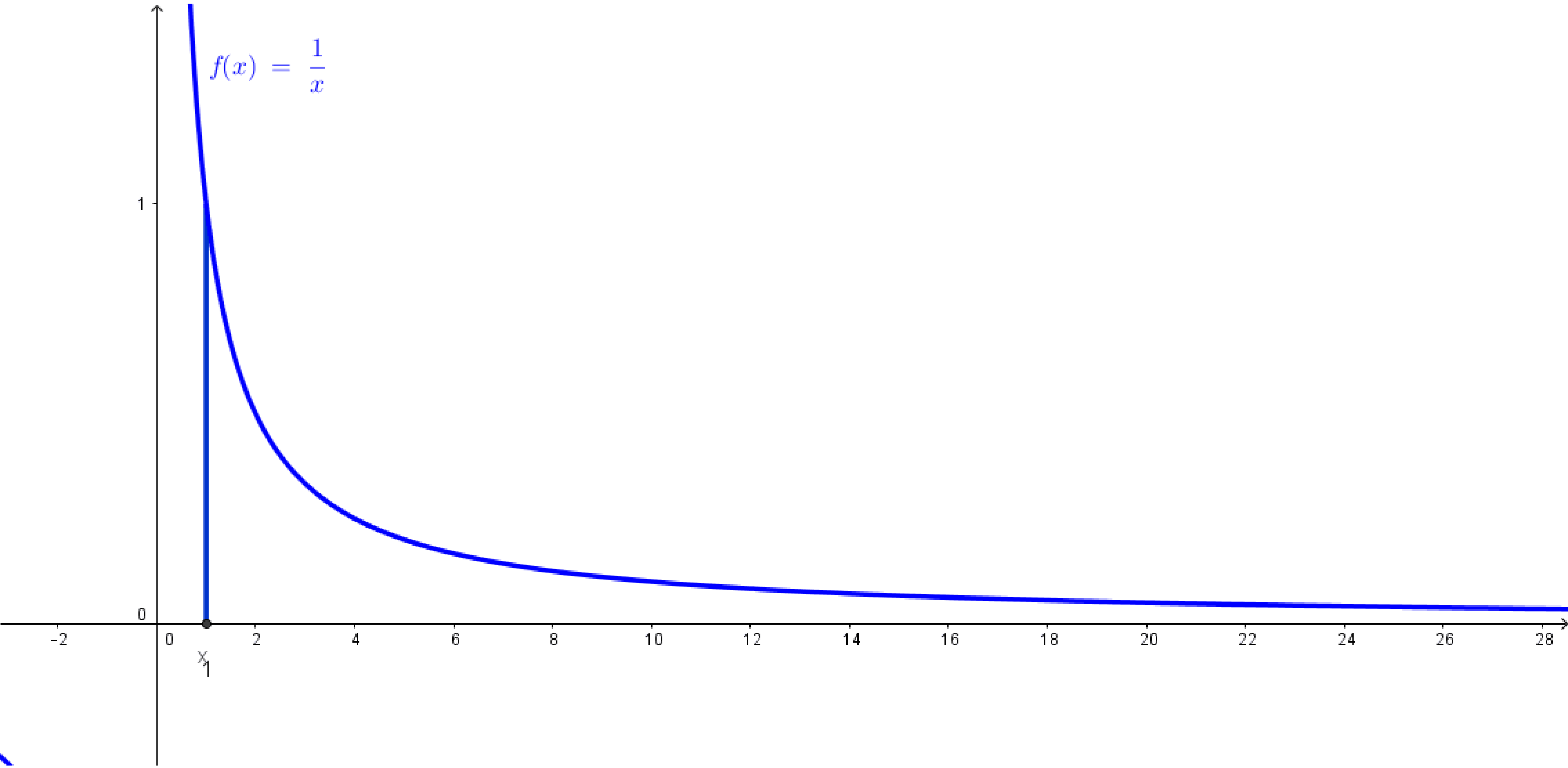
(gráfico fora de escala)



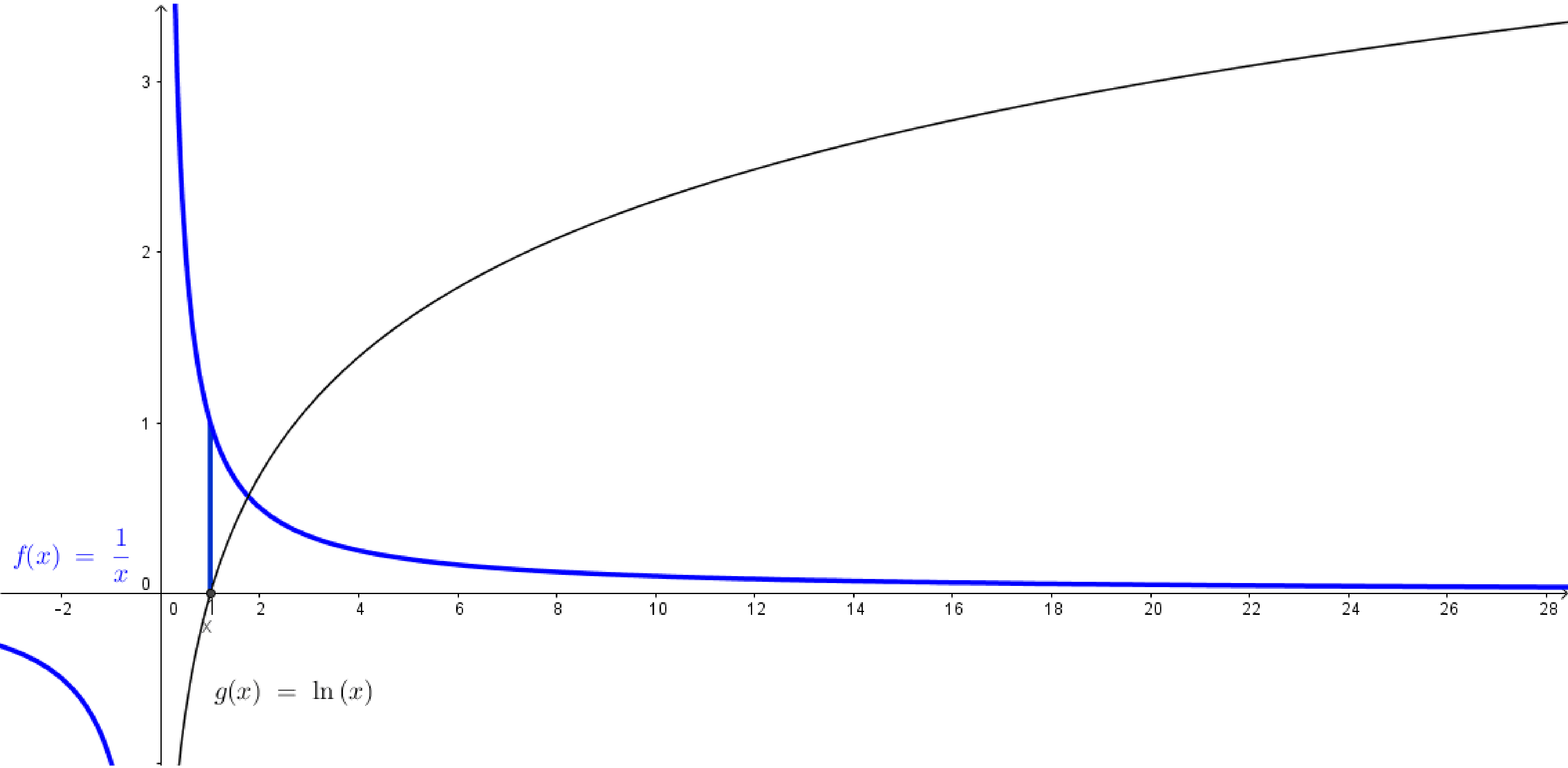
(gráfico fora de escala)

Quem percebeu que havia logaritmos nessa história foi o aluno de Saint Vicent, chamado Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667).

