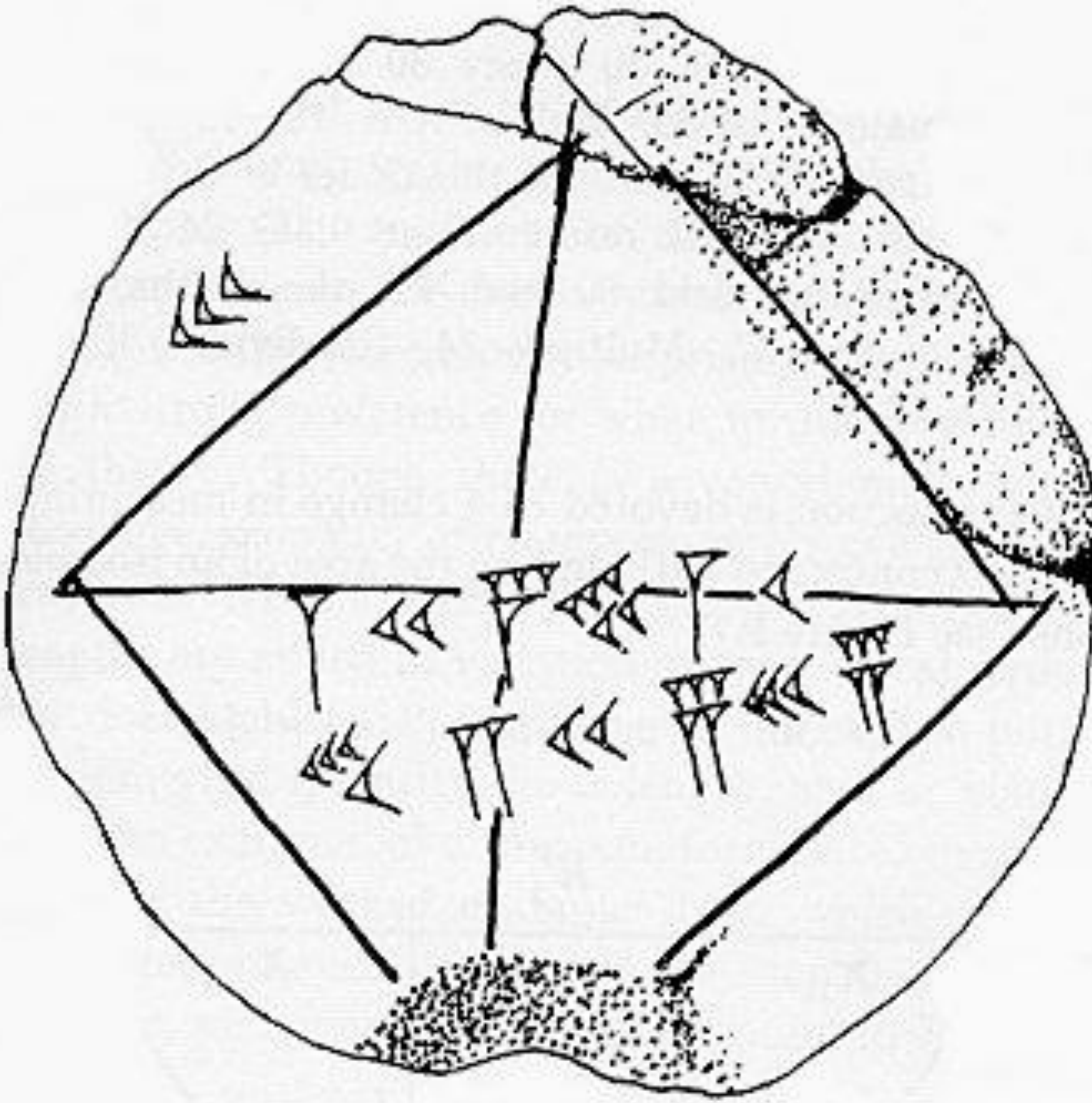
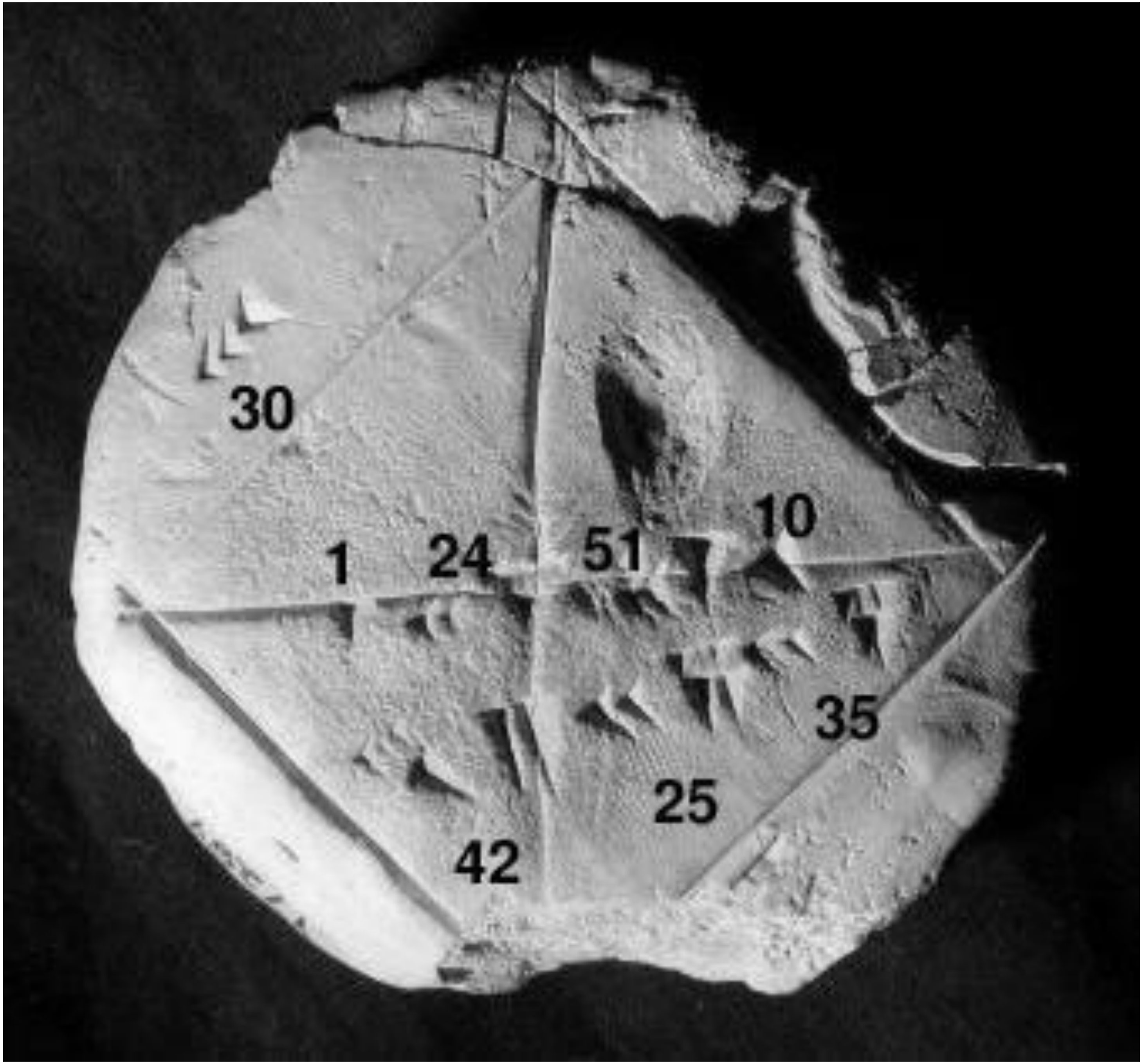
Funções trigonométricas

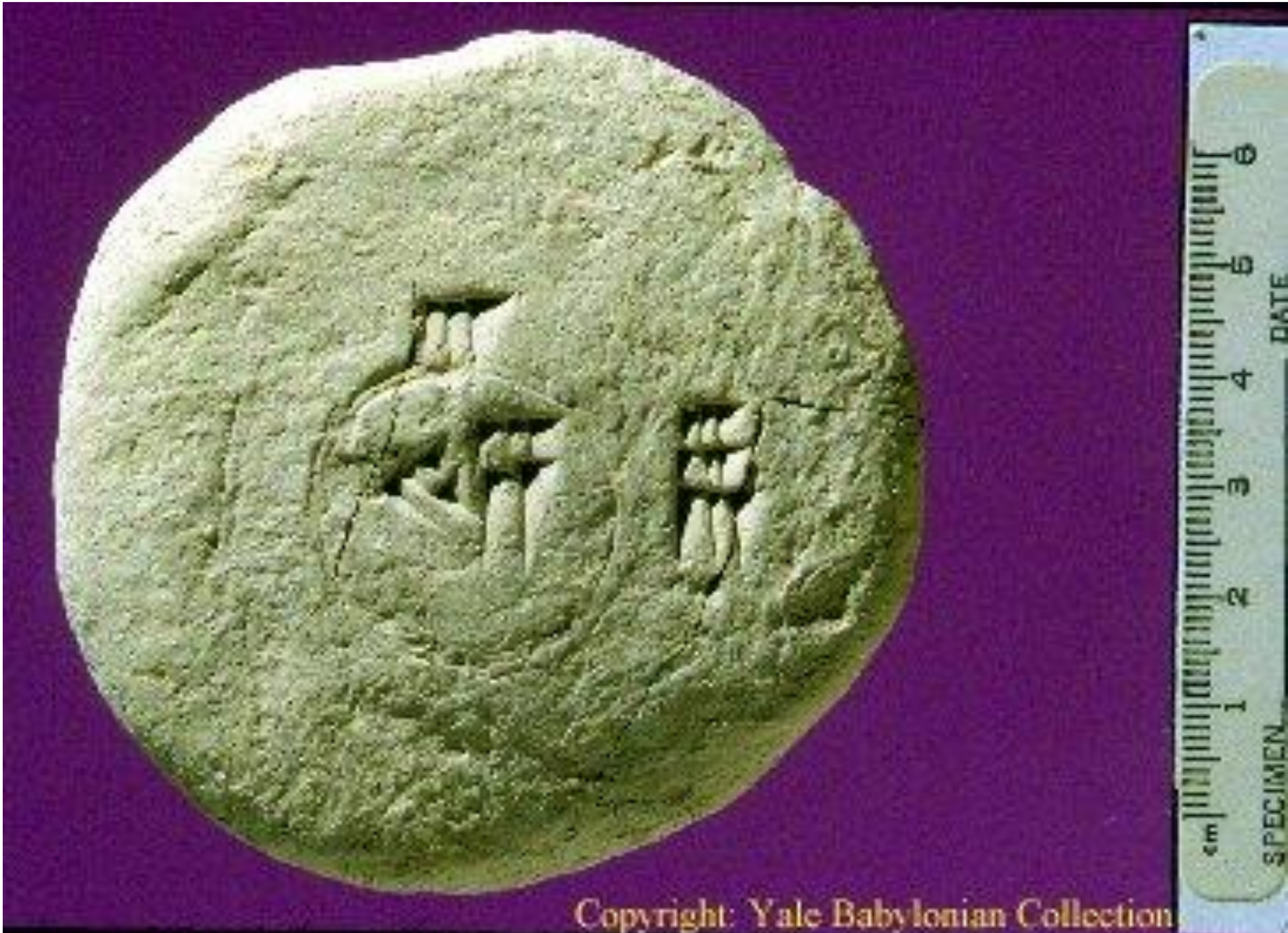
Antonio Carlos Brolezzi

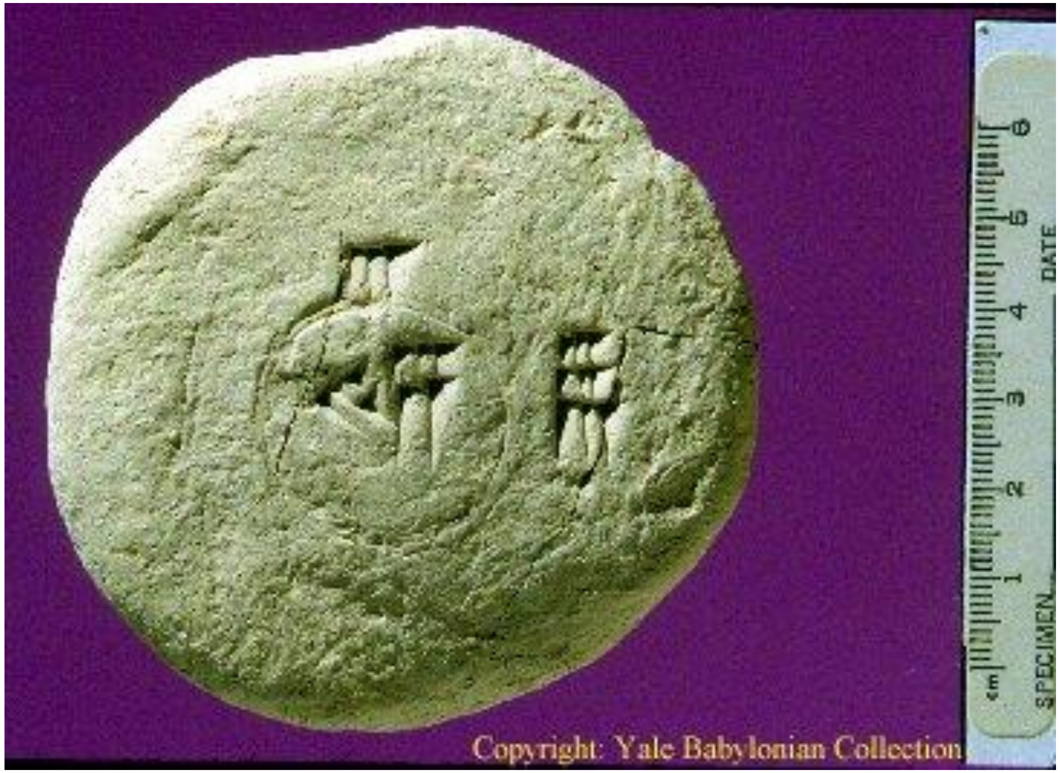
brolezzi@ime.usp.br


cm
1
2
3

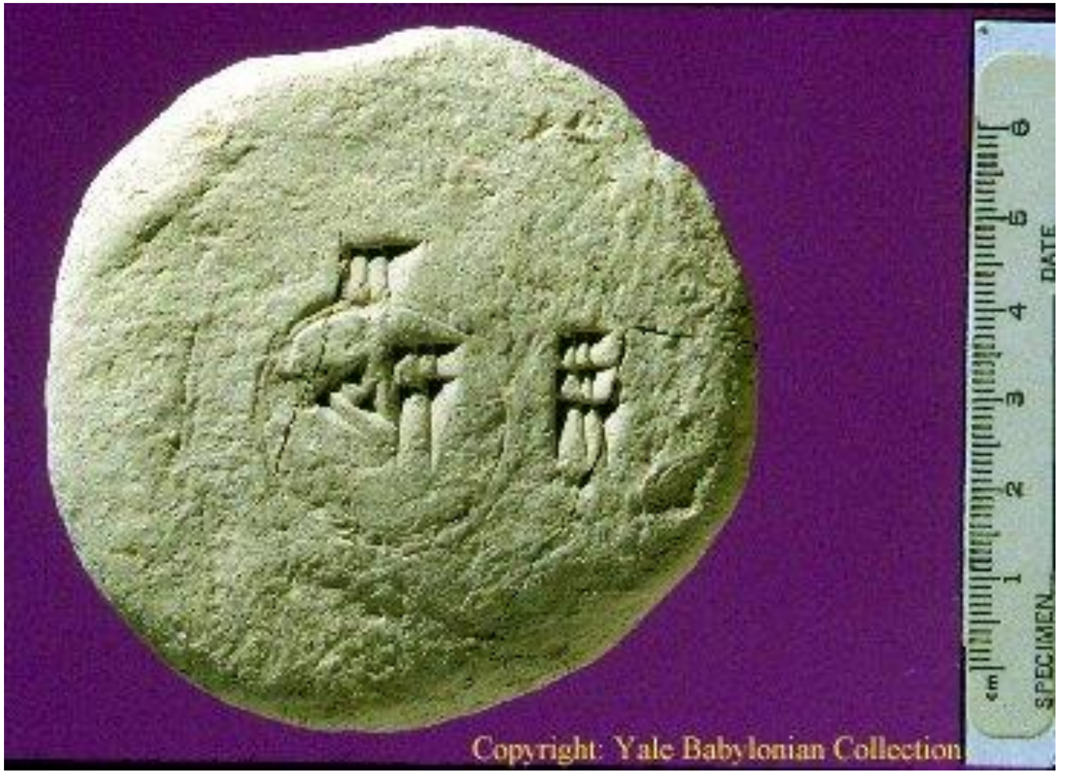



30
10
1
24
51
35
25
42

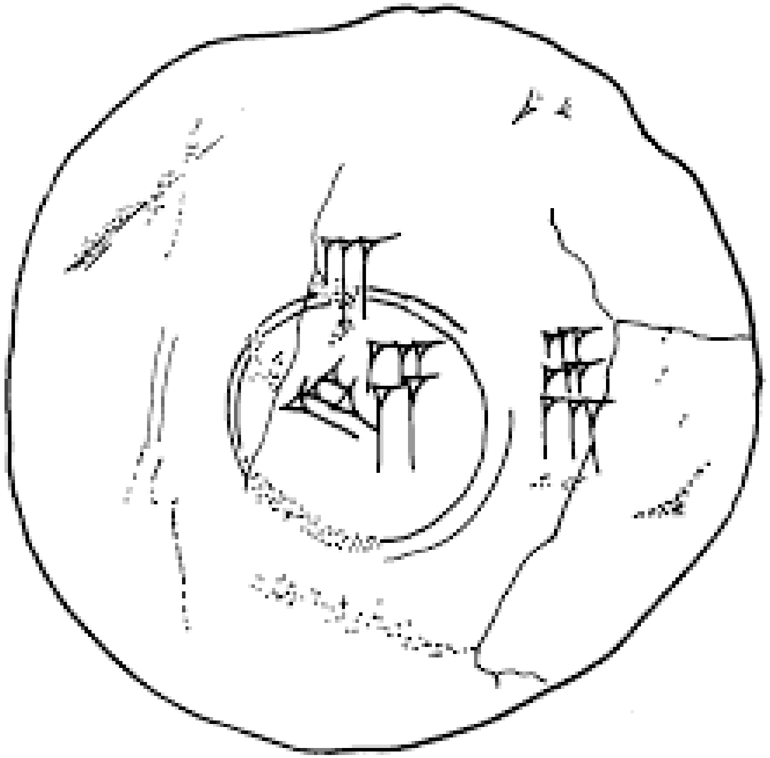

Copyright: Yale Babylonian Collection
SPECIMEN
DATE
cm
1
2
3
4
5
6



YBC 7302 um círculo com os números 3, 9 e 45.
45 representa a área do círculo, e 3 sua circunferência.
Usavam $A = 5C^2 = 5 \times 3^2 = 45$.



YBC 7302 um círculo com os números 3, 9 e 45.
45 representa a área do círculo, e 3 sua circunferência.
Usavam $A = 5C^2 = 5 \times 3^2 = 45$.



Veja que $\mathrm{A} \cong (0;5)C^2 = \frac{5}{60}C^2 = \frac{C^2}{12}$.

De fato, $A = \pi r^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{4\pi} \cong \frac{C^2}{12}$.