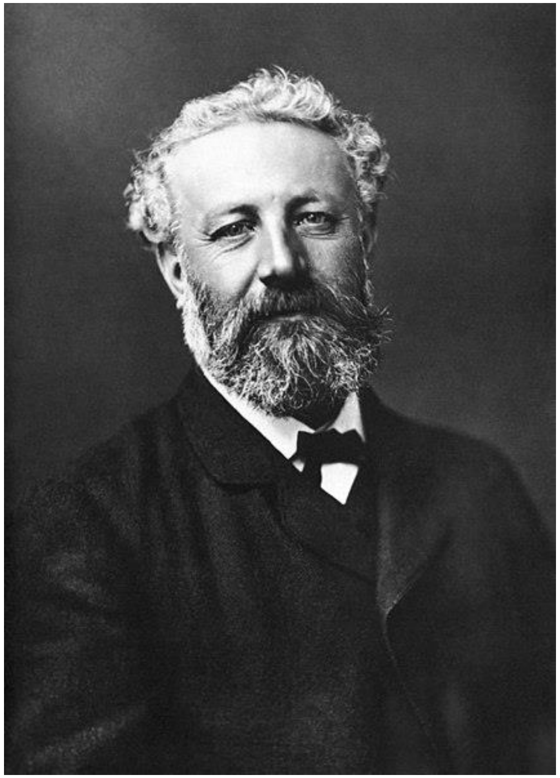
Que função expressa a área sob f(x)=1/x, de 1 a x?



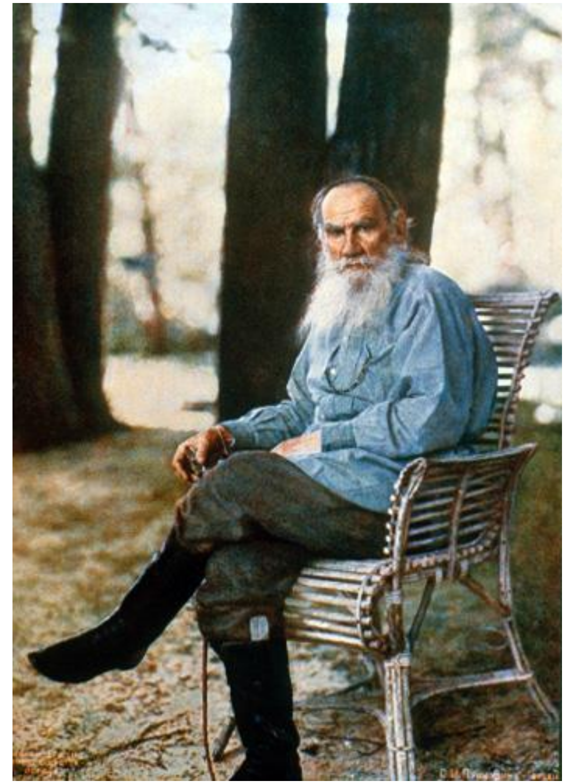
A função área é A(x)=lnx (logaritmo natural, base e)



$$e \cong 2{,}7\ 1828\ 1828\ 4590\ 4523$$



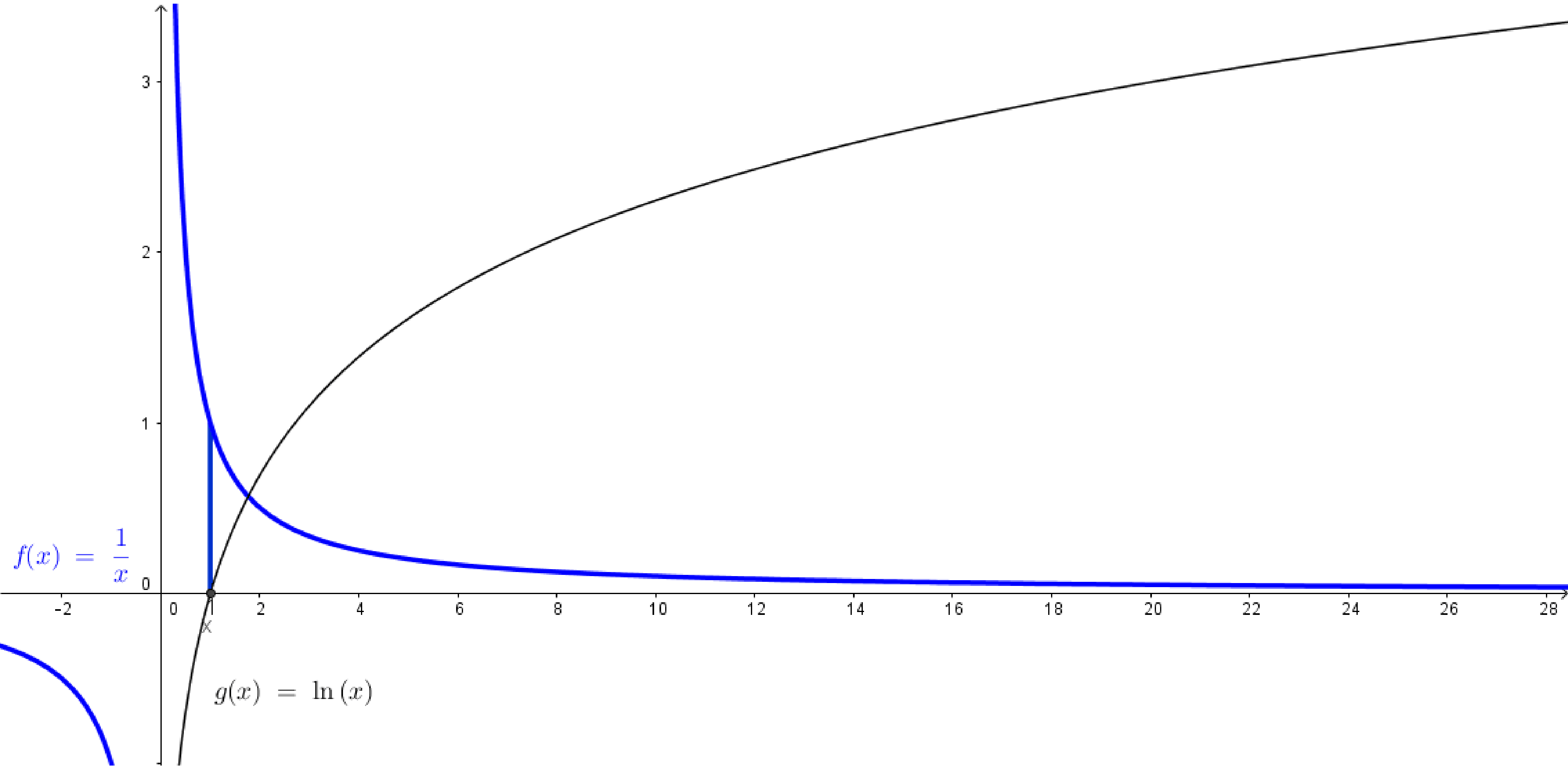
Júlio Verne (1828-1905)



León Tolstoi (1828-1910)