Fontes da História da Matemática do Egito Antigo

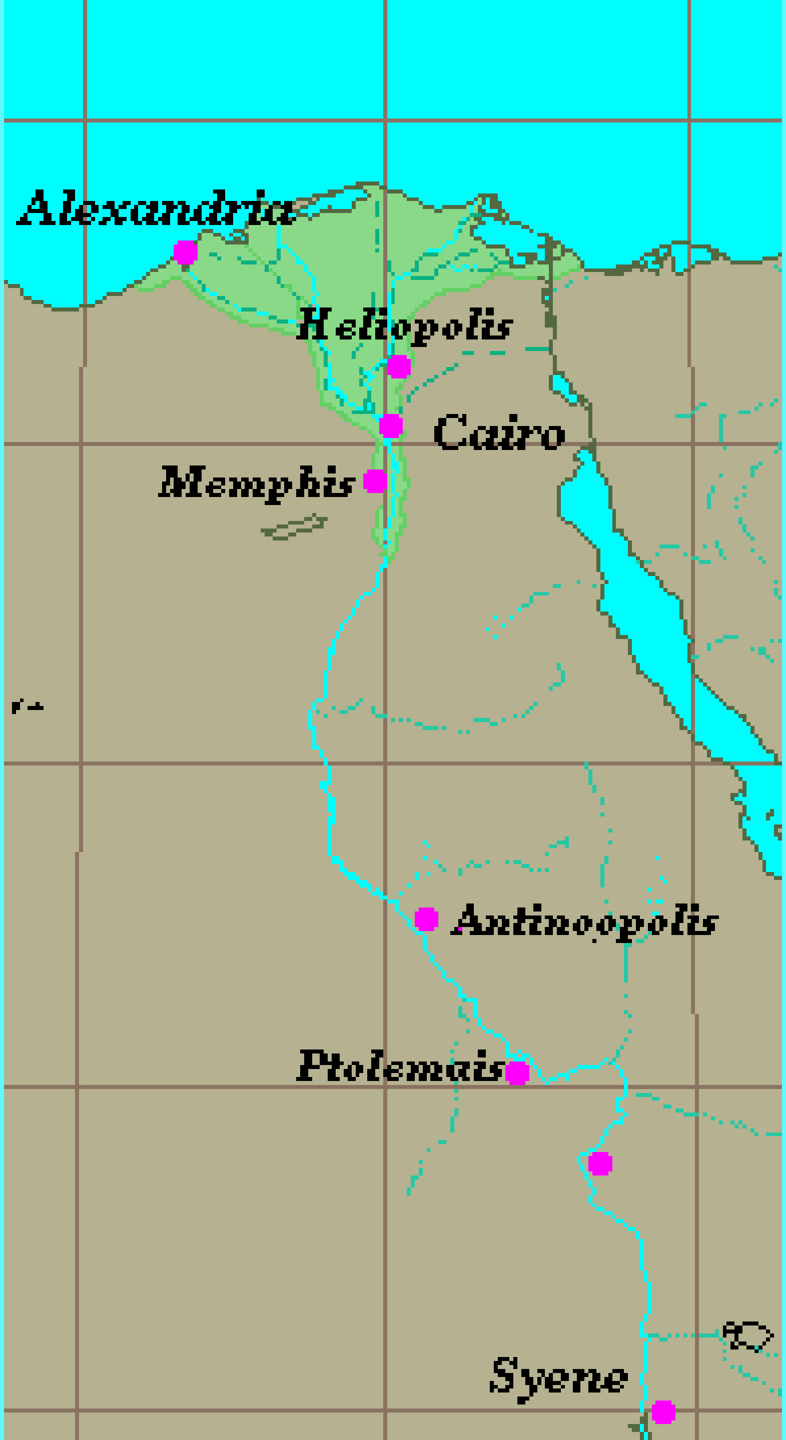
Fontes principais:

- inscrições em monumentos;
- inscrições em objetos;
- papiros.

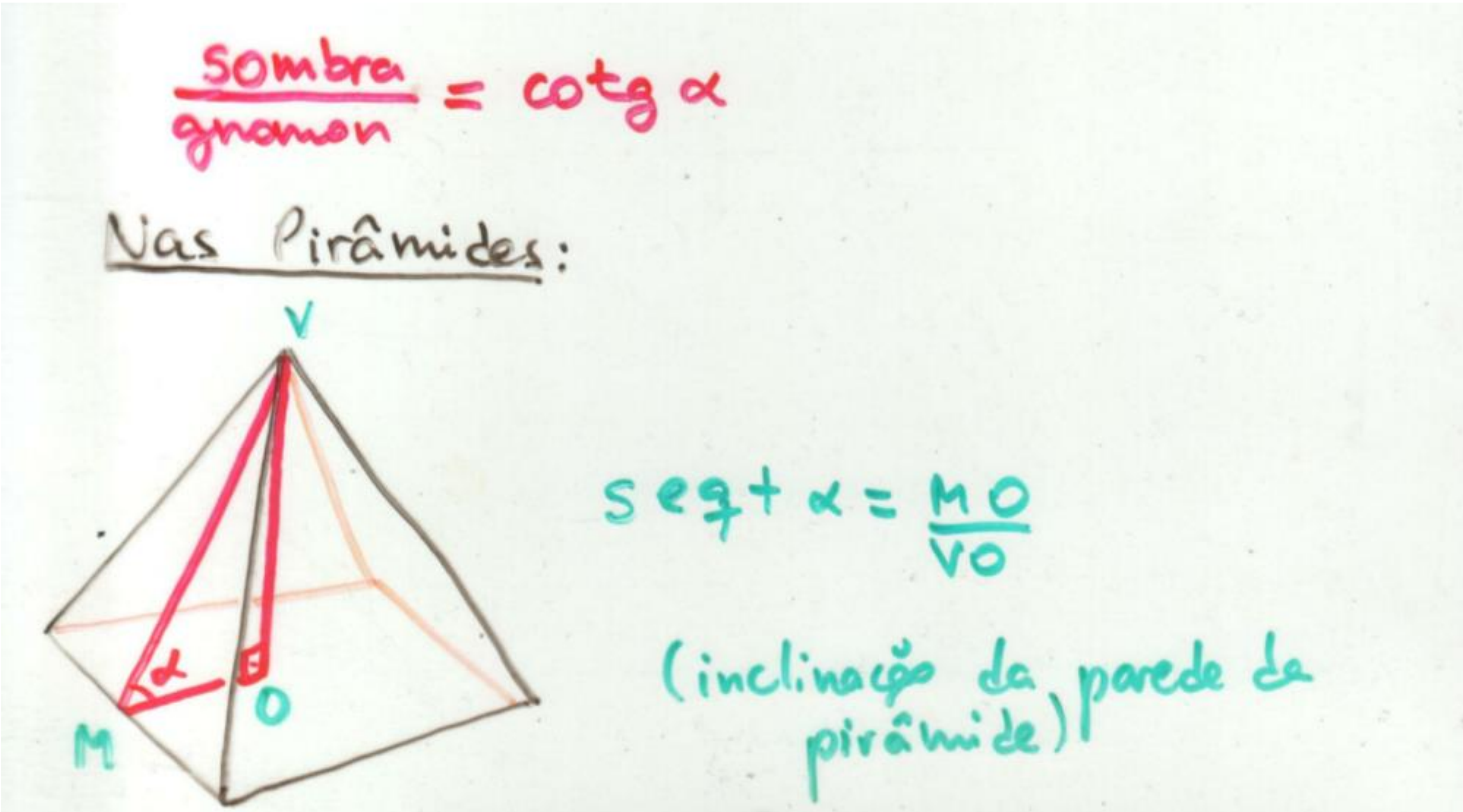
Escrita principal: hieróglifos

Período imperial: 2800 - 715 aC

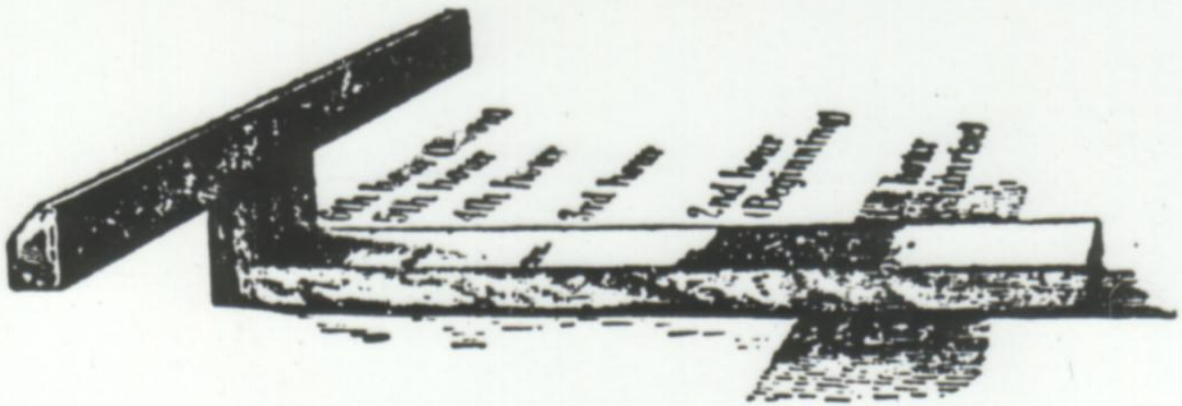
Região: litoral mediterrâneo da África



Os egípcios conheciam a relação entre a sombra e o gnomon



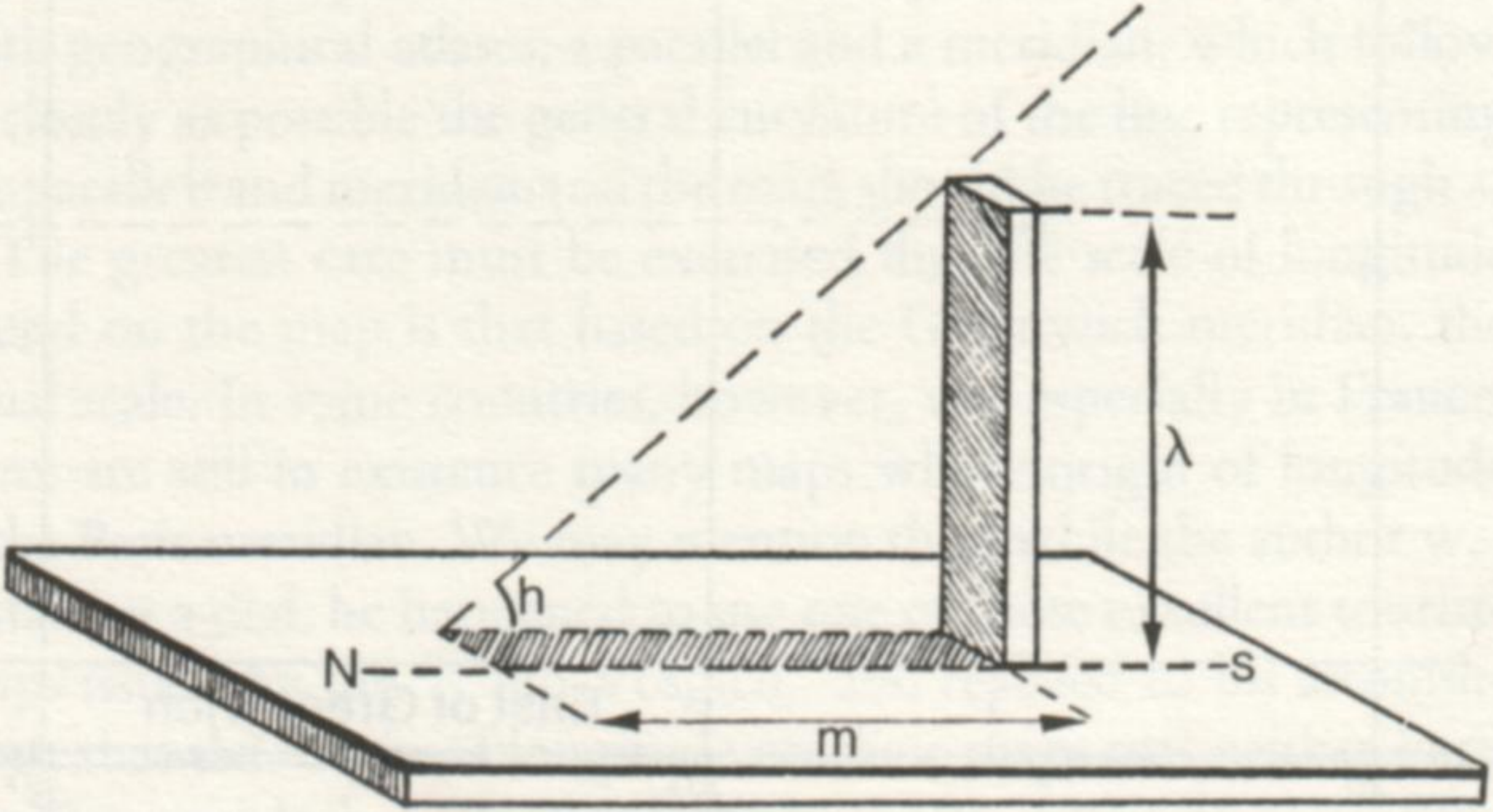
Mas tratava-se de um conhecimento prático, não demonstrativo



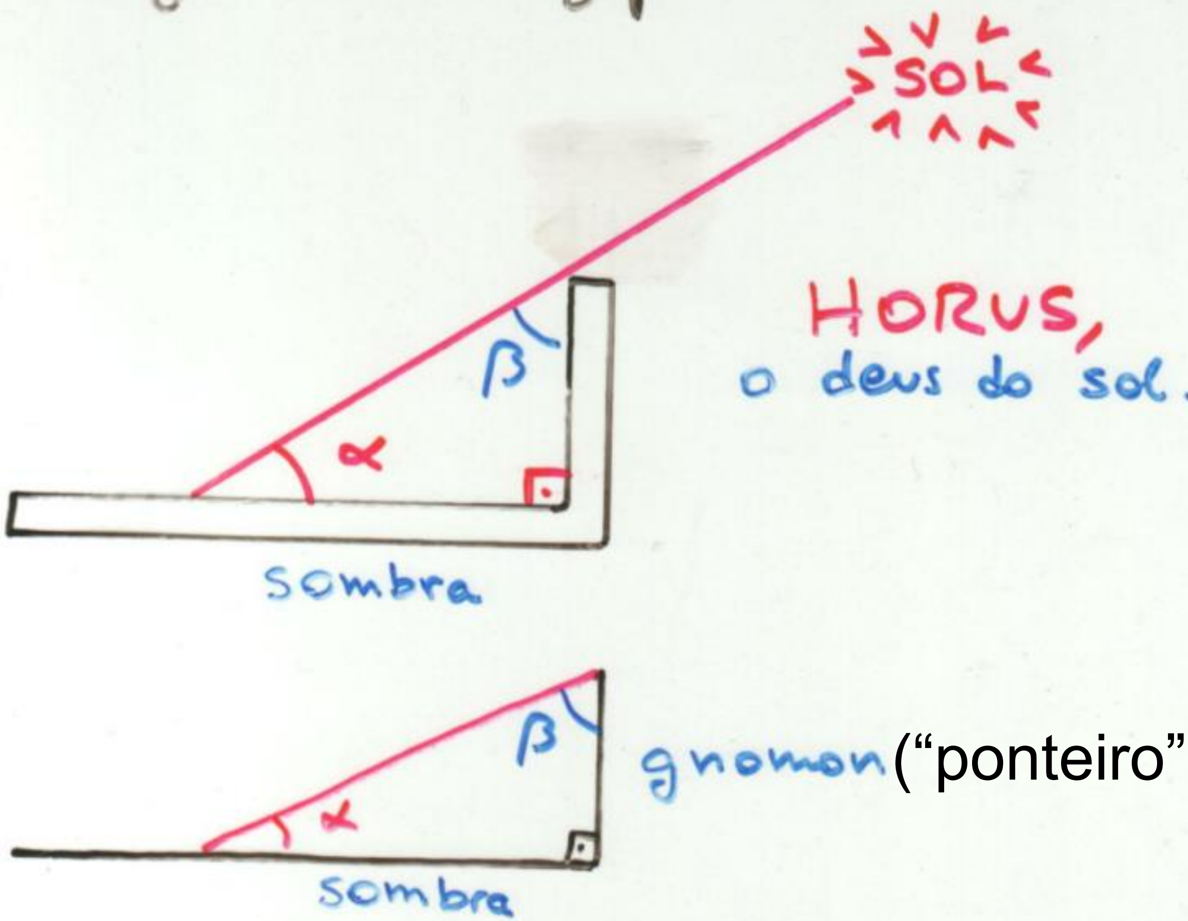
Mais Antigo Relógio de Sol

Tipo egípcio, recuperado por Borchardt, agora no Museu de Berlim. Data de 1500 aC. De manhã, a haste em forma de "T" era virada em direção ao leste, e à tarde era virada para o oeste. Origem: *Ancient Times*, de Breasted. Cfr. SMITH, David Eugene. *History of Mathematics* (Vol. 2). New York, Dover, 1953. 725 p., p. 670

Modelo do Relógio de Sol Egípcio



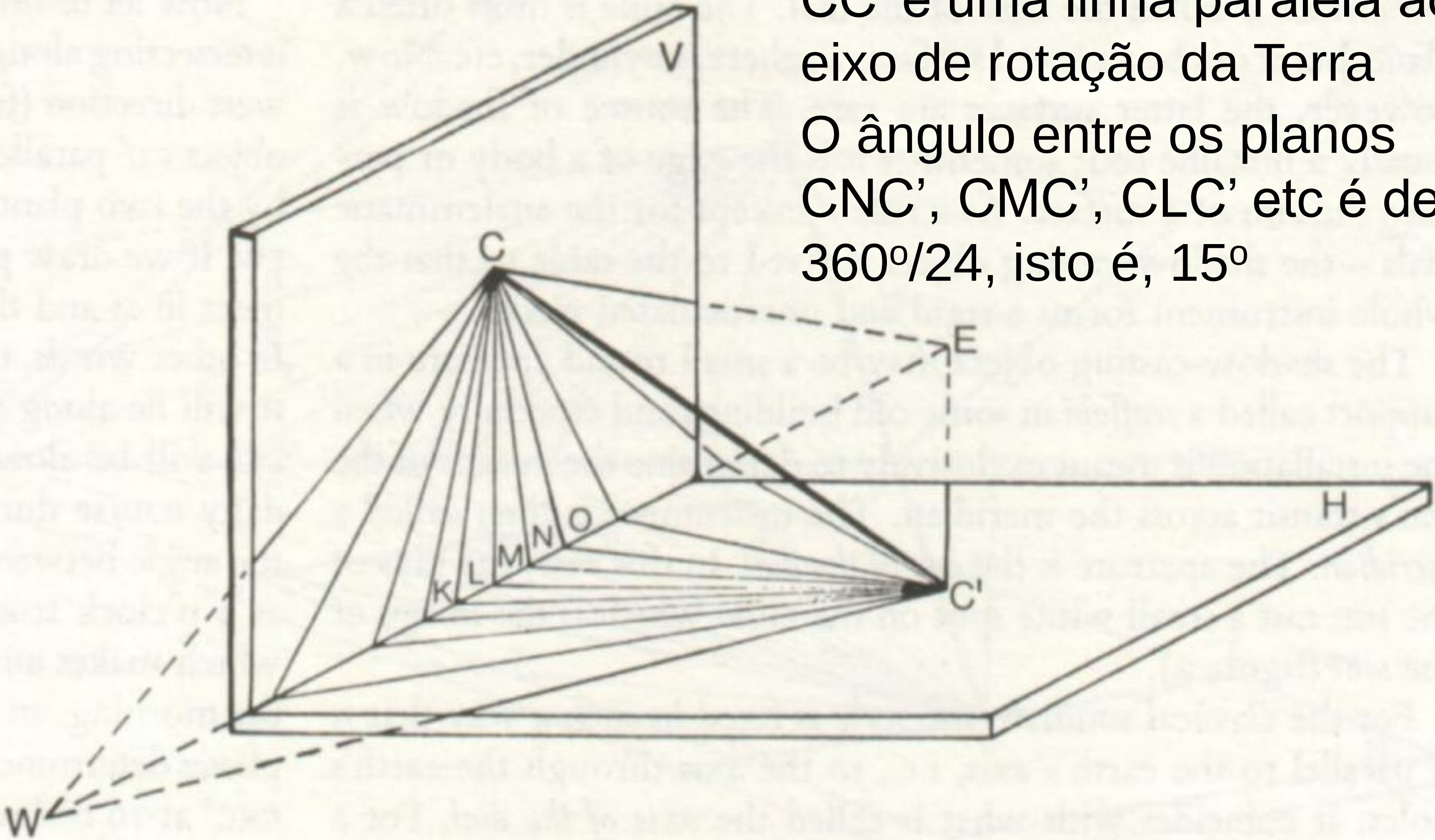
Relógio de Sol Egípcio:



(“ponteiro” em grego)

"Todo conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnomon" (Provérbio Chinês)

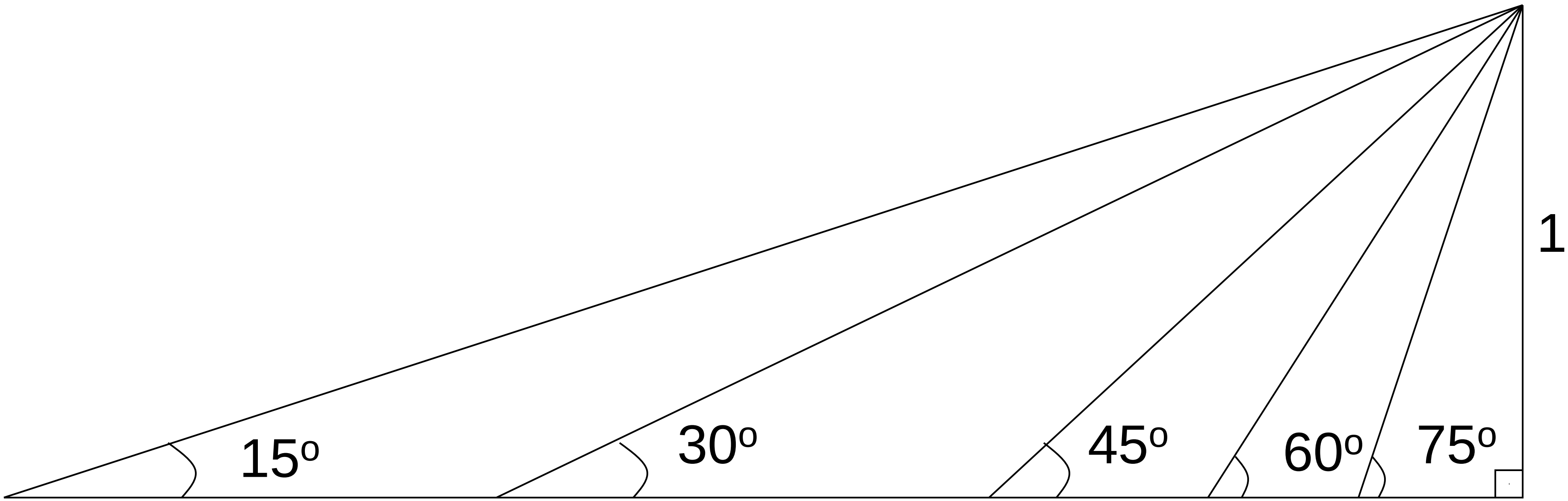
O princípio do relógio de sol supõe uma divisão da inclinação da sombra em intervalos de 15º



CC’ é uma linha paralela ao eixo de rotação da Terra

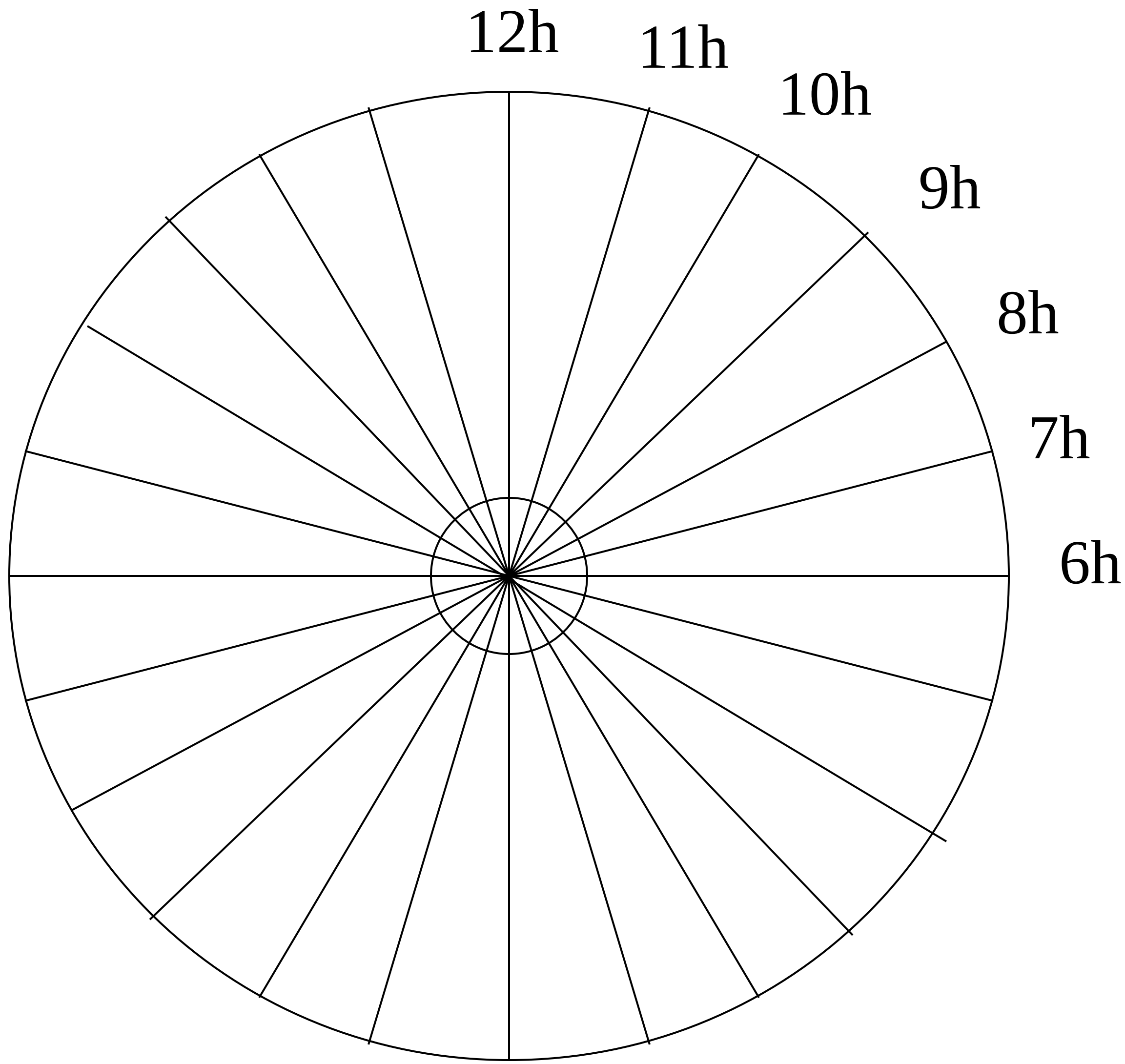
O ângulo entre os planos CNC’, CMC’, CLC’ etc é de 360º/24, isto é, 15º

Triângulos retângulos com ângulos notáveis
(“triângulos das horas”)

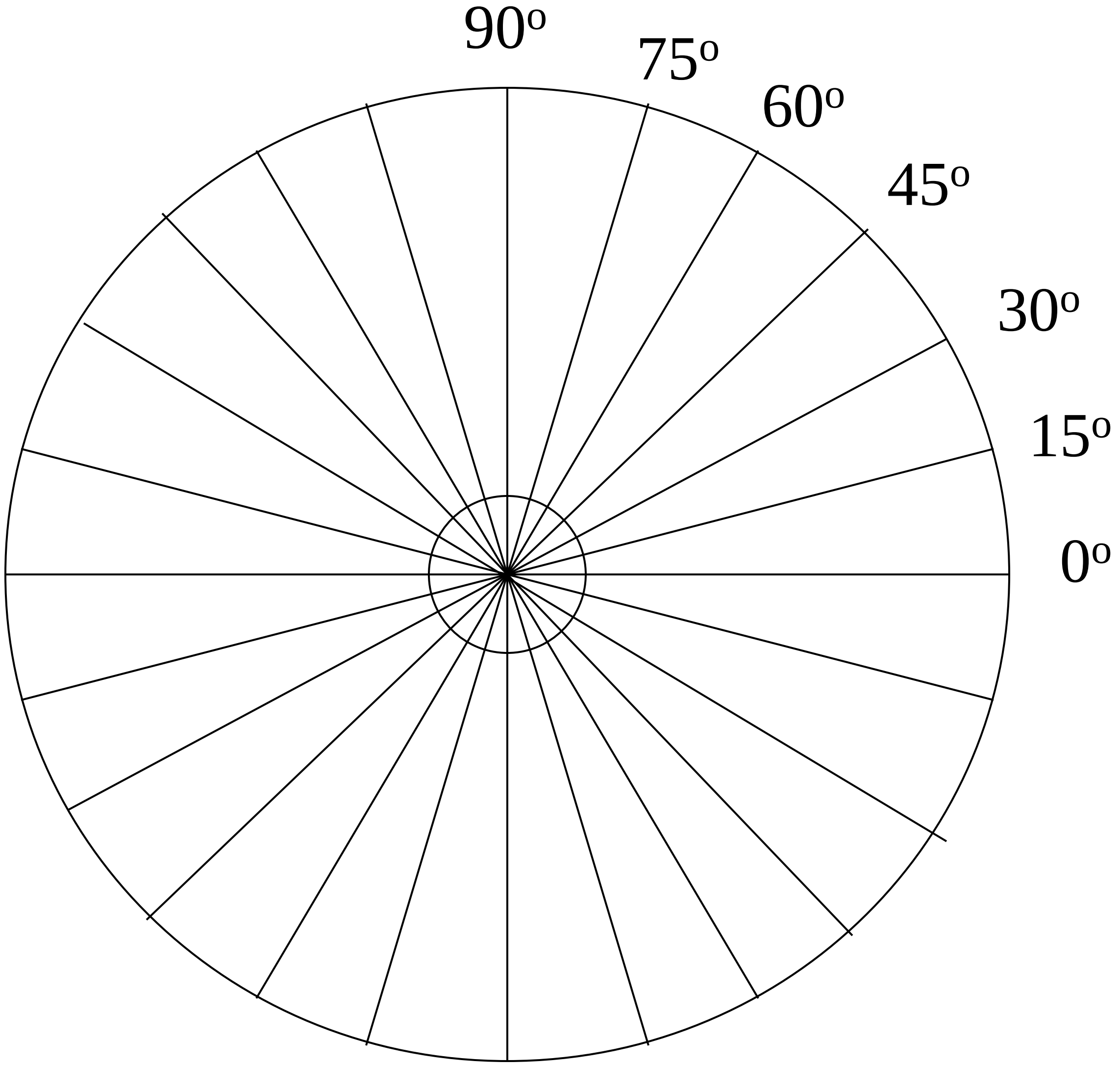


Vamos calcular a relação entre os lados desses triângulos?

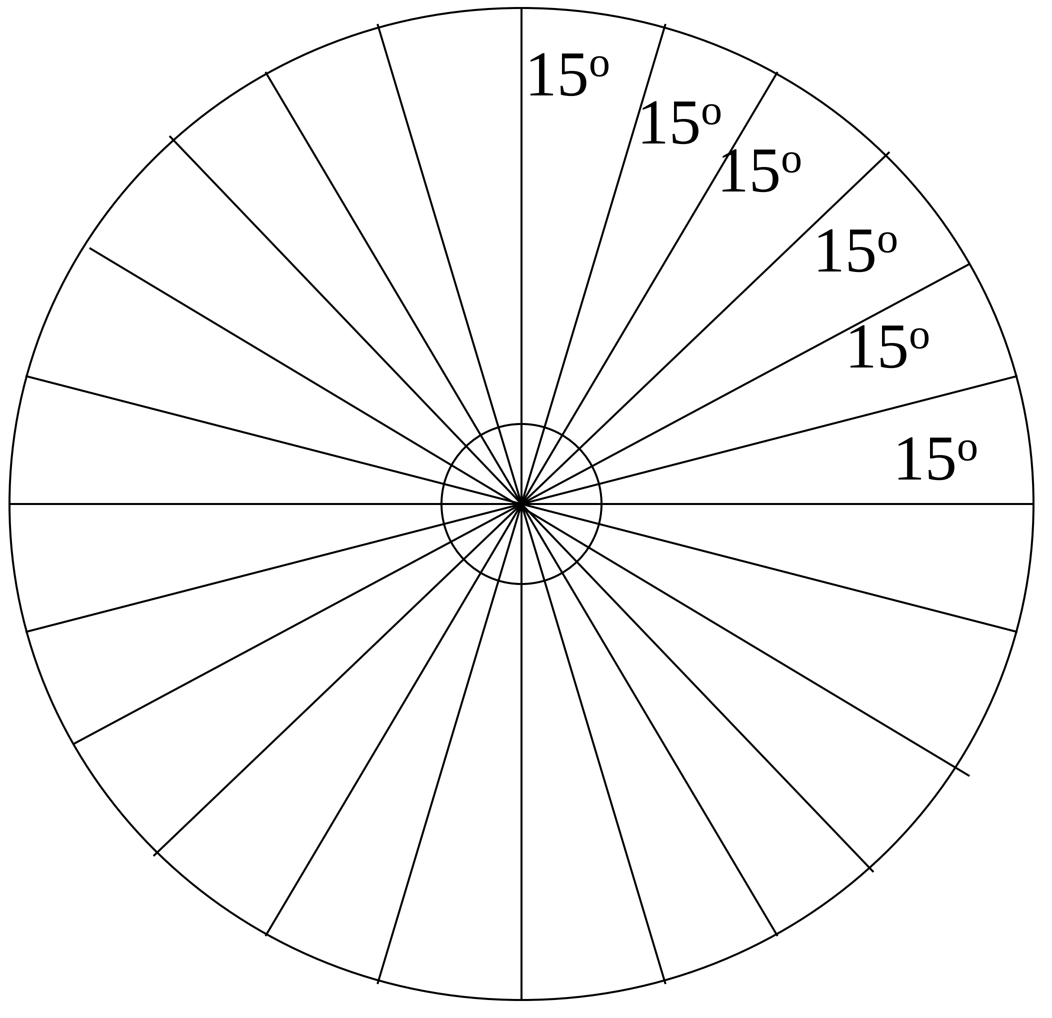
Cada ângulo notável pode ser associado a uma hora do dia



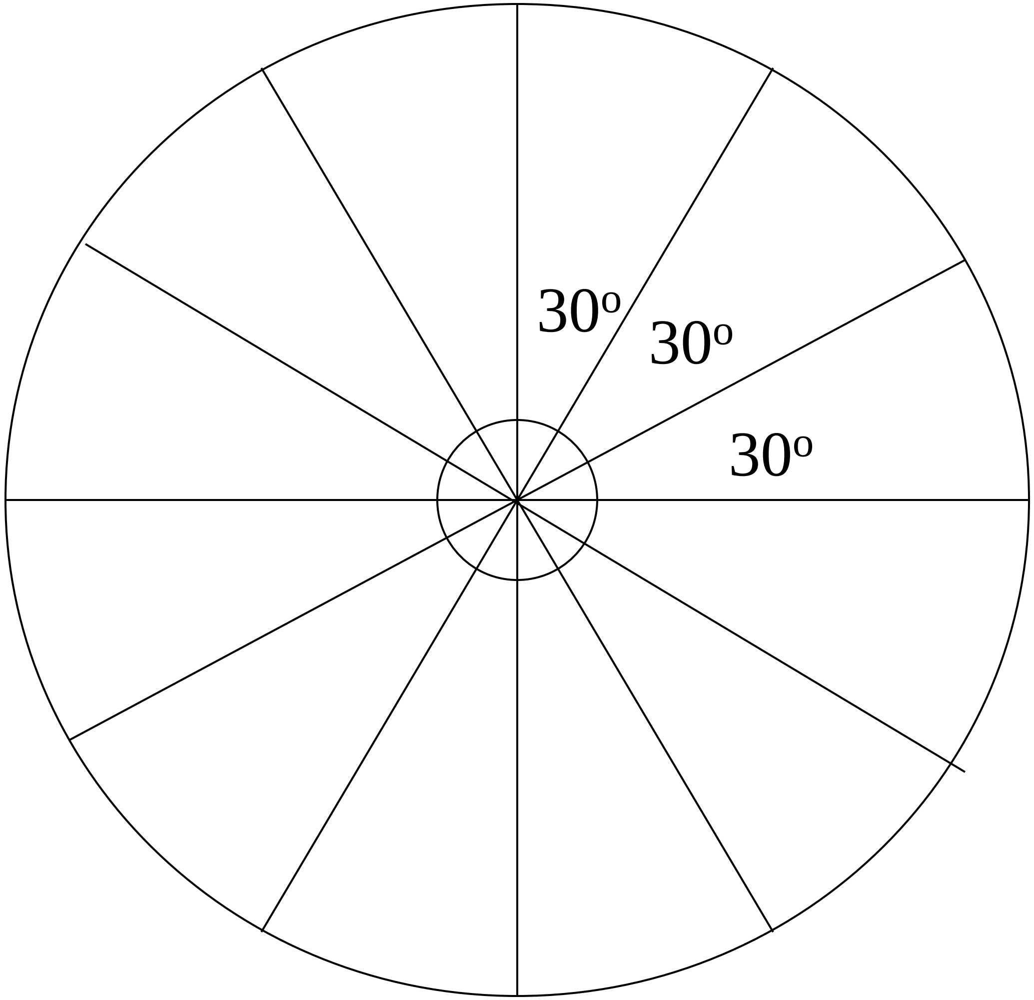
As divisões em 15º assinalam os valores notáveis de ângulos



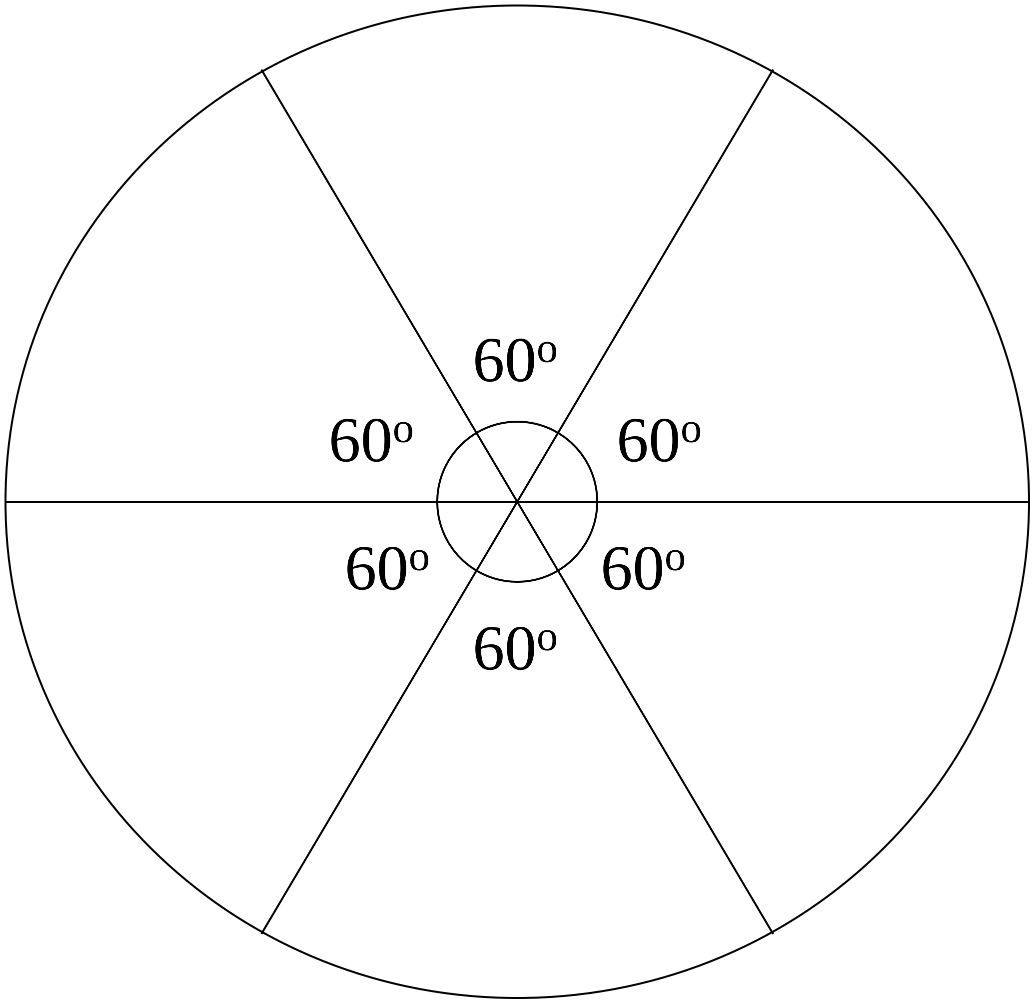
Dividido em 24 partes, cada uma com 15º, pode representar as horas do dia