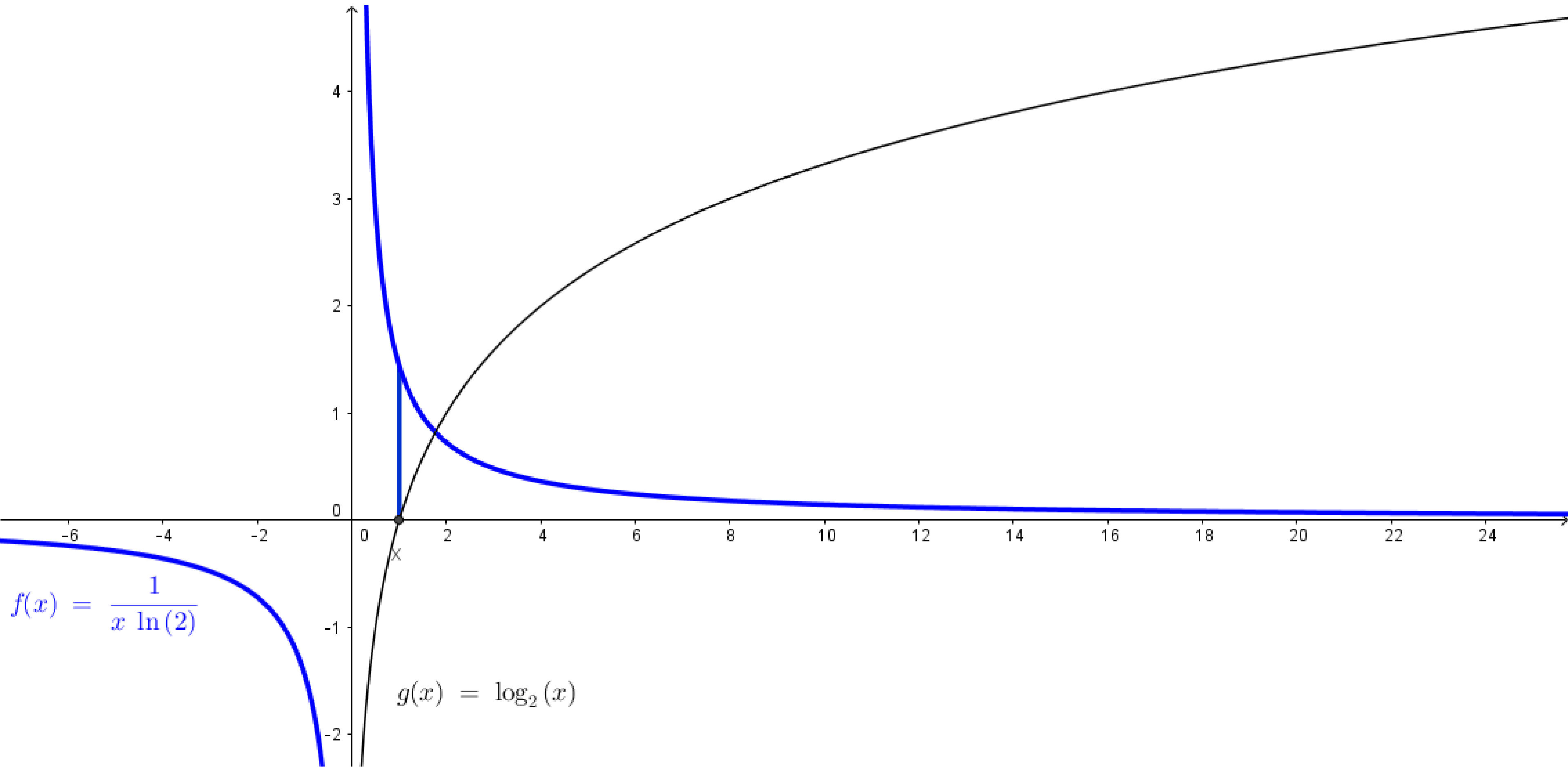
$$e \cong 2{,}7\ 1828\ 1828\ 4590\ 4523$$

A função área é A(x)=lnx (logaritmo natural, base e)

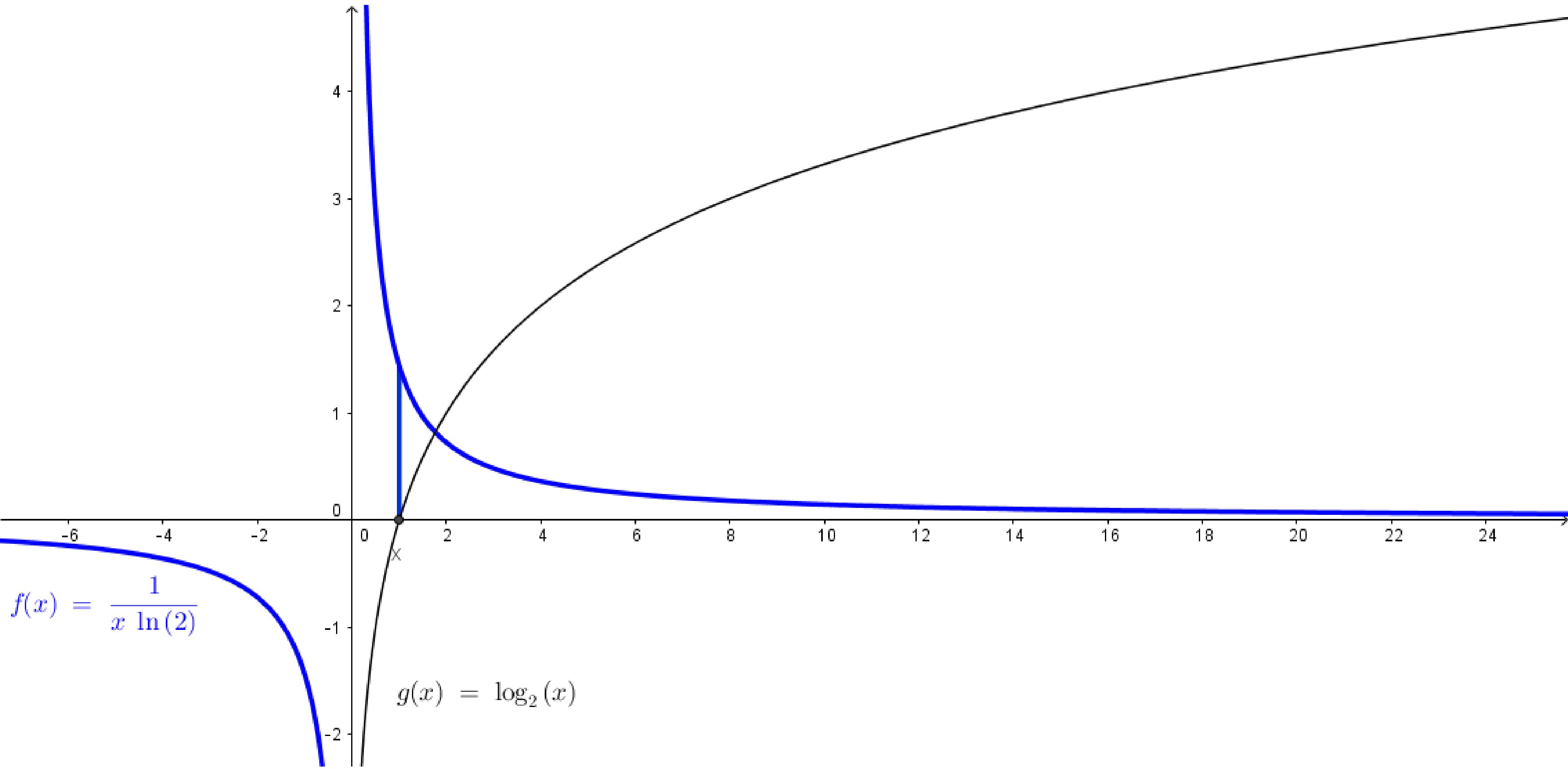


$$e \cong 2{,}7\ 1828\ 1828\ 4590\ 4523$$

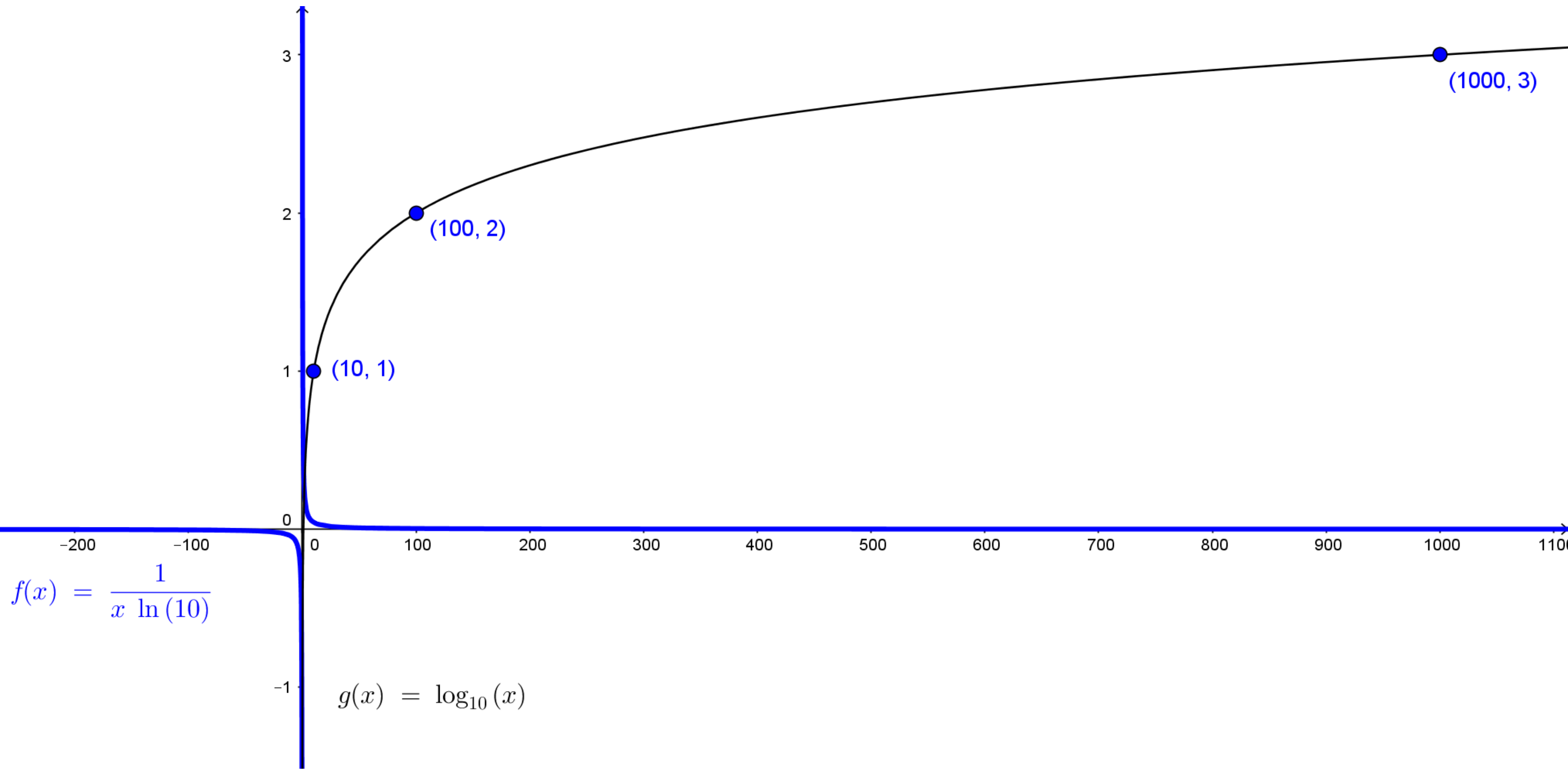
Que função expressa a área sob $f(x) = \frac{1}{x ln 2}$, de 1 a x?



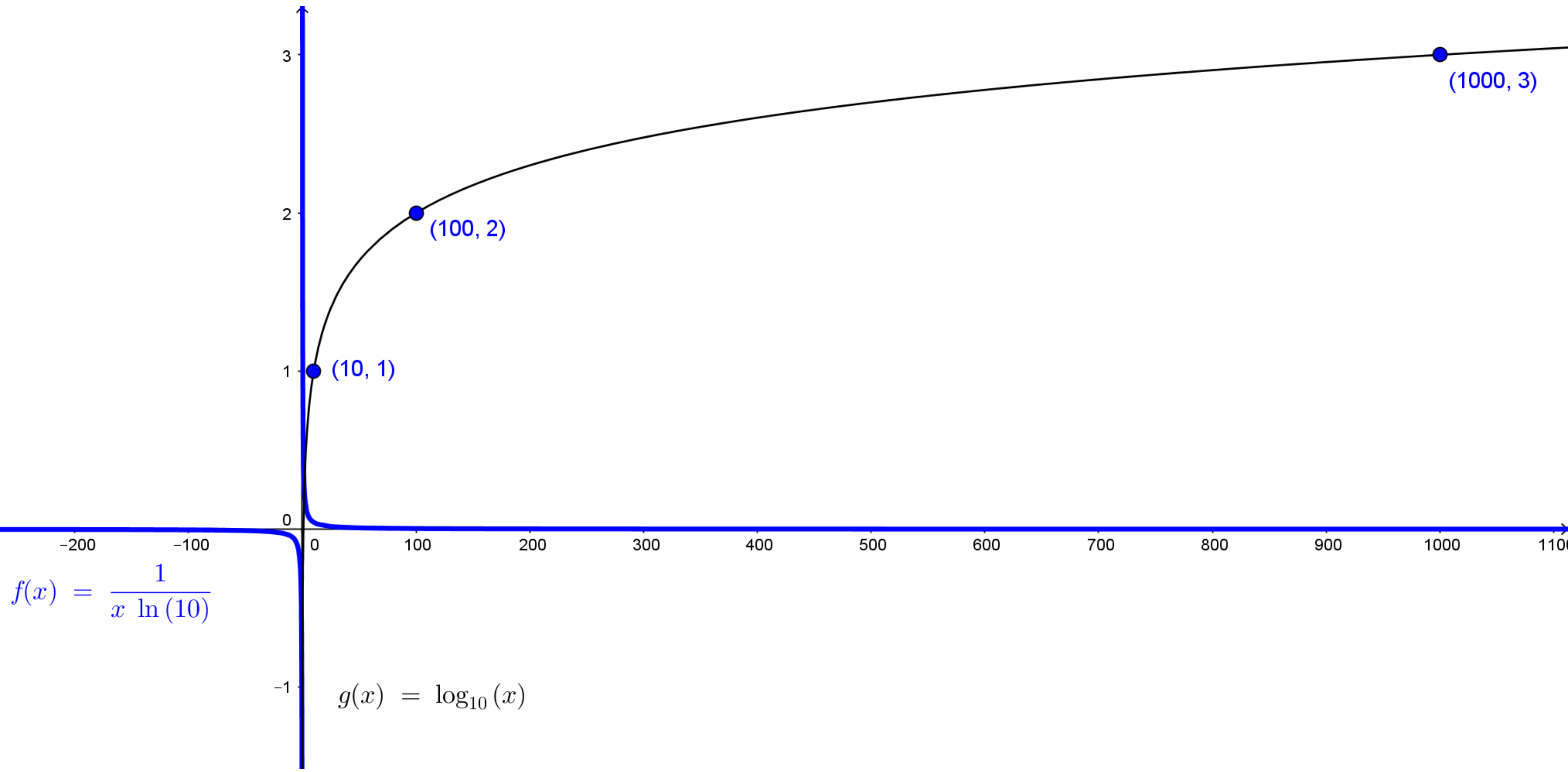
A função área é $A(x) = \log_2 x$ (função logarítmica na base 2)



Que função expressa a área sob $f(x) = \frac{1}{xln10}$, de 1 a x?



A função área é $A(x) = \log_{10} x$ (função logarítmica na base 10)