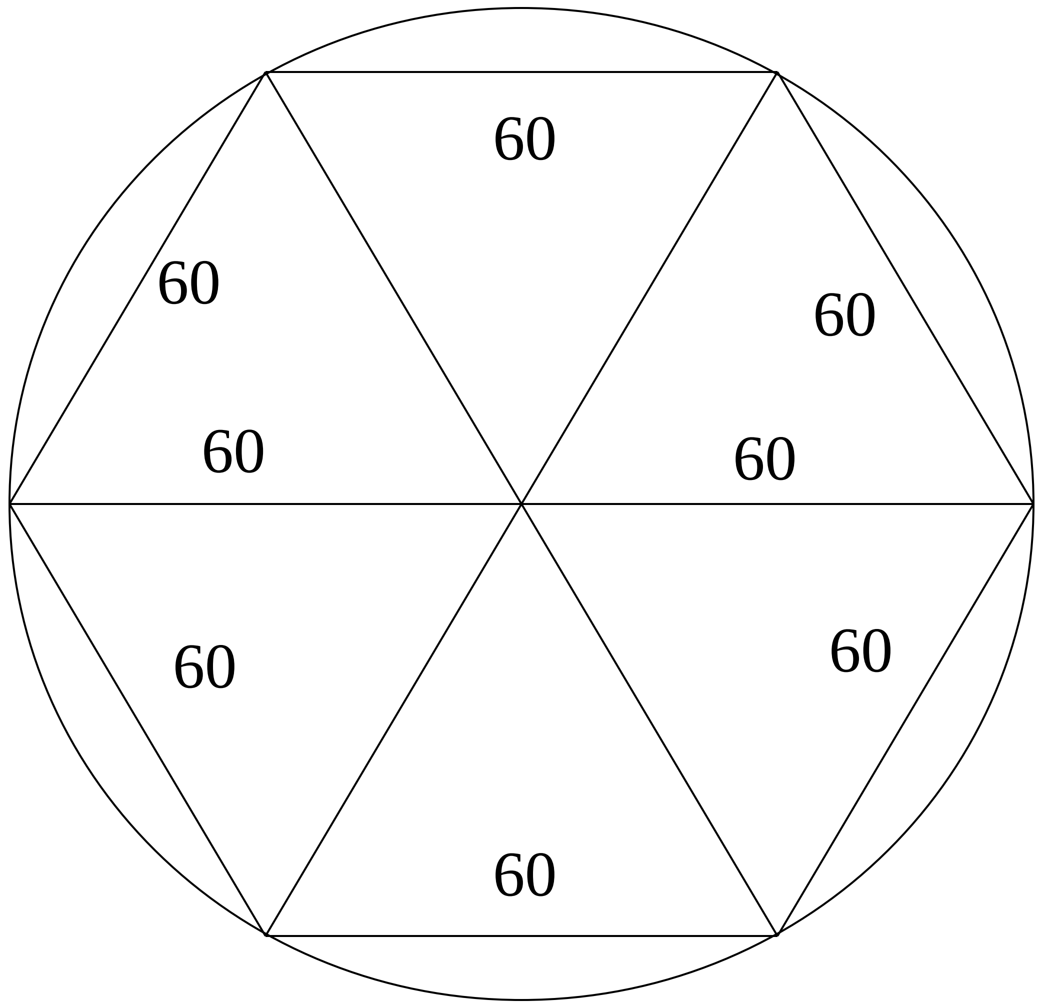
Os 360º possuem diversas divisões interessantes



O círculo trigonométricos foi dividido em 360 partes (graus) seguindo a notação sexagesimal babilônia



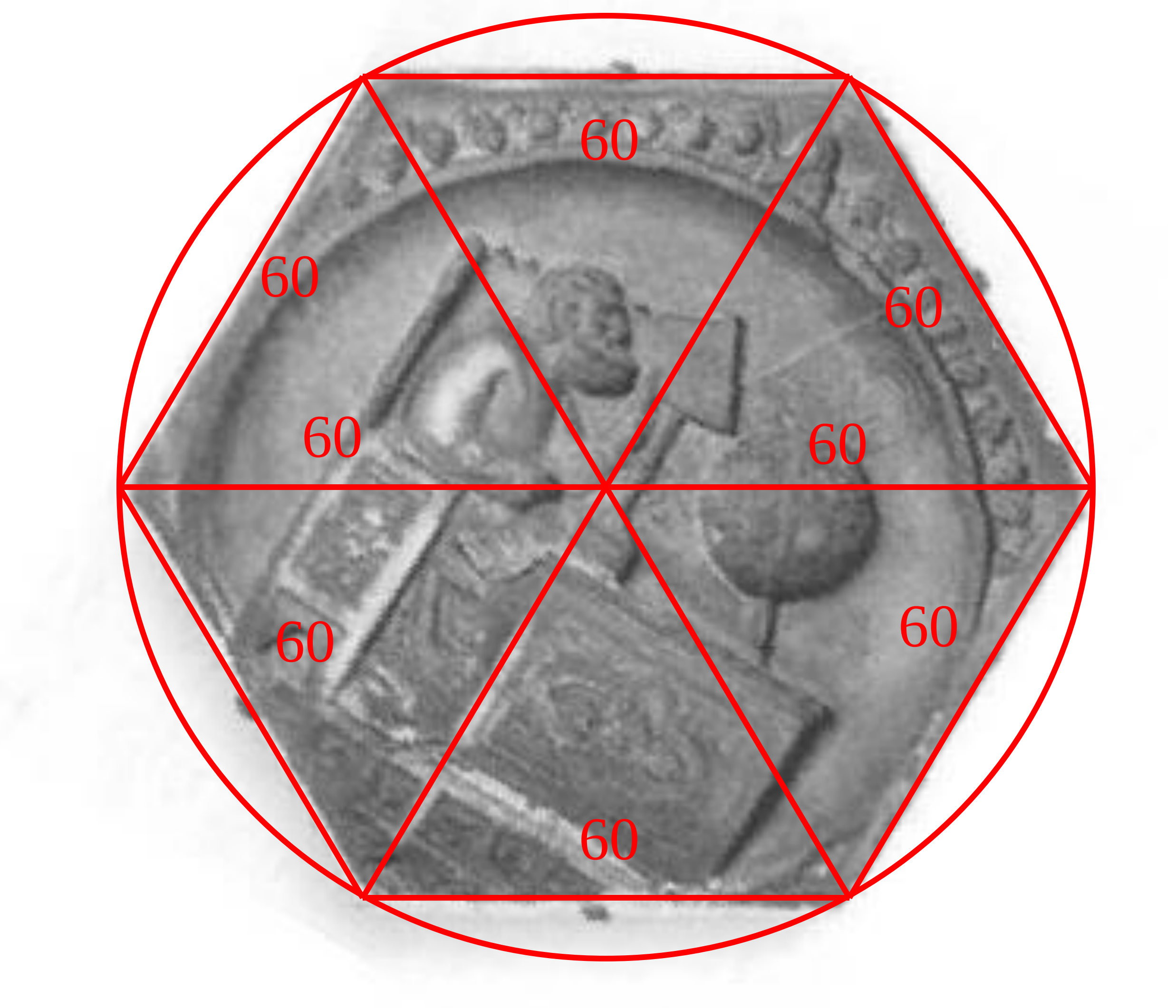
Círculo trigonométrico grego, com raio constante (60, base das frações sexagesimais)



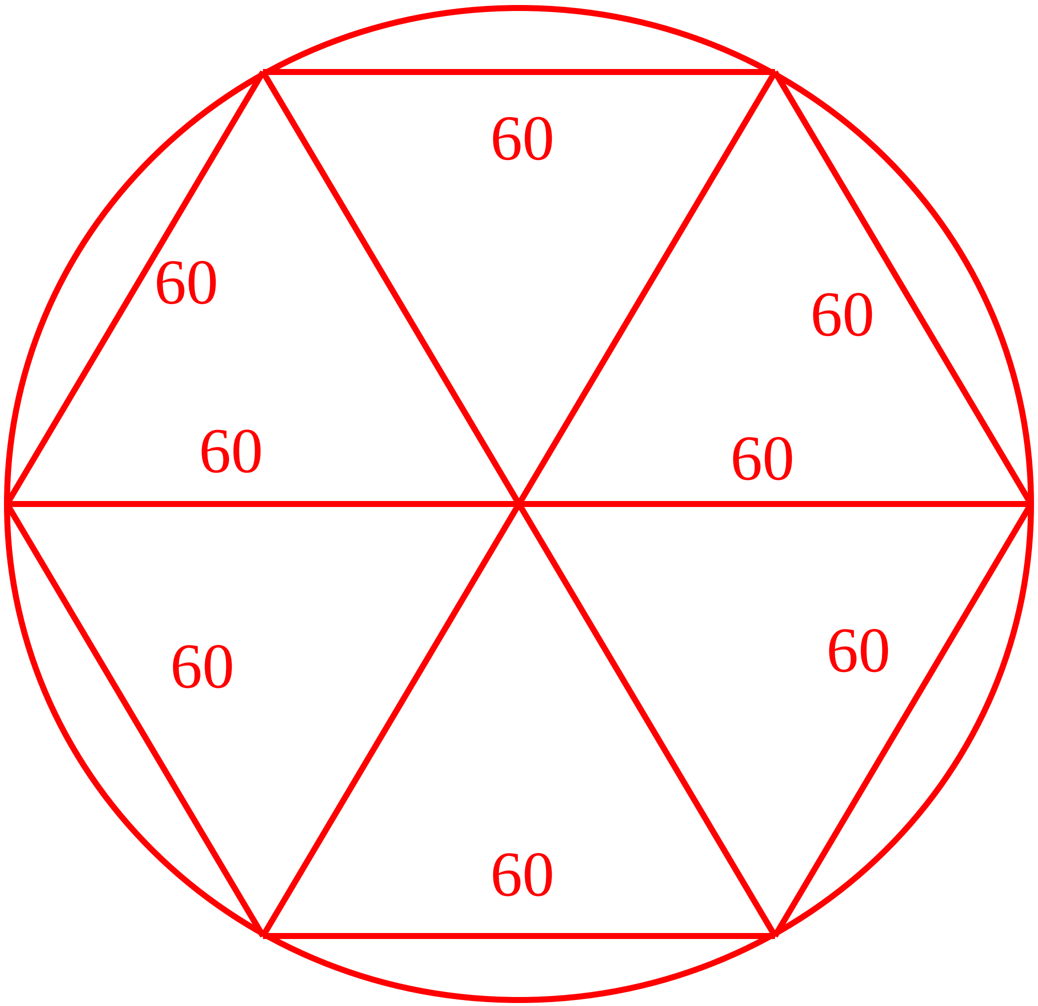
Ptolomeu de Alexandria (c. 85 - 165)

Círculo trigonométrico, tábua de senos

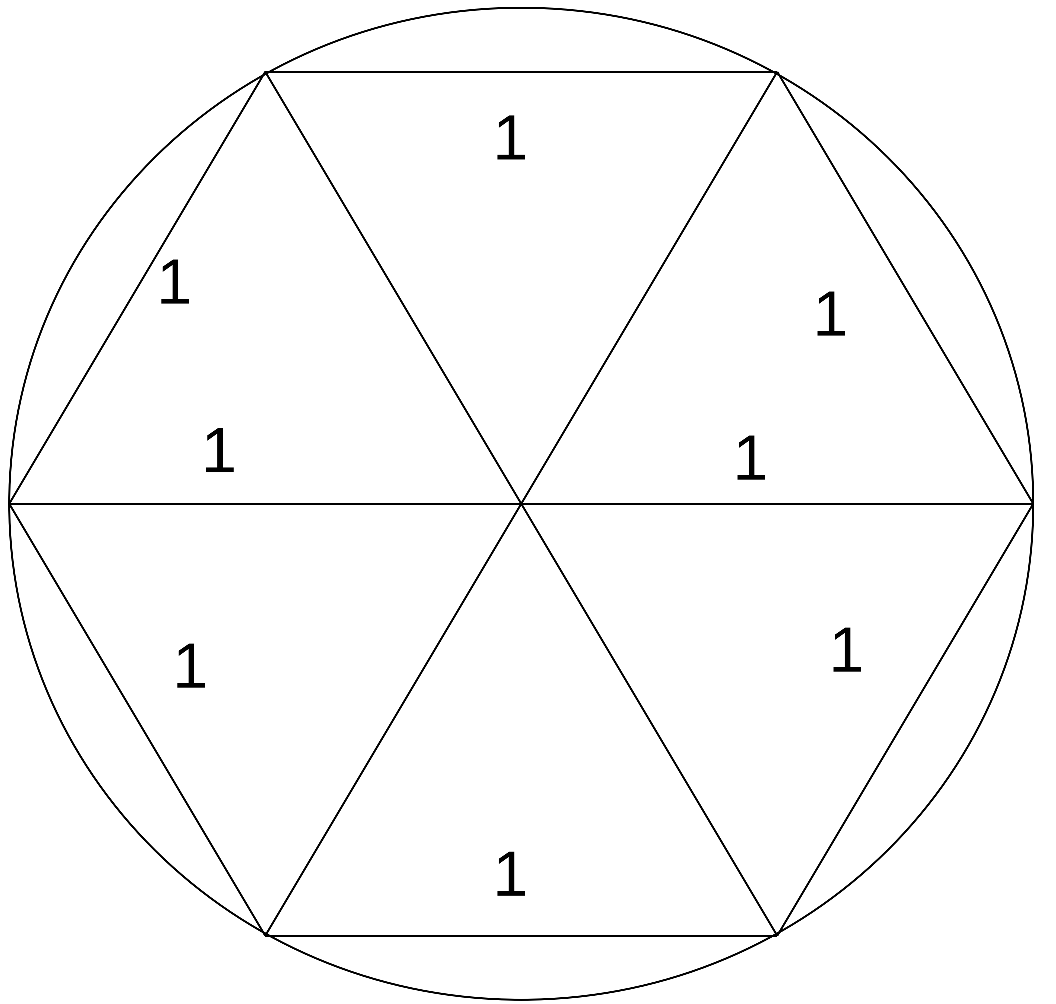
Círculo trigonométrico de Ptolomeu, com raio constante (60, base das frações sexagesimais)



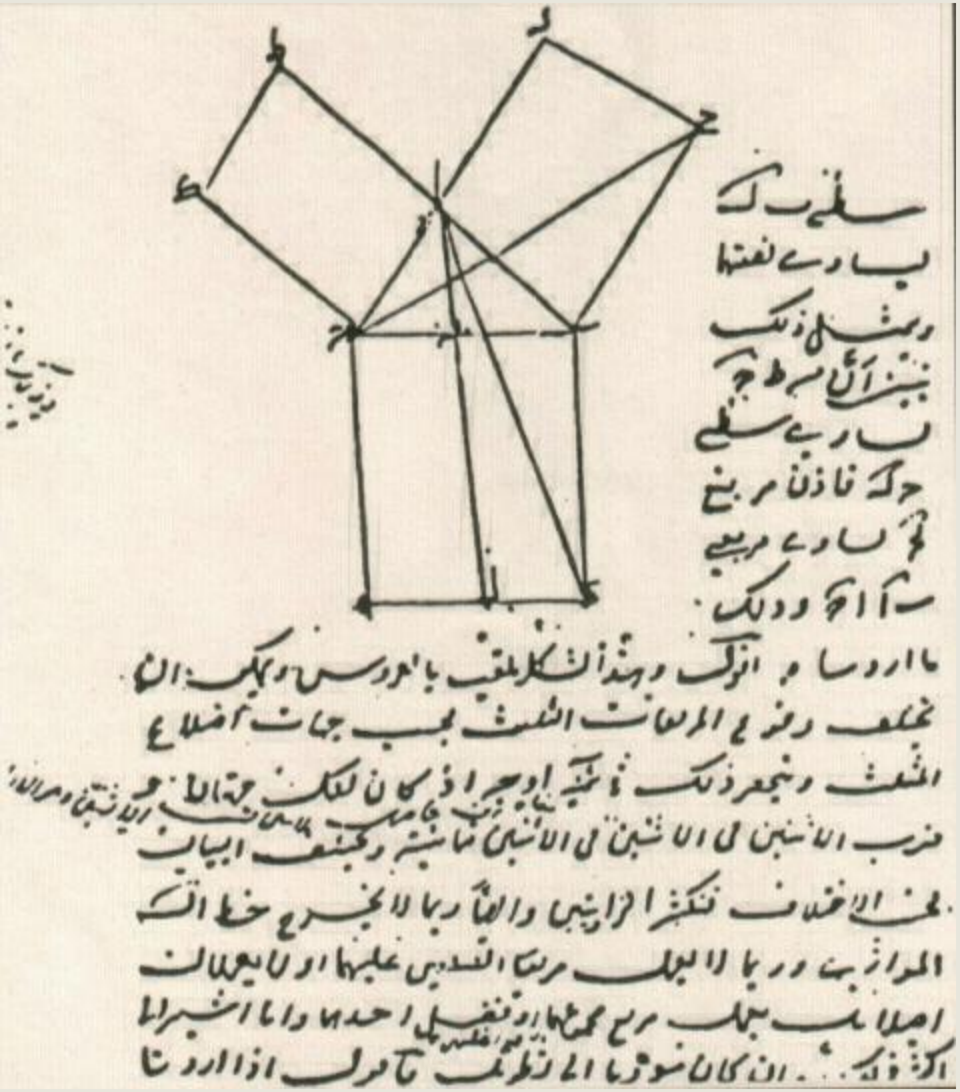
Círculo trigonométrico de Ptolomeu, com raio constante (60, base das frações sexagesimais)



O círculo trigonométrico posteriormente passou a ter raio unitário

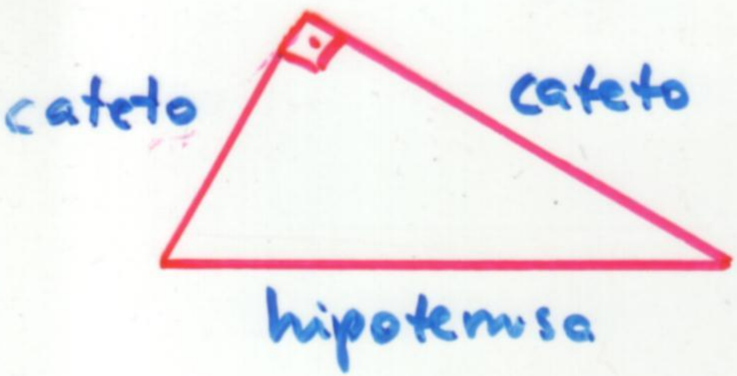


Os gregos inauguraram o método da prova imaterial, a demonstração matemática



Teorema de Pitágoras em *Os Elementos* de Euclides (manuscrito árabe)

Foram os gregos que generalizaram o conhecimento egípcio



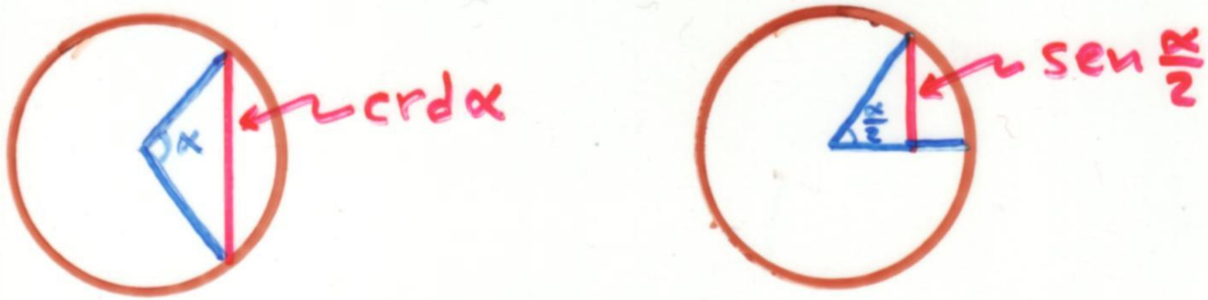
CATHETÓS → Retas Perpendicular
(daí "catetômetro")

HYPO + TENEIN → "esticar" + "sob"
(debaixo do ângulo reto)

HYPÓ → debaixo, sob
- hipotensão
- hipoglicemia
- hipodérmica

HÍPPOS → cavalo
- hipódromo
- hipopótamo
- hipismo

Origem da palavra seno, do “Almagesto” (O Maior): nome dado pelos árabes à obra de Ptolomeu sobre astronomia matemática