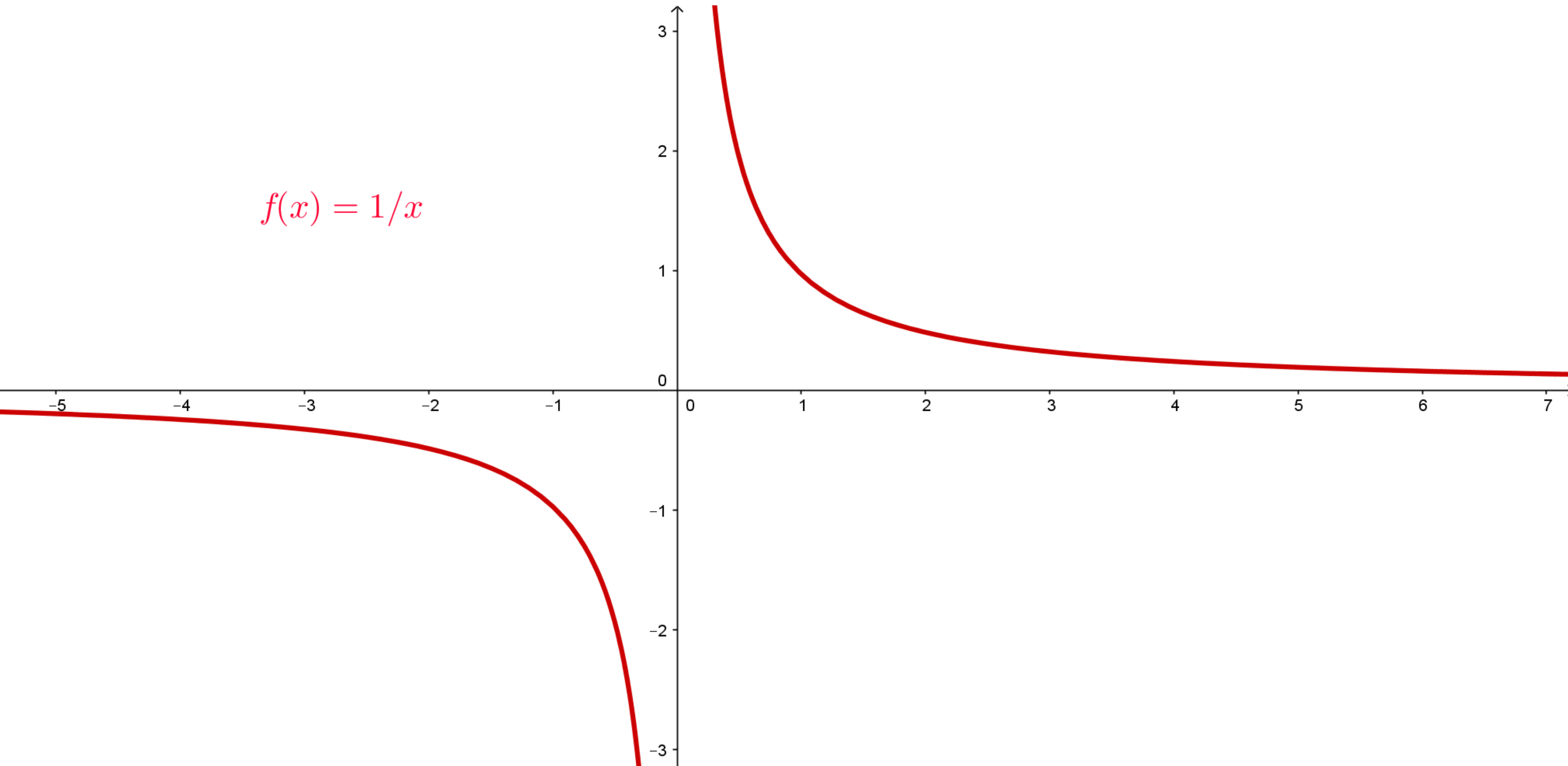


A integral indefinida da função

$f(x) = \frac{1}{xlna}$, com a>0, a≠1, é a função

$$g(x) = \log_a|x|$$

(função logarítmica na base *a* do módulo de *x*)

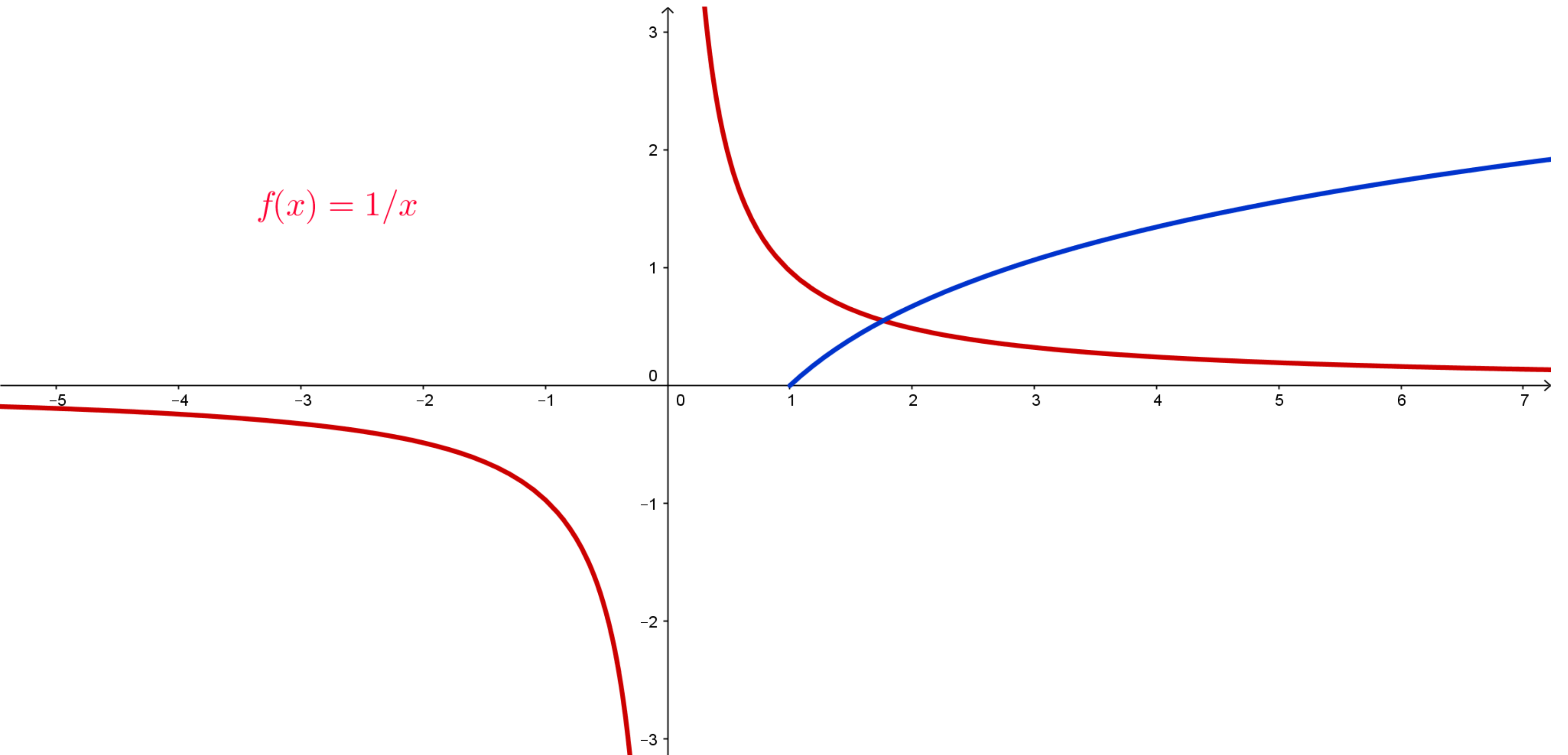


A integral indefinida da função

$f(x) = \frac{1}{x \ln a}$, com a>0, a≠1, é a função

$$g(x) = \log_a |x|$$

(função logarítmica na base *a* do módulo de *x*)

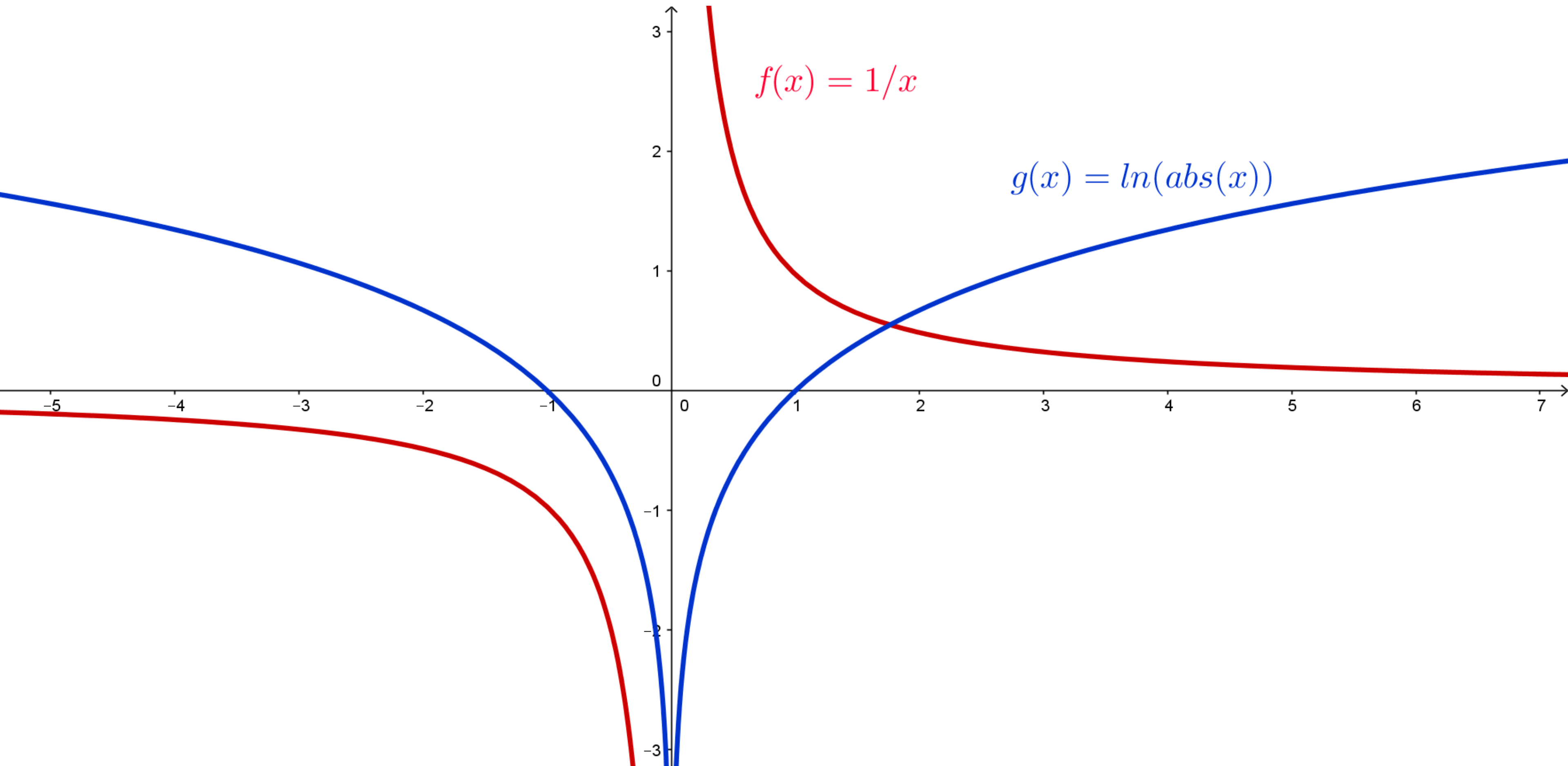


A integral indefinida da função

$f(x) = \frac{1}{x}$ é a função

$$g(x) = ln|x|$$

(função logarítmica natural, base *e*)