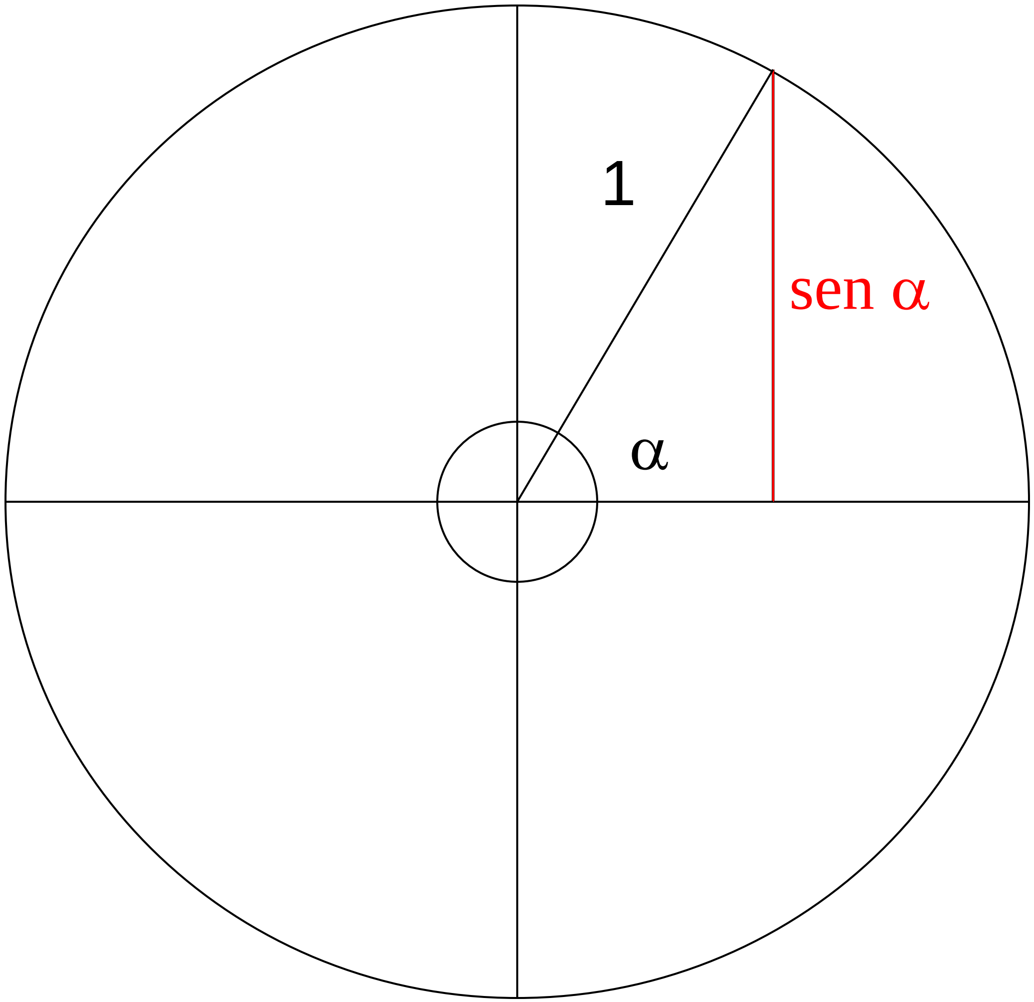
Seno ⇒ Meia-corda

Sânscrito → JIVA (meia-corda)
Árabe → JAIB (baia, enseada)

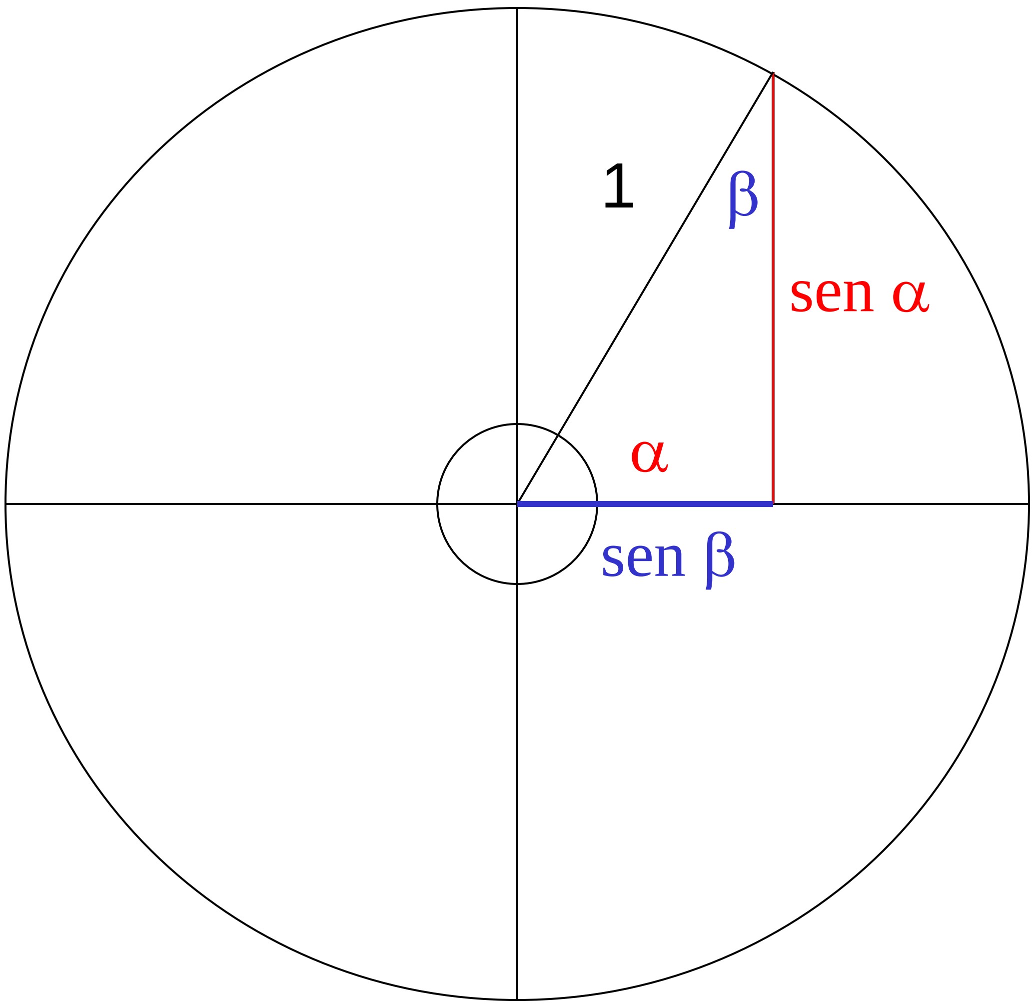
Os tradutores latinos (Gerardo de Cremona, 1150), traduziram do árabe diretamente.

Em latim, baia, enseada é SINUS
(daí sinuoso, sinuosidade, sino, e <u>SENO</u>)

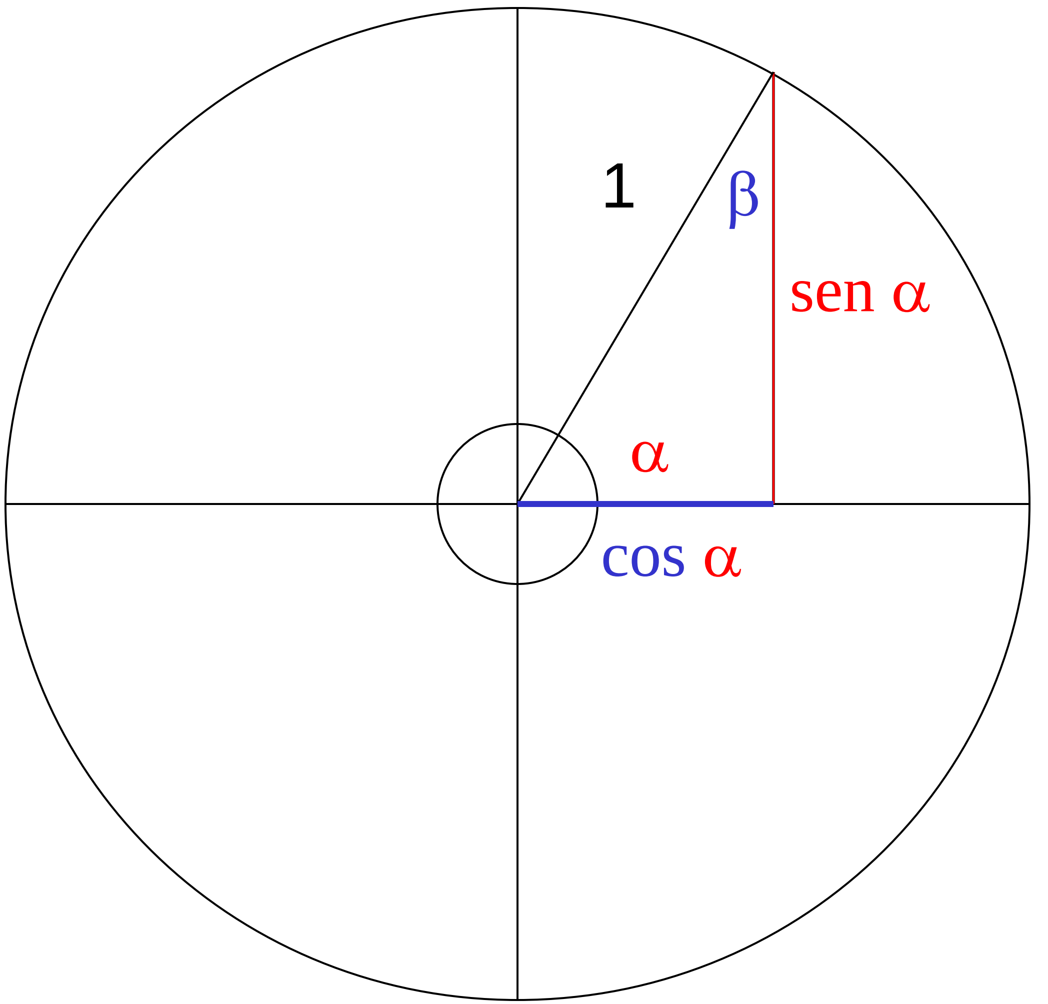
Para os gregos não haviam *razões* trigonométricas, mas *linhas* trigonométricas



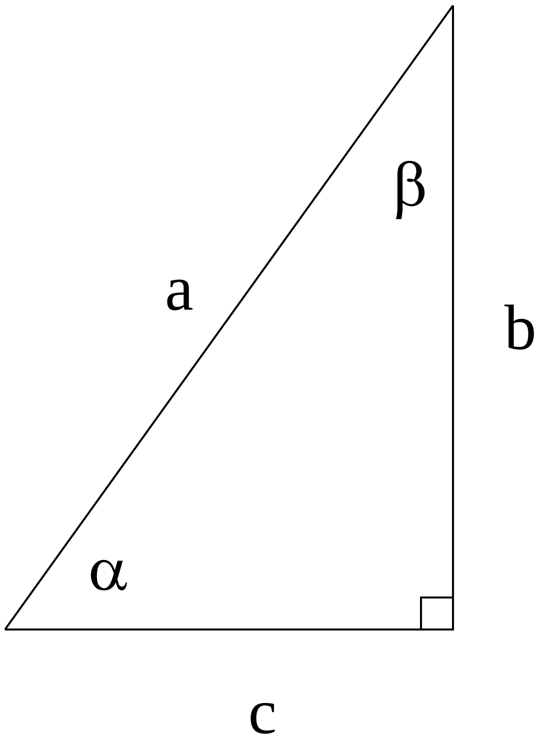
Havia apenas o seno, o cosseno era apenas o seno do ângulo complementar (não tinha nome próprio)

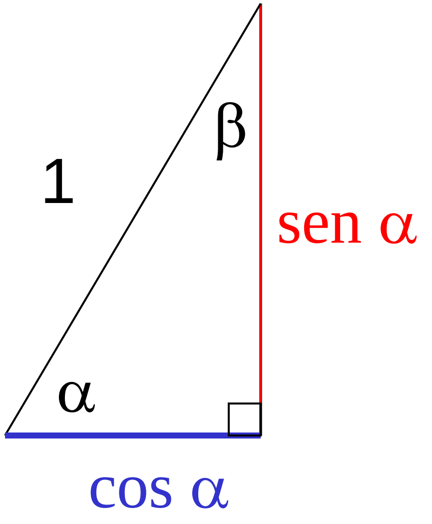


A palavra cosseno vem de *complementi sinus* (seno do ângulo complementar)



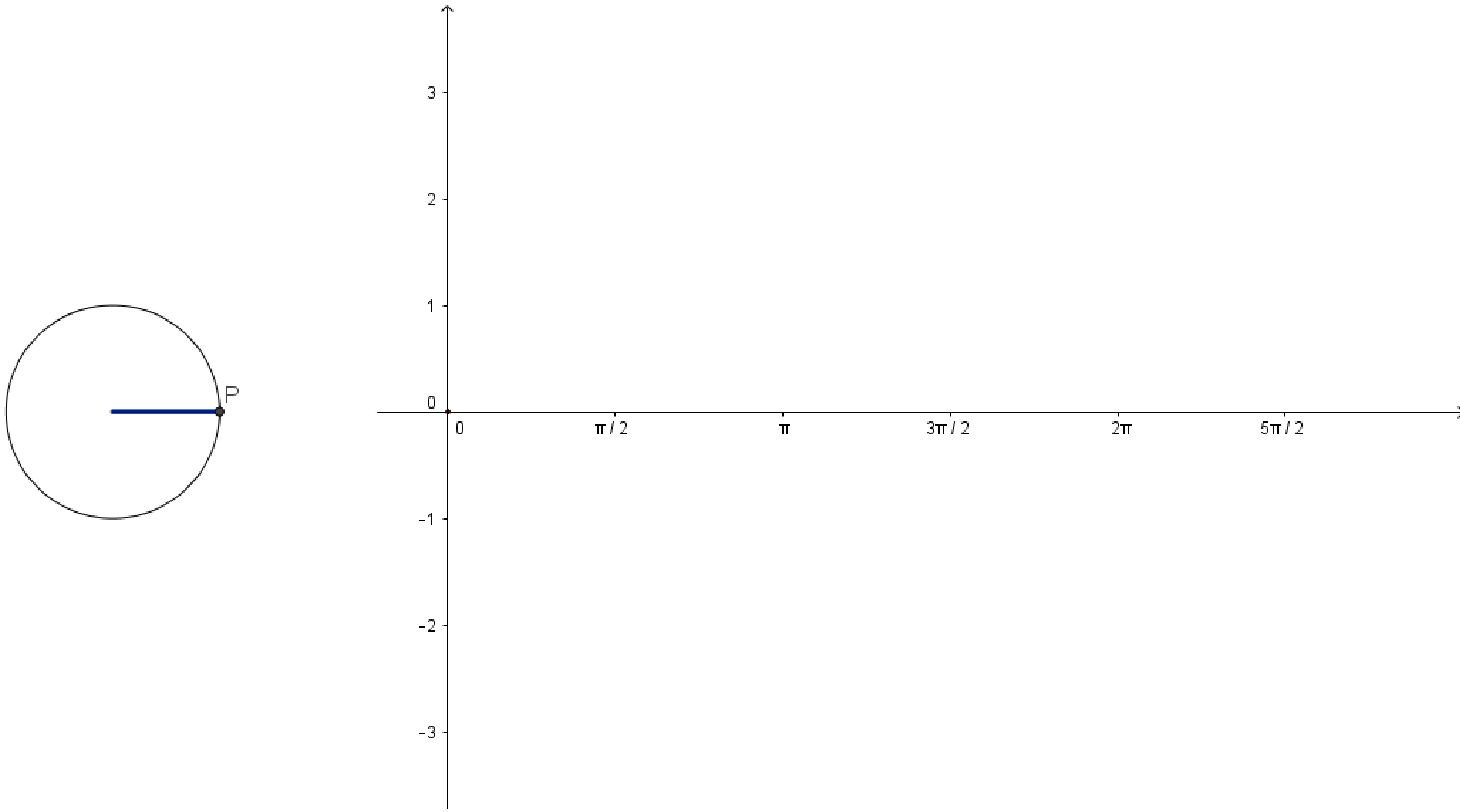
Seno e cosseno não eram razões entre lados, mas comprimentos de segmentos de reta, aplicáveis aos demais triângulos por semelhança