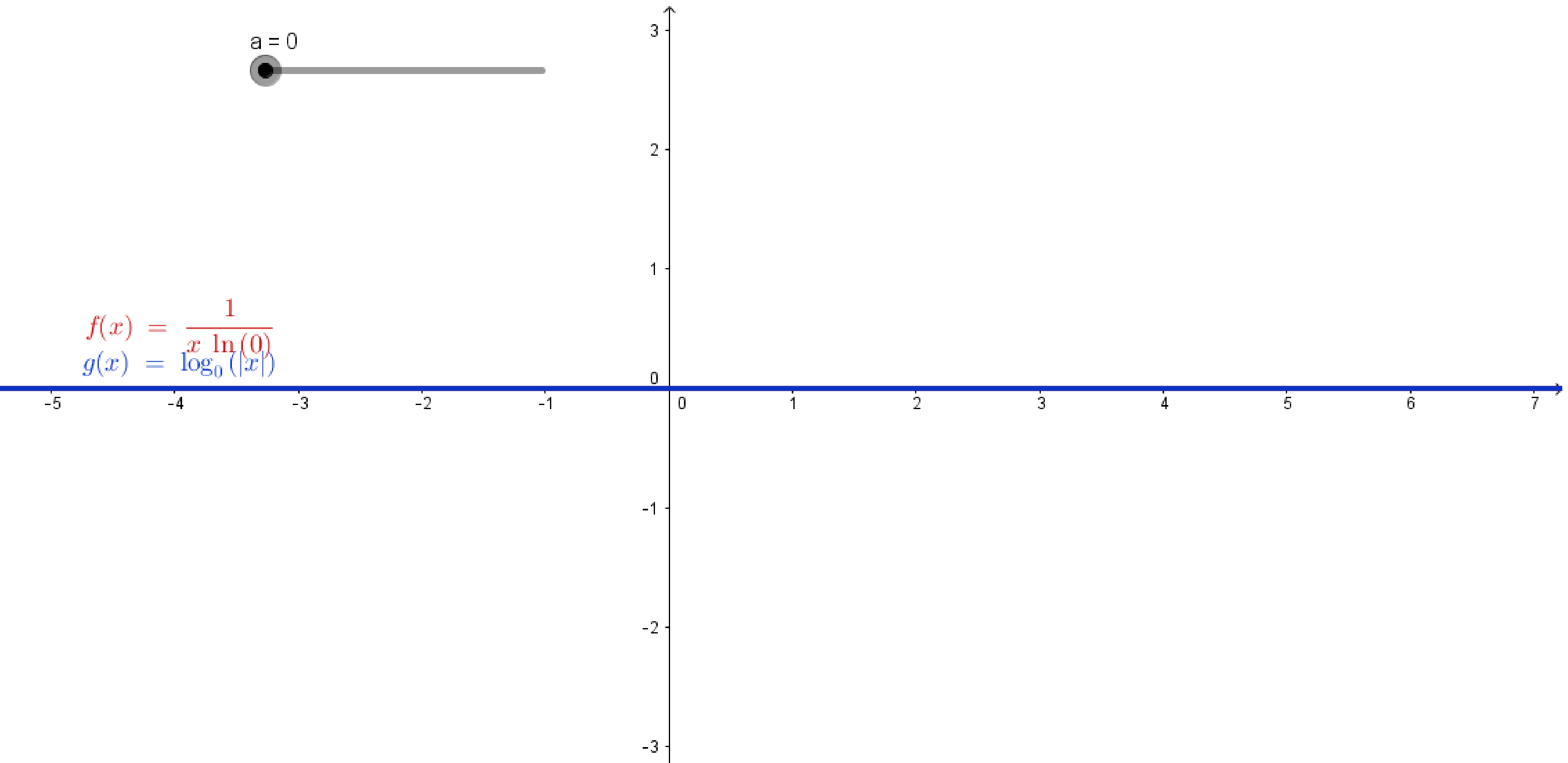


A integral indefinida da função

$f(x) = \frac{1}{xlna}$, com a>0, a≠1, é a função

$$g(x) = \log_a|x|$$

(função logarítmica na base *a* do módulo de *x*)



Exemplos de escalas logarítmicas

Nossa sensibilidade é afetada de modo logaritmico. Ou seja, percebemos variações de grandezas que nos afetam não de modo linear, mas de modo exponencial.

Por exemplo, nosso ouvido percebe uma mudança de pressão que indica um aumento considerável de sons, quando este passa a uma próxima potência de 10.

Quando a pressão sonora passa de uma potência de 10 a outra, a escala de decibeis assinala uma mudança linear, mais fácil de acompanhar.

Imagem obtida no site: http://8b2007.files.wordpress.com/2008/05/ondasonora6.jpg

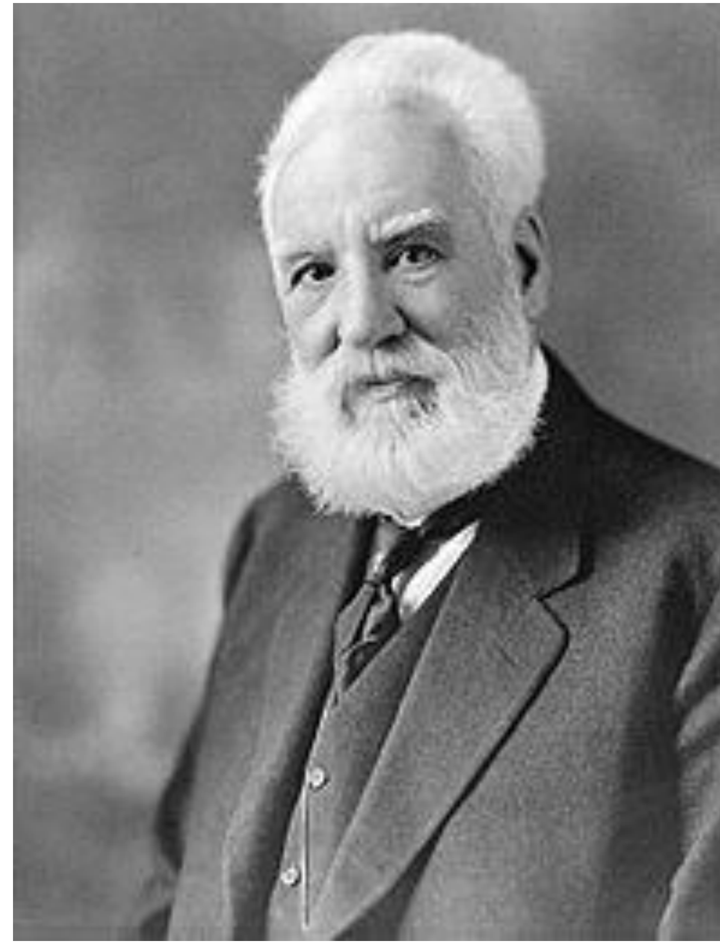
Quando a pressão sonora passa de uma potência de 10 a outra, a escala de decibeis assinala uma mudança linear, mais fácil de acompanhar.

Decibel e Escala Logarítmica

Decibel é a razão logarítmica entre duas potências ou intensidades e é dado pela expressão:

$$P_{dB} = 10 \times \log_{10} (P_x/P_y)$$

ou $$I_{dB} = 10 \times \log_{10} (I_x/I_y)$$



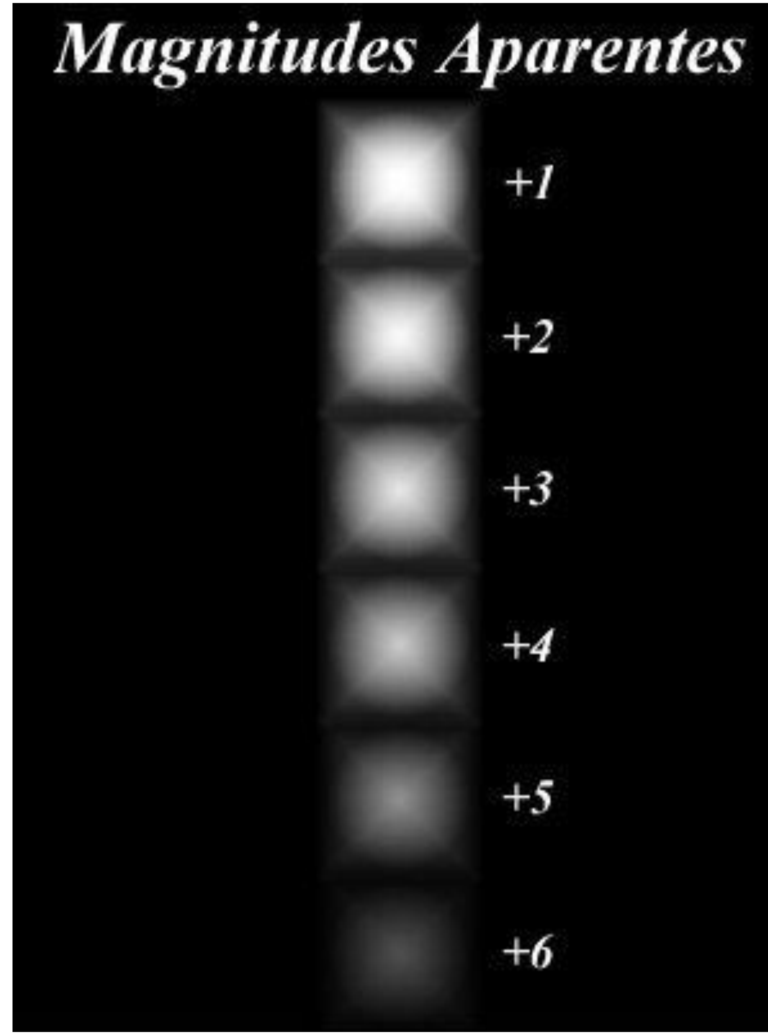
Alexander Graham Bell (1847 — 1922).

Magnitude aparente das estrelas

Magnitude aparente é uma escala para comparação do brilho das estrelas desenv olvida pelo astrônomo grego Hiparco há mais de 2000 anos.

Hiparco (190-120 aC)

Ele alocou às estrelas mais brilhantes do céu uma magnitude m=1, às um pouco menos brilhantes do que as primeiras uma magnitude m=2, e assim por diante, até que todas as estrelas visíveis por ele tivessem valores de magnitude de 1 a 6, sendo este último valor atribuído às estrelas menos brilhantes do céu.

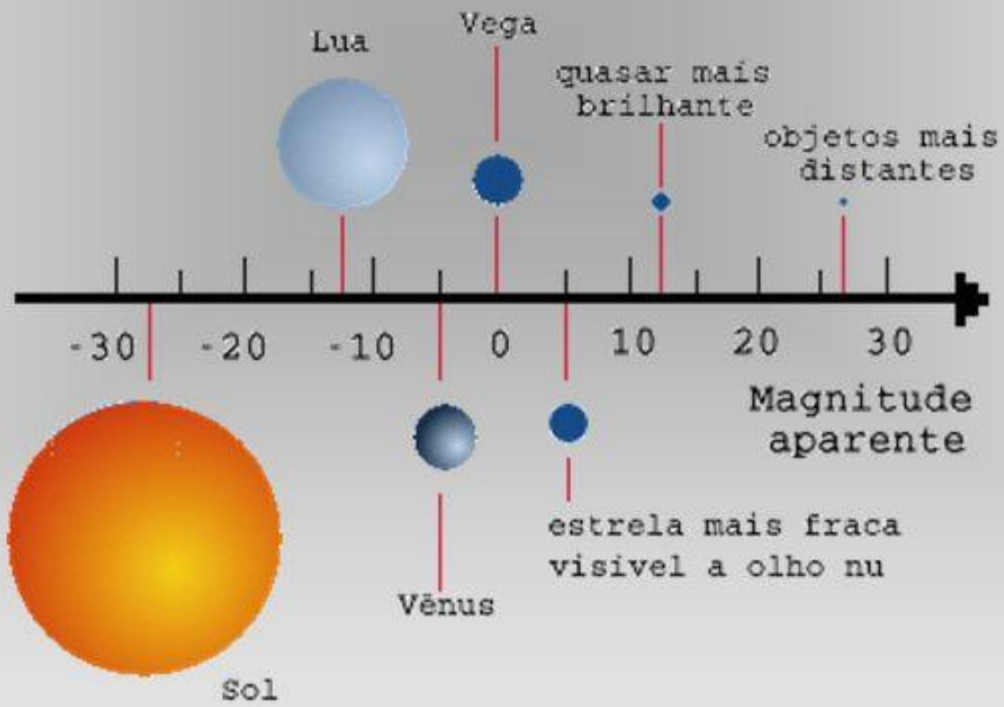


Magnitude aparente das estrelas

Portanto, o sistema de magnitude é baseado no quão brilhantes são as estrelas a olho nu. Posteriormente a escala de Hiparco foi estendida para magnitudes além de 6 e abaixo de 1, inclusive negativas.

Magnitude Aparente

Magnitude de um astro obtida através da observação, independentemente de seu fluxo radiante intrínseco. Exprime o brilho aparente.



Magnitude aparente das estrelas

Hoje em dia a diferença entre as magnitudes das estrelas se expressa com logaritmos:

$$(m_i - m_j) = -\frac{5}{2}\log_{10}\left(\frac{F_i}{F_j}\right)$$

Hiparco (190-120 aC)