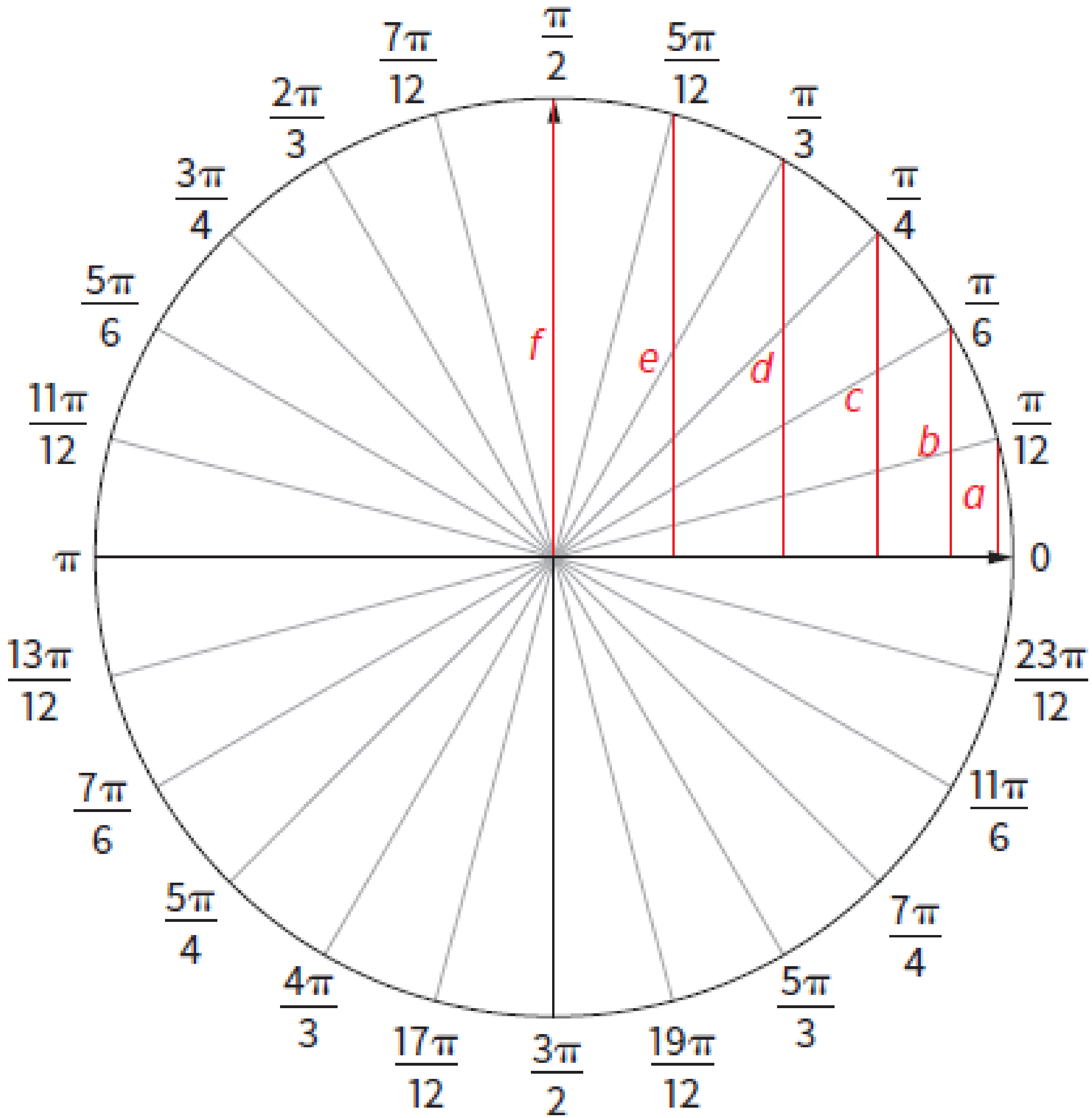




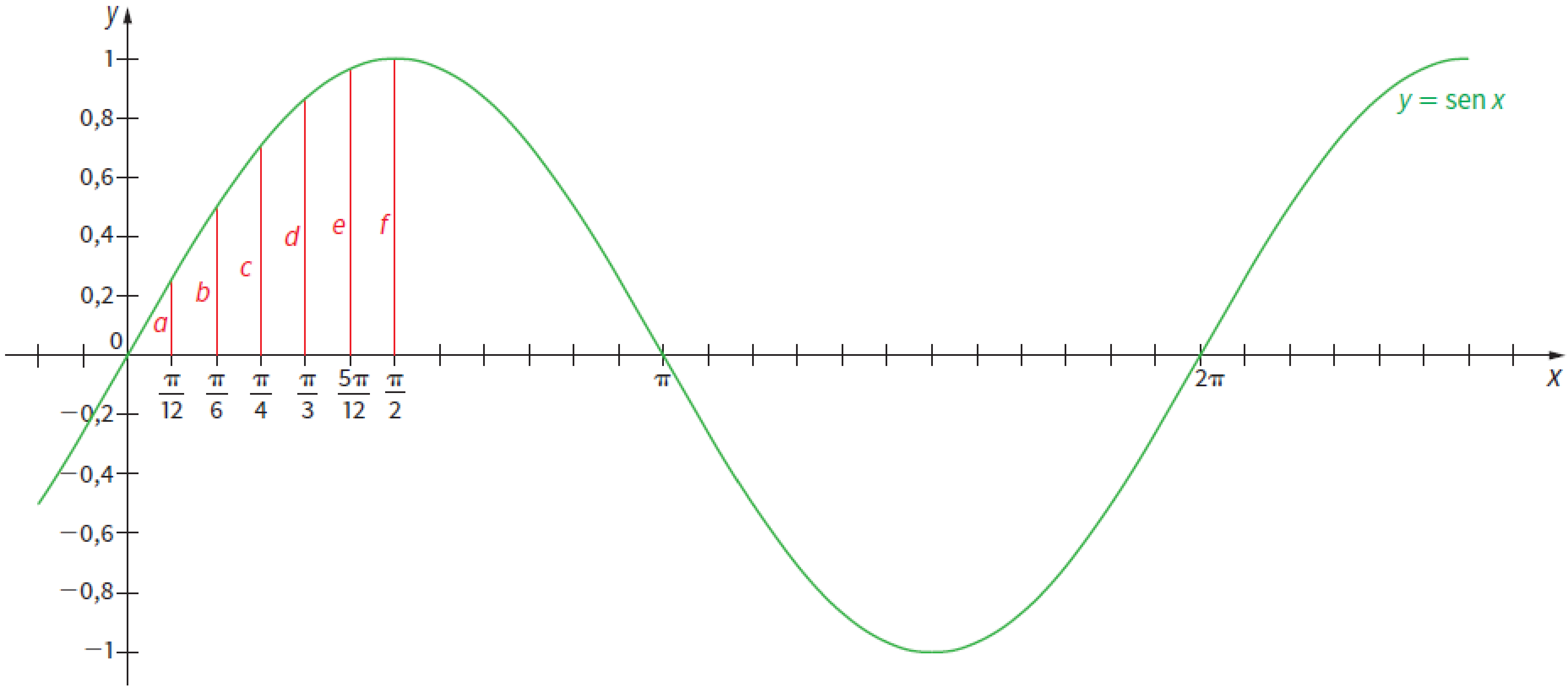
$\text{sen}\ \alpha = b/a$

$\cos \alpha = c/a$

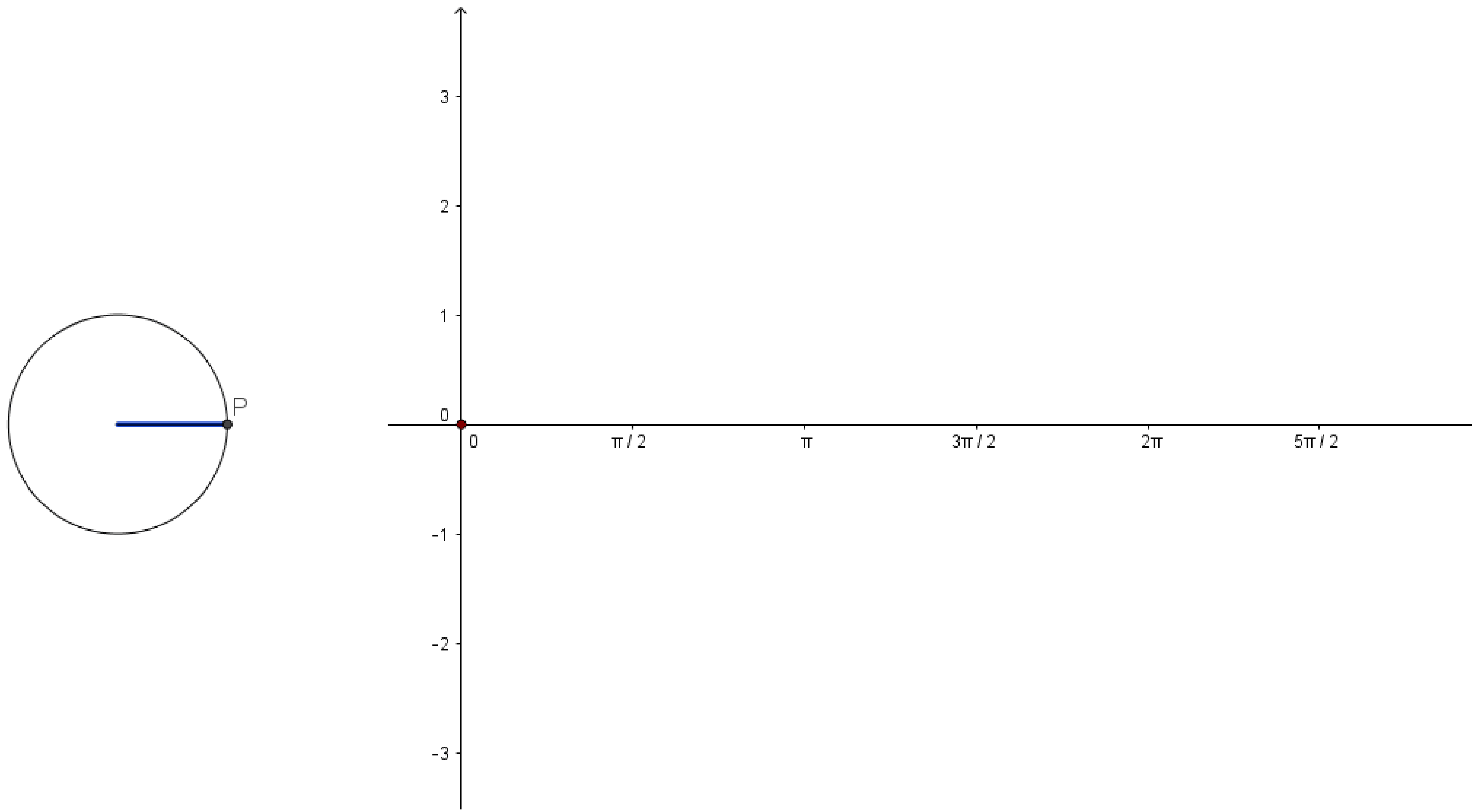

P
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2



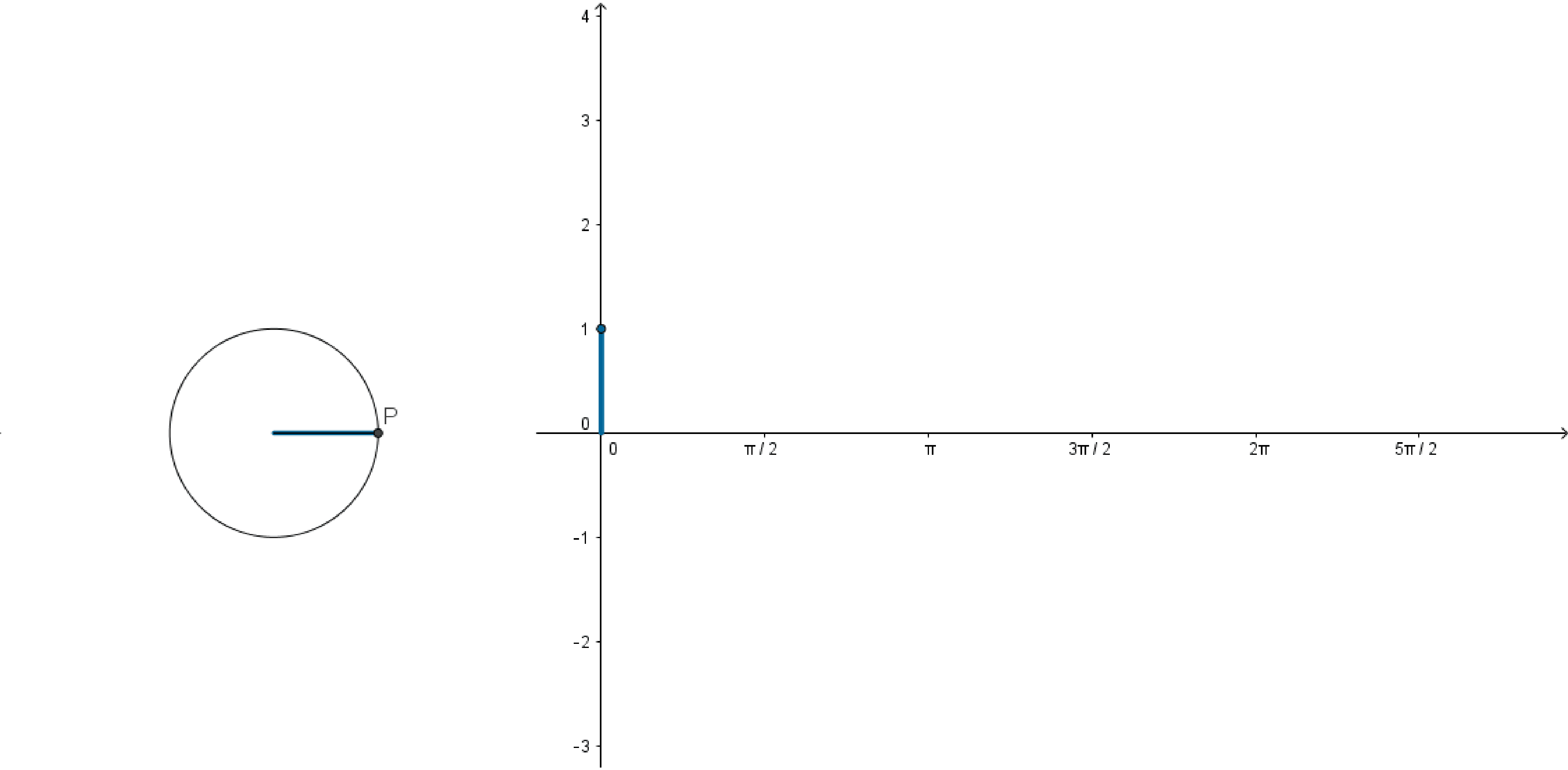
π/2
5π/12
π/3
π/4
π/6
π/12
0
7π/12
2π/3
3π/4
5π/6
11π/12
π
13π/12
7π/6
5π/4
4π/3
17π/12
3π/2
19π/12
5π/3
7π/4
11π/6
23π/12
a
b
c
d
e
f

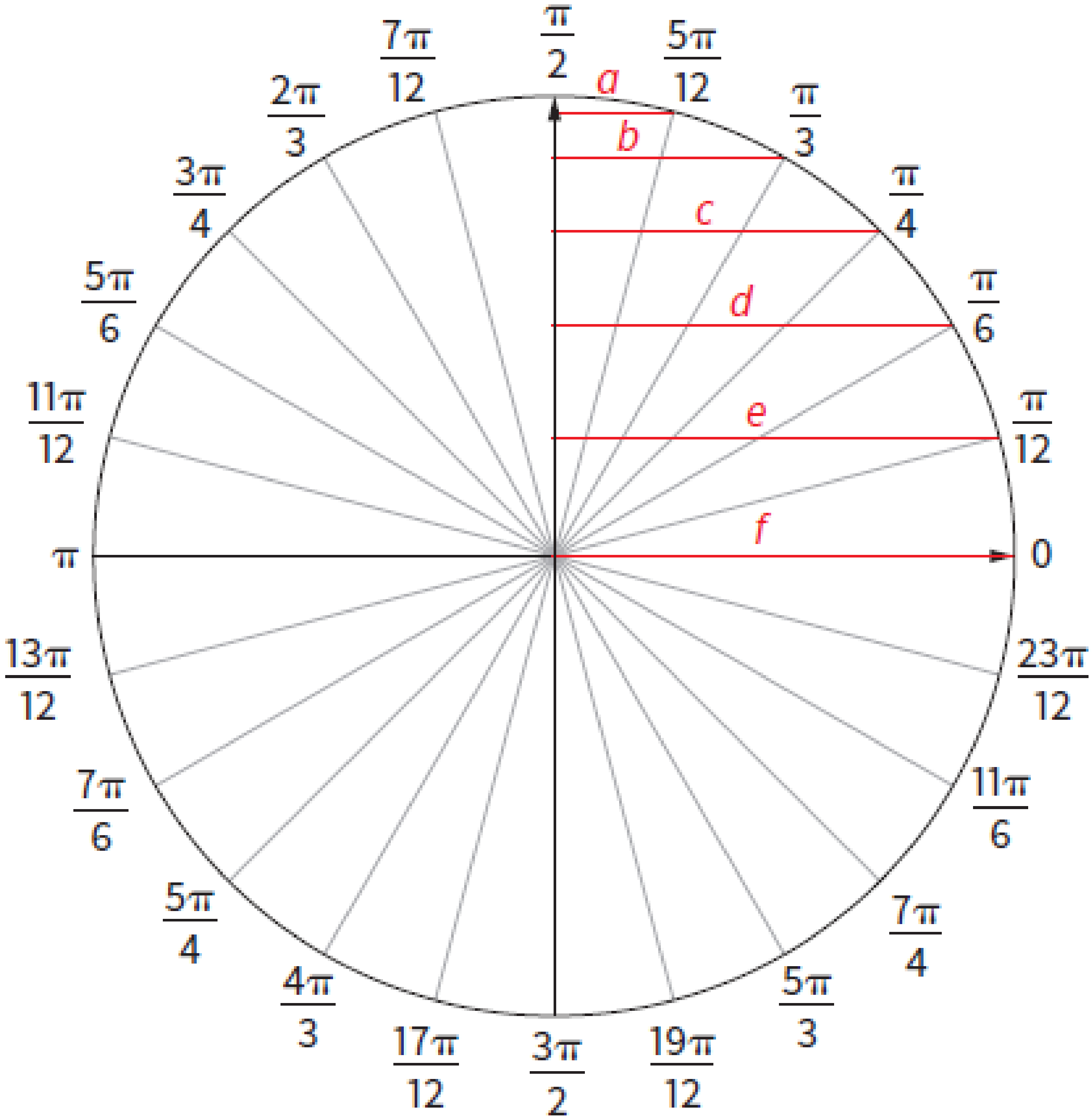


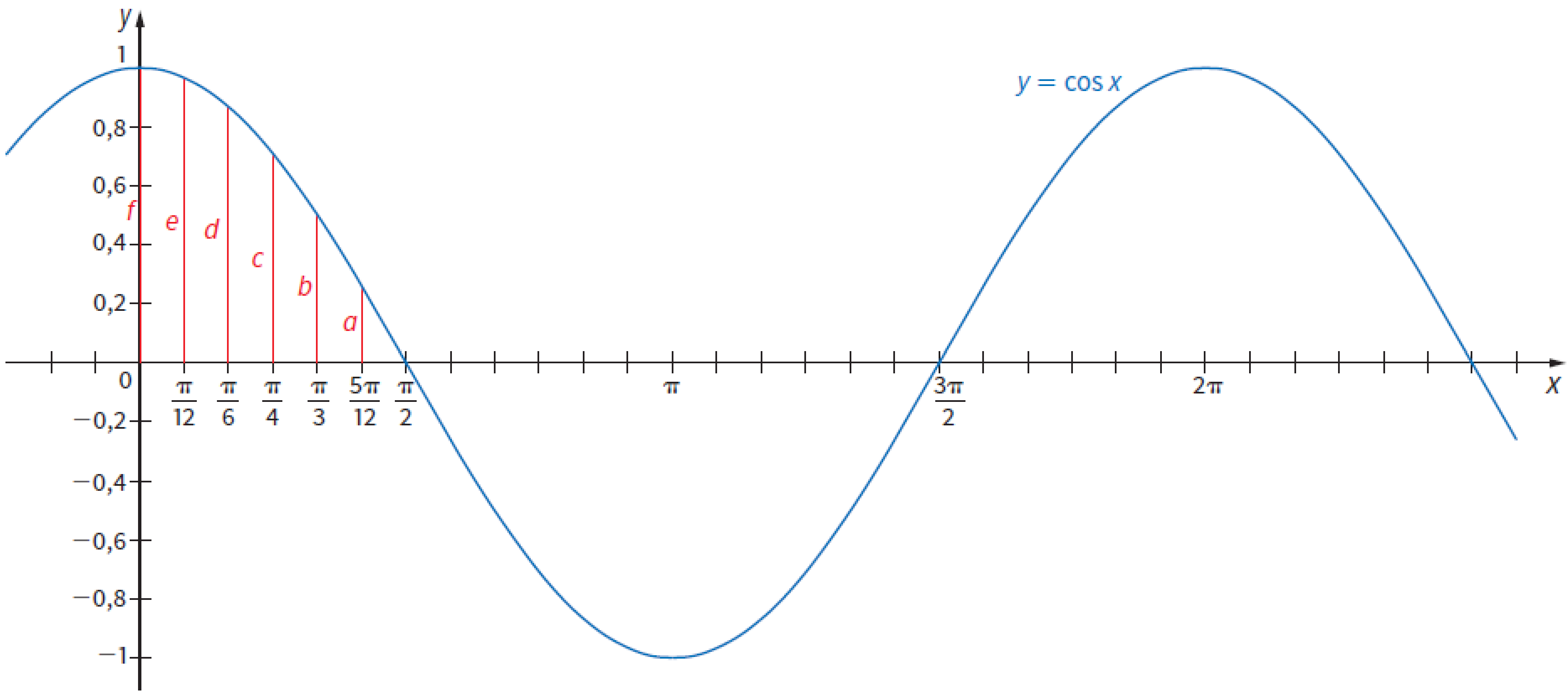
y
x
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1
a
b
c
d
e
f
π/12
π/6
π/4
π/3
5π/12
π/2
π
2π
y = sen x



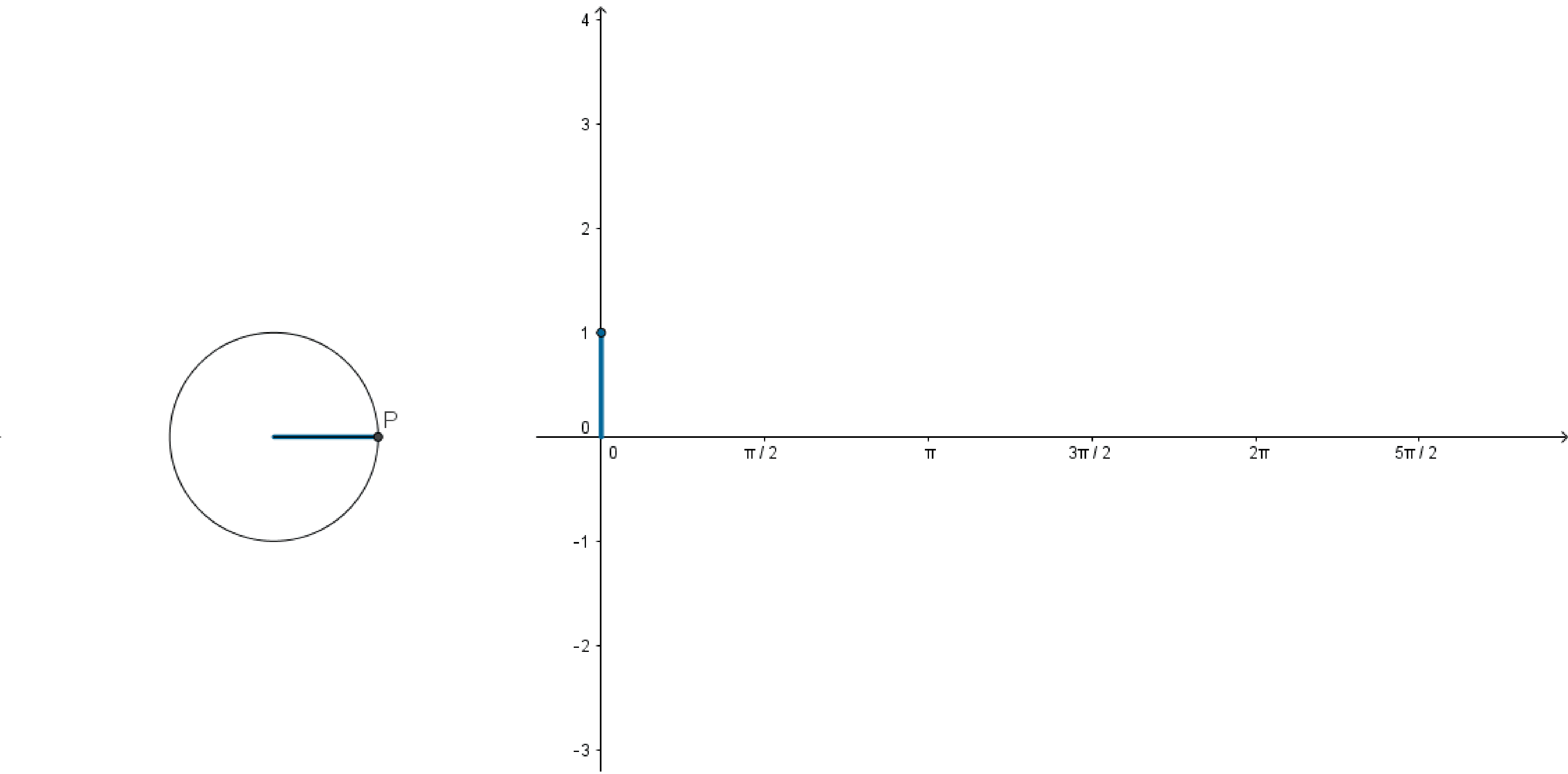
P
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2


P
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{12}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{12}$
0
$\frac{23\pi}{12}$
$\frac{11\pi}{6}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{19\pi}{12}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{17\pi}{12}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{13\pi}{12}$
π
$\frac{11\pi}{12}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{7\pi}{12}$
a
b
c
d
e
f

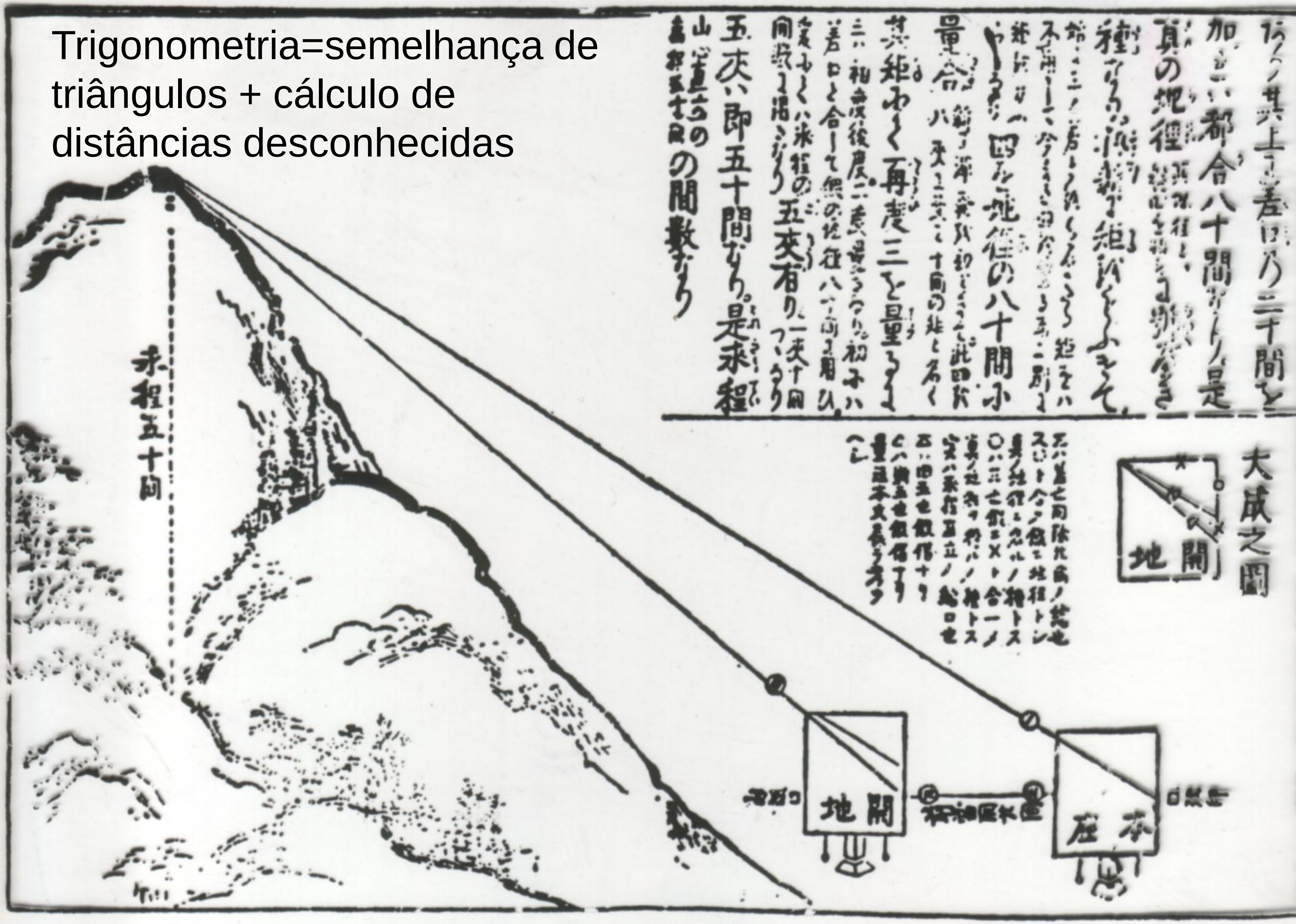


y
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1
f
e
d
c
b
a
$\frac{\pi}{12}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{12}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x
y = cos x



P
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2

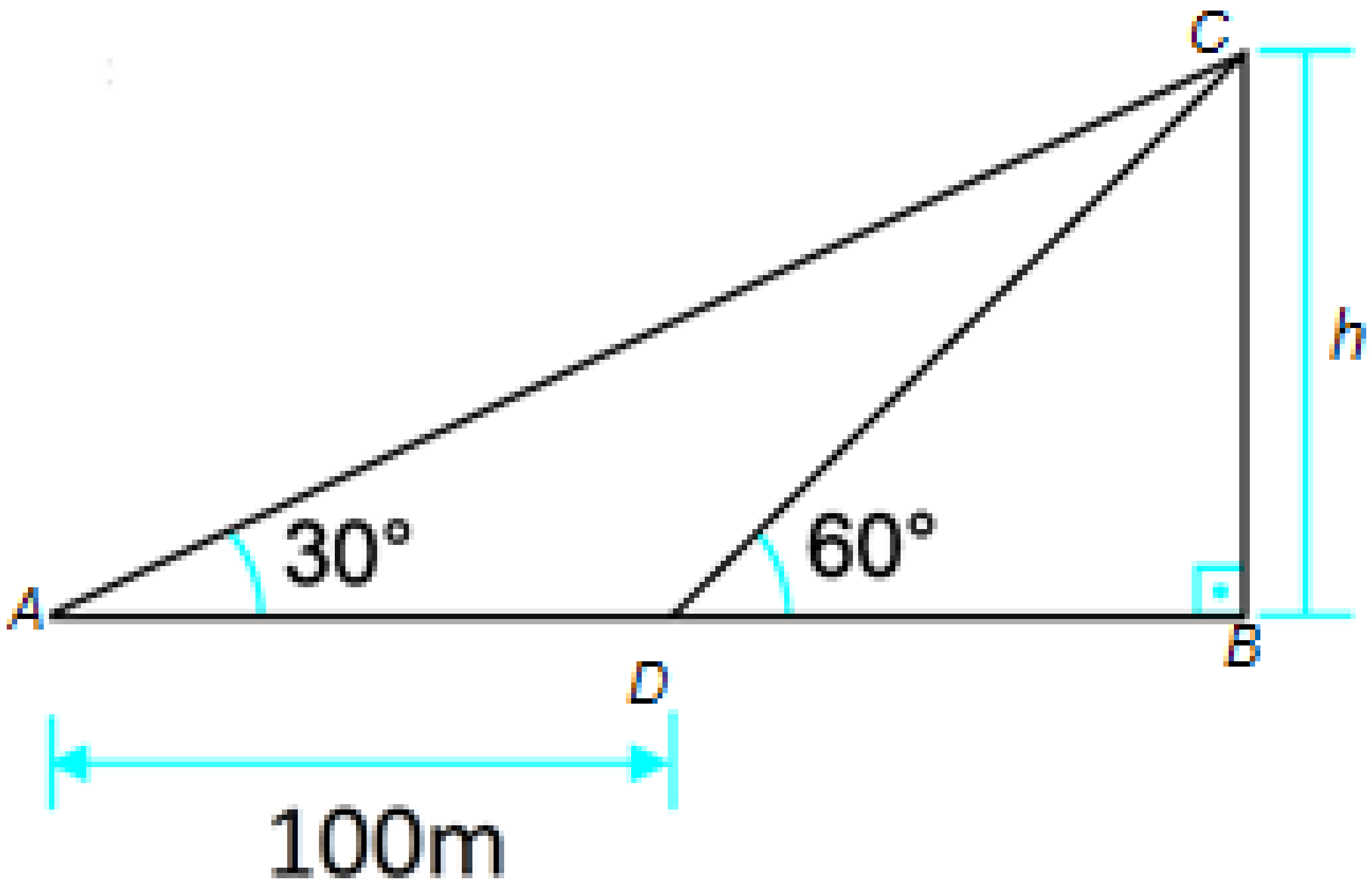
Trigonometria=semelhança de triângulos + cálculo de distâncias desconhecidas



JAPANESE TRIGONOMETRY OF C. 1700

Trigonometria oriental mostrando o cálculo da altura de uma montanha

Descubra o valor de *h*.



Mobilização:

atividade criativa

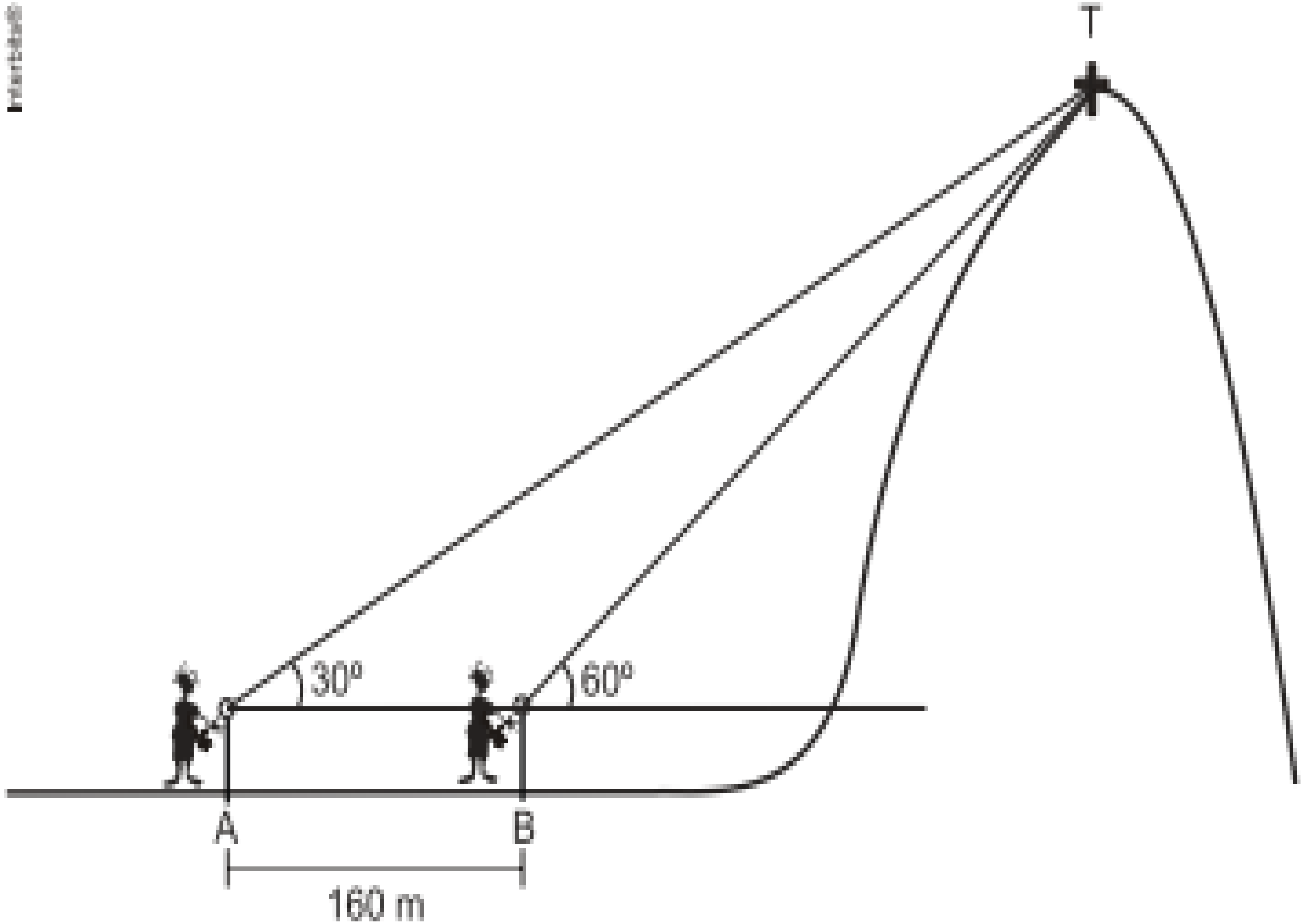
resolução de problemas

conteúdos matemáticos.

A metodologia de resolução de problemas permitiria trabalhar

"[...] a Matemática sob o ponto de vista de seu desenvolvimento, inter-relacionando os conteúdos, valorizando os conhecimentos prévios dos estudantes, fazendo conexões com conceitos já apreendidos e/ou com experiências já vivenciadas, a fim de promover uma aprendizagem mais significativa" (ONUCHIC e MORAIS, 2013, p. 690)

(UFSJ-MG-2012) O teodolito é um instrumento de medida de ângulos bastante útil na topografia. Com ele, é possível determinar distâncias que não poderiam ser medidas diretamente. Para calcular a altura de um morro em relação a uma região plana no seu entorno, o topógrafo pode utilizar esse instrumento adotando o seguinte procedimento: situa o teodolito no ponto A e, mirando o ponto T no topo do morro, mede o ângulo de 30° com a horizontal; desloca o teodolito 160 m em direção ao morro, colocando-o agora no ponto B, do qual, novamente mirando o ponto T, mede o ângulo de 60° com a horizontal.


T
30°
60°
A
B
160 m

Se a altura do teodolito é de 1,5 m, é correto afirmar que a altura do morro com relação à região plana à qual pertencem *A* e *B* é, em metros:

a) $80\sqrt{3} + 1,5$.

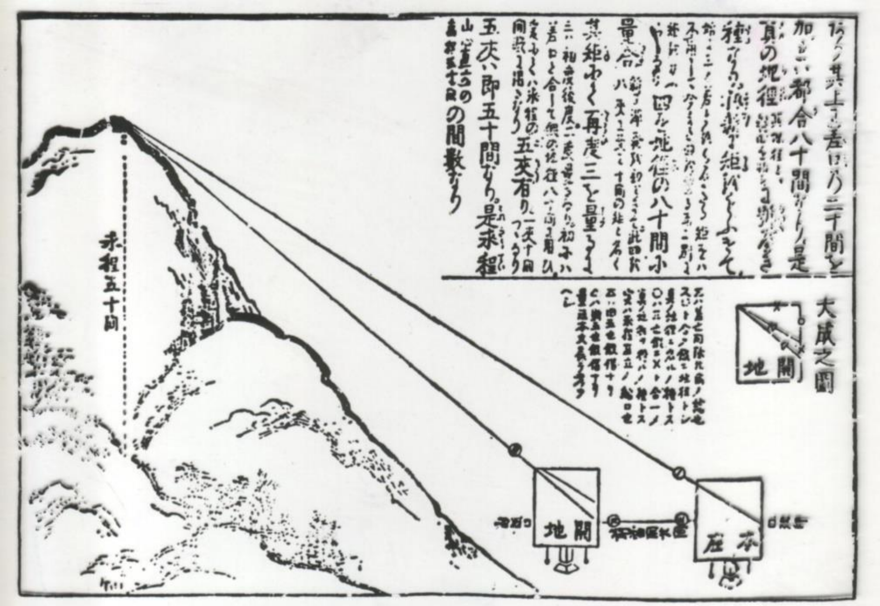
b) $80\sqrt{3} - 1,5$.

c) $\frac{160\sqrt{3}}{3} + 1,5$.

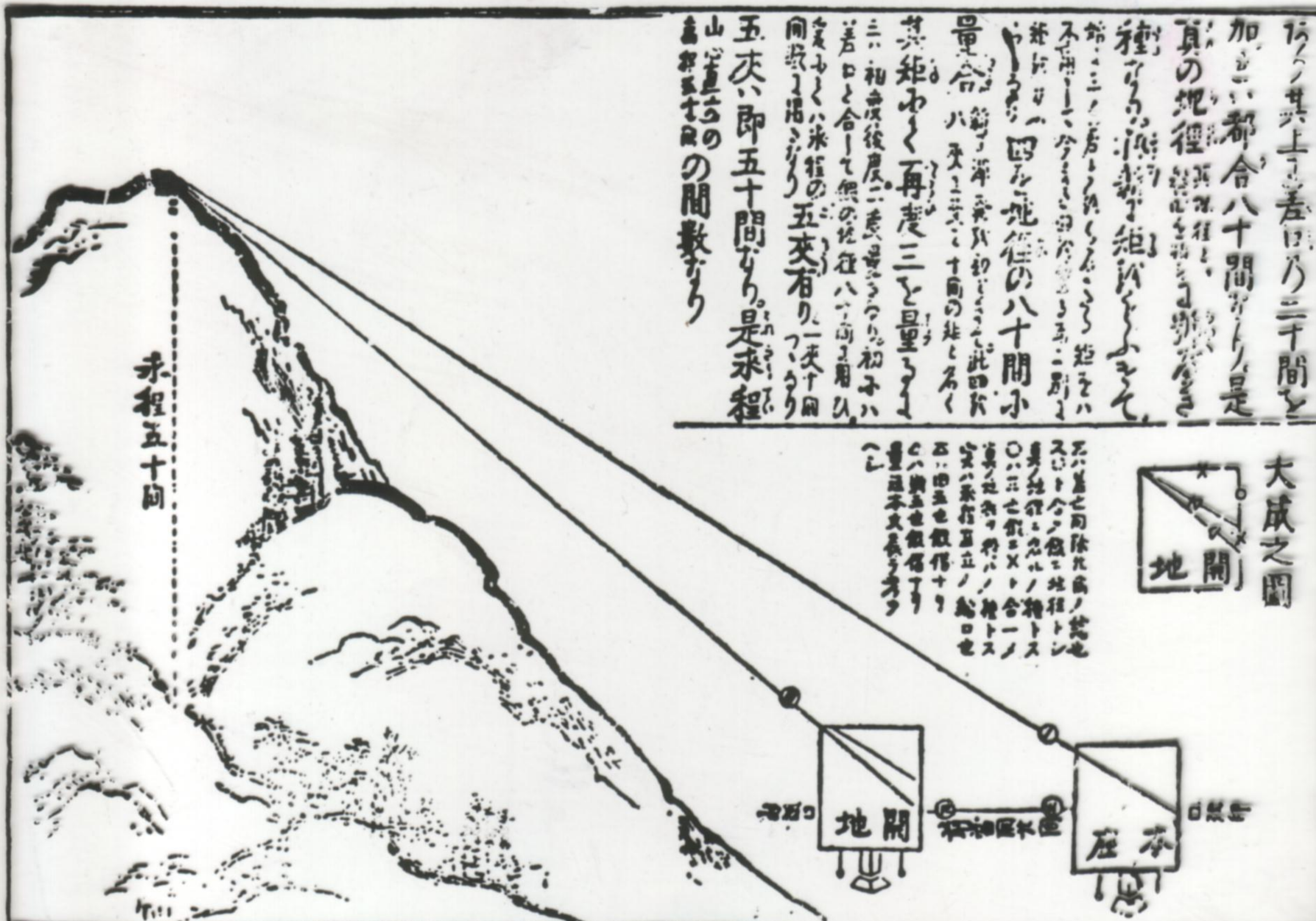
d) $\frac{160\sqrt{3}}{3} - 1,5$.