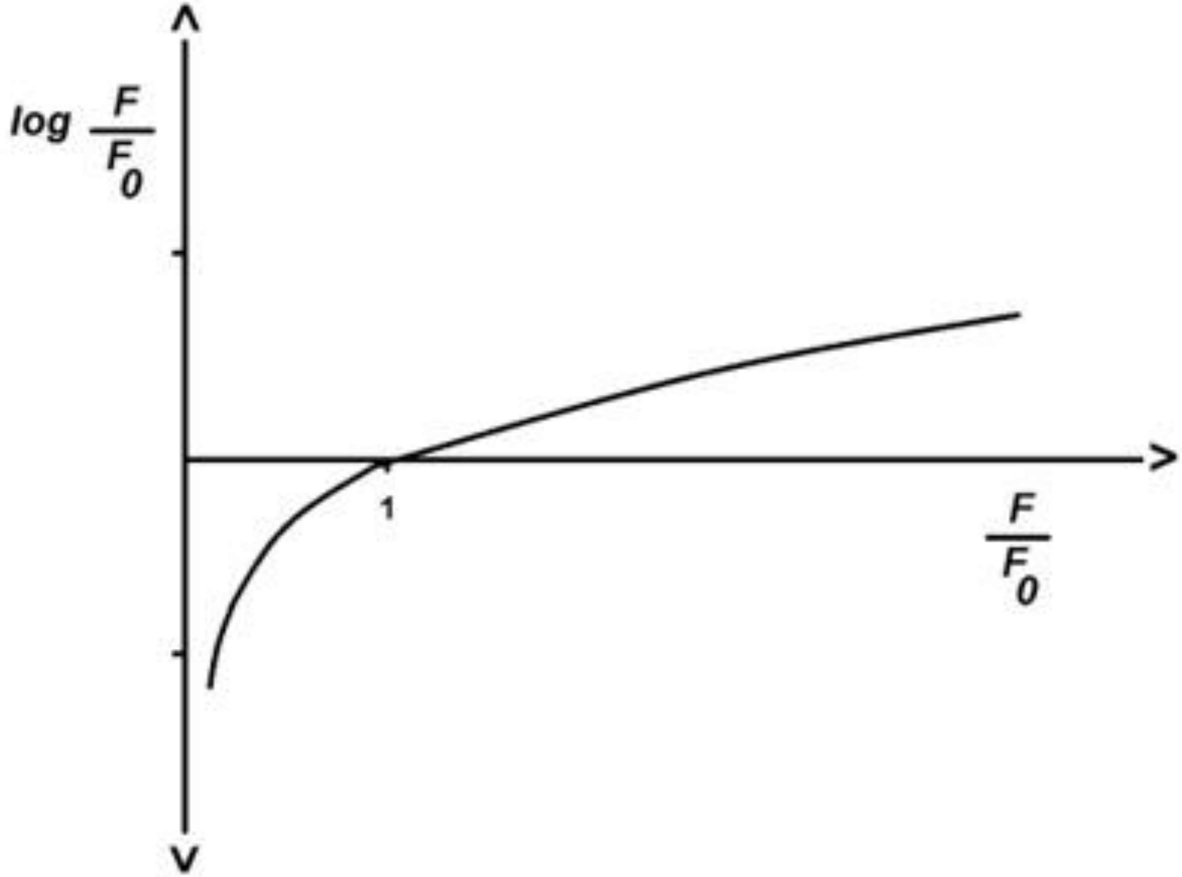


Figura 1 - O logaritmo do fluxo da luz estelar F, função que cresce suavemente conforme F aumenta. Hipparcos e seus seguidores adotaram implicitamente esta forma ao definir um intervalo (escala) de magnitudes visíveis, posteriormente matematicamente esprimida na Eq. (1), a qual continua sendo utilizada até hoje. Quando o fluxo F resulta menor que aquele da refer ência F_0, a função é negativa e a magnitude aparente m cresce numericamente.

Escala Richter

A **escala Richter**, atribui um número único para quantificar o nível de energia liberada por um terremoto.

Charles Francis Richter (1900 — 1985), sismólogo americano.

Escala Richter

A **escala Richter**, atribui um número único para quantificar o nível de energia liberada por um terremoto.

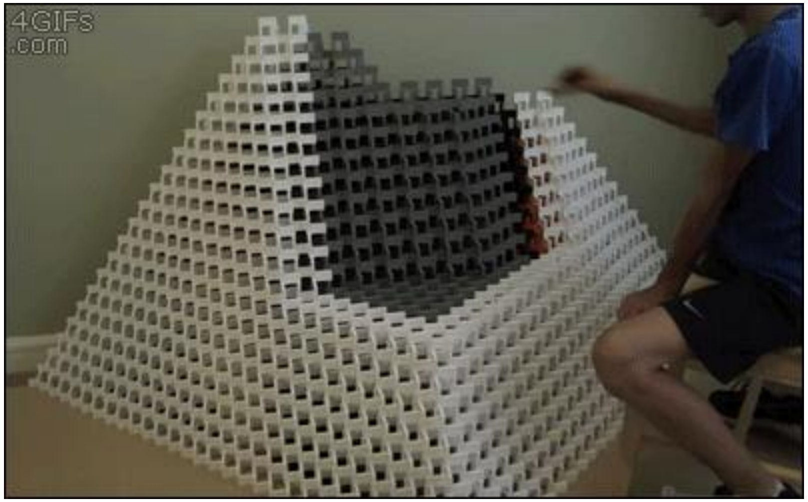
É uma escala logarítmica, de base 10.

Escala Richter

O número do terremoto é obtido calculando o logaritmo da amplitude horizontal combinada (amplitude sísmica) do maior deslocamento a partir do zero em um tipo particular de sismógrafo.

Escala Richter

Pelo fato de ser um escala logarítmica, um terremoto que mede 5 na escala Richter tem uma amplitude sísmica 10 vezes maior do que uma que mede 4. Em termos de energia, um terremoto de grau 7 libera cerca de 30 vezes a energia de um sismo de grau 6.

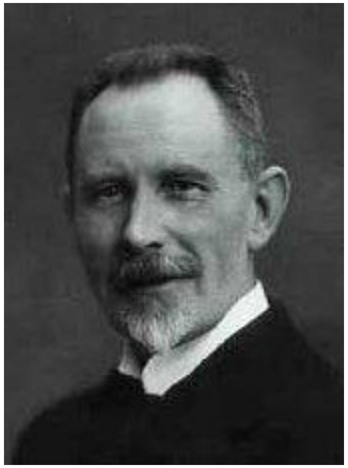


Escala de pH

pH é uma medida do **potencial hidrogeniônico** a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa.

Escala de pH

O termo **pH** foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Søren Peter Lauritz Sørensen (1868-1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas.



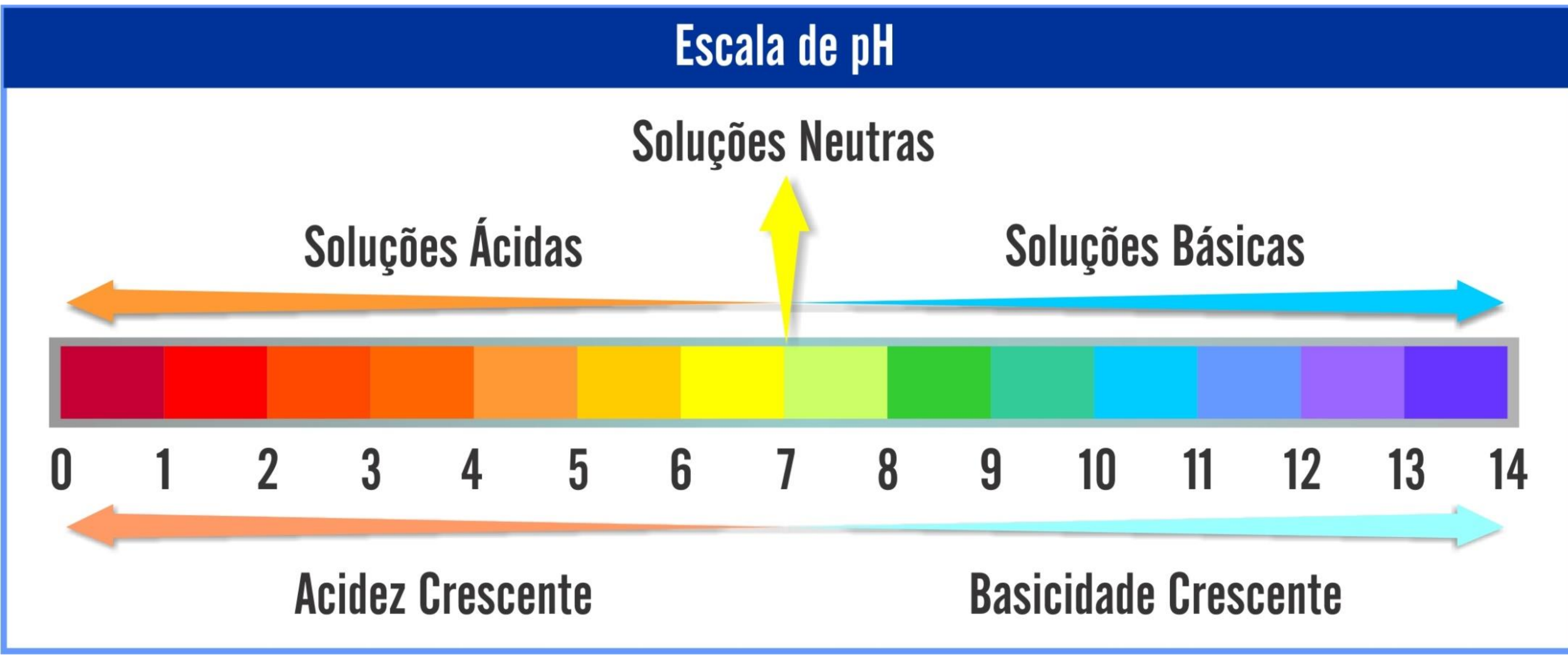
Escala de pH

O "p" vem do alemão *potenz*, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H^+).

$$pH = -\log_{10}\left[a_{H^+}\right]$$

Escala de pH

O "p" vem do alemão *potenz*, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H^+).



Alguns valores comuns de pH

Substância	pH
Ácido de bateria	<1.0
Suco gástrico	2.0
Sumo de limão	2.4
refrigerante tipo Cola	2.5
Vinagre	2.9
Sumo de laranja ou maçã	3.5
Cerveja	4.5
Café	5.0
Chá	5.5
Chuva ácida	< 5.6
Saliva pacientes com câncer (cancro)	4.5-5.7
Leite	6.5
Água pura	7.0
Saliva humana	6.5-7.4
Sangue	7.34 - 7.45
Água do mar	8.0
Sabonete de mão	9.0 - 10.0
Amônia caseira	11.5
"Água sanitária"	12.5
Hidróxido de sódio caseiro	13.5