A metodologia de resolução de problemas:
trabalhar com a criatividade nas aulas de matemática.

A própria construção do conhecimento matemático se deu a partir da percepção e resolução de problemas.

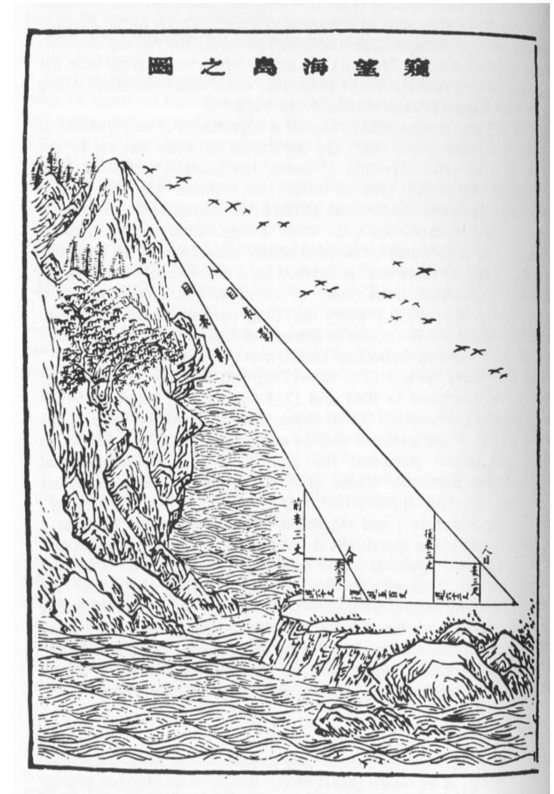


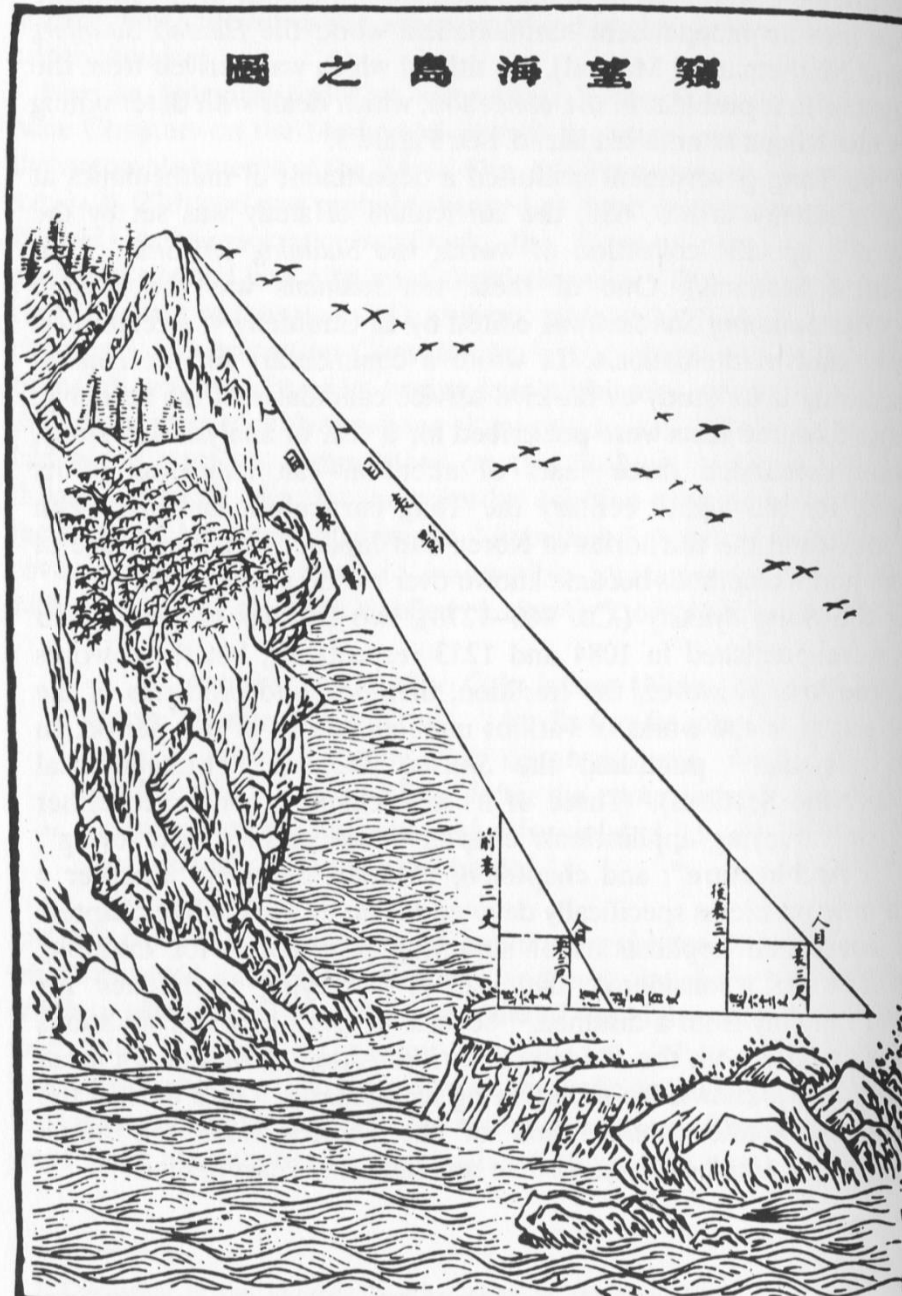
JAPANESE TRIGONOMETRY OF *C.* 1700



JAPANESE TRIGONOMETRY OF *C.* 1700

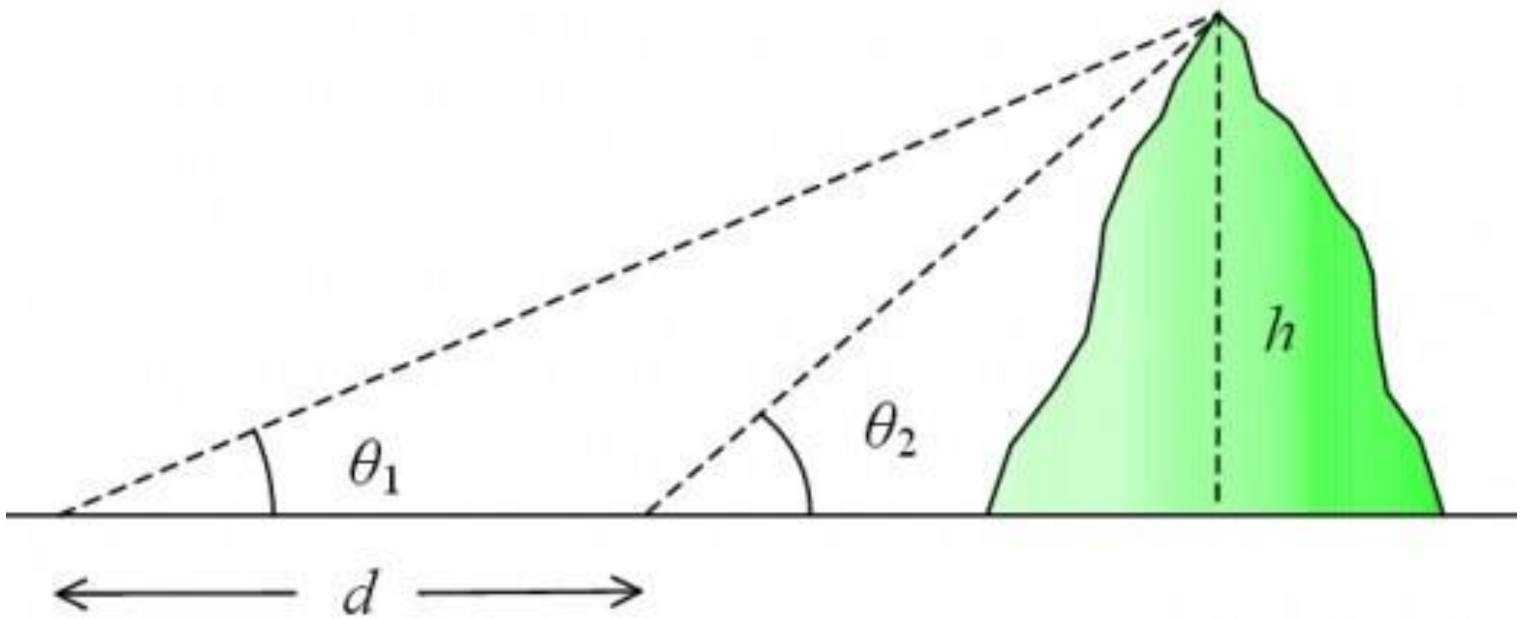
“Manual de Matemática da Ilha do Mar” foi escrito pelo matemático chinês Liu Hui da Era dos Três Reinos (220-280) como uma extensão do capítulo 9 do livro “Nove Capítulos sobre a Arte Matemática”.



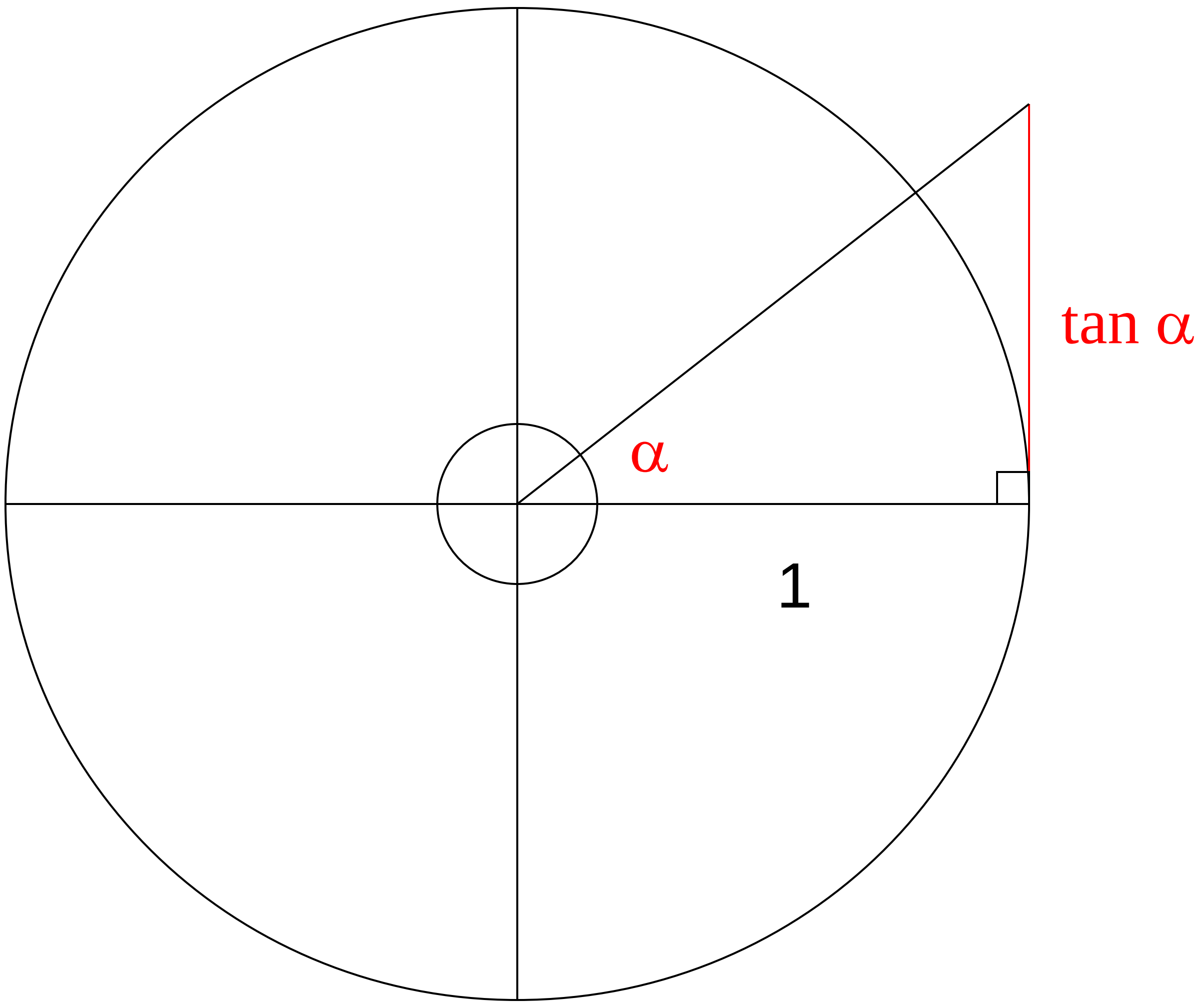


窺望海島之圖
人目表影
人目表影
前表三丈
後表三丈
合
人目
表三尺
表三尺

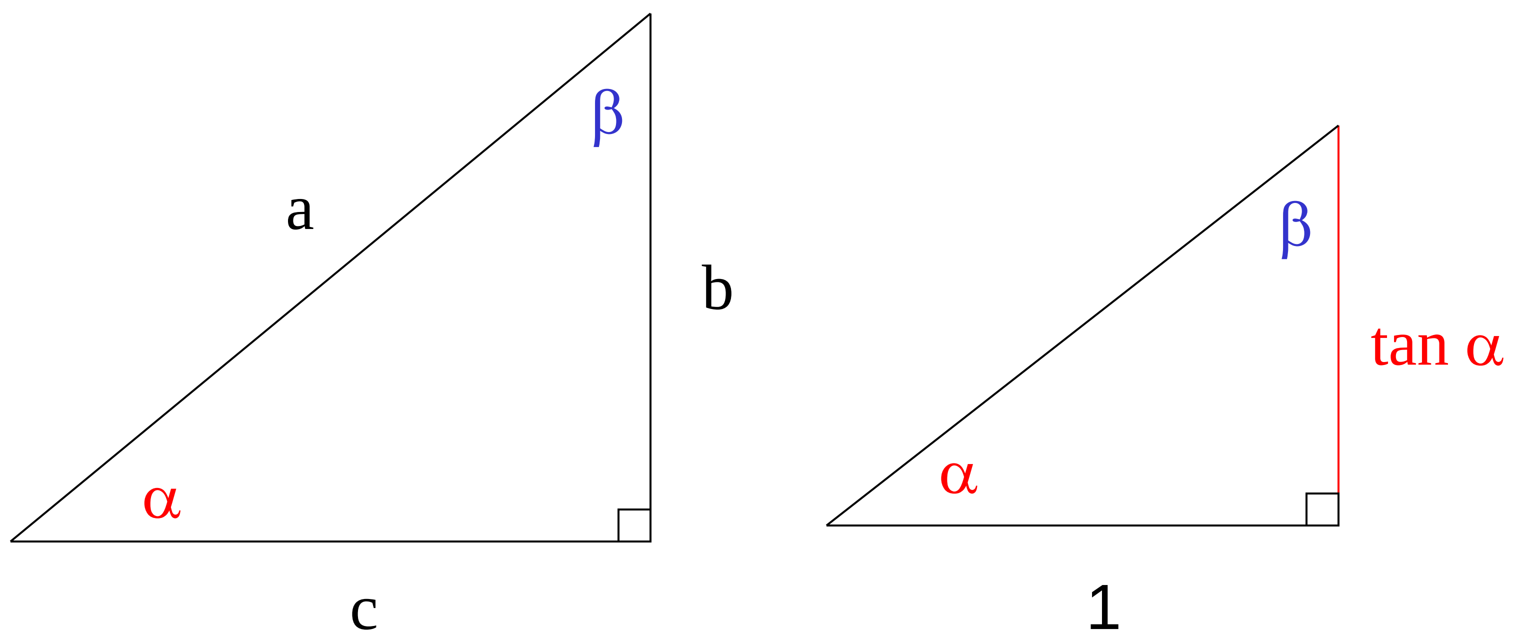
Expresse a altura h da montanha em função da distância d e das cotangentes de θ_1 e θ_2.



Tangente se refere à reta que apenas toca (*tange*) o círculo

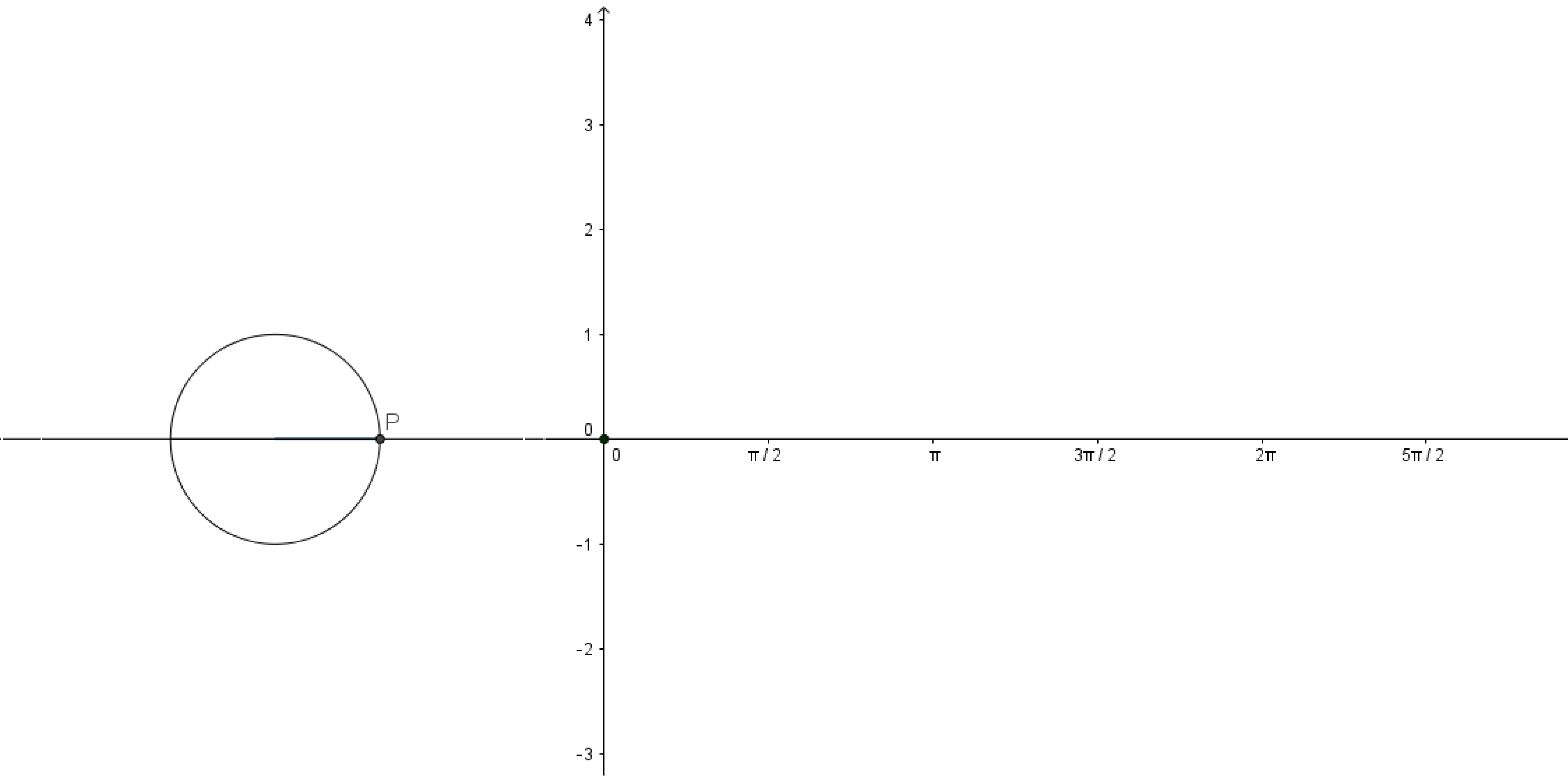


Cotangente também vem de *tangente do ângulo complementar*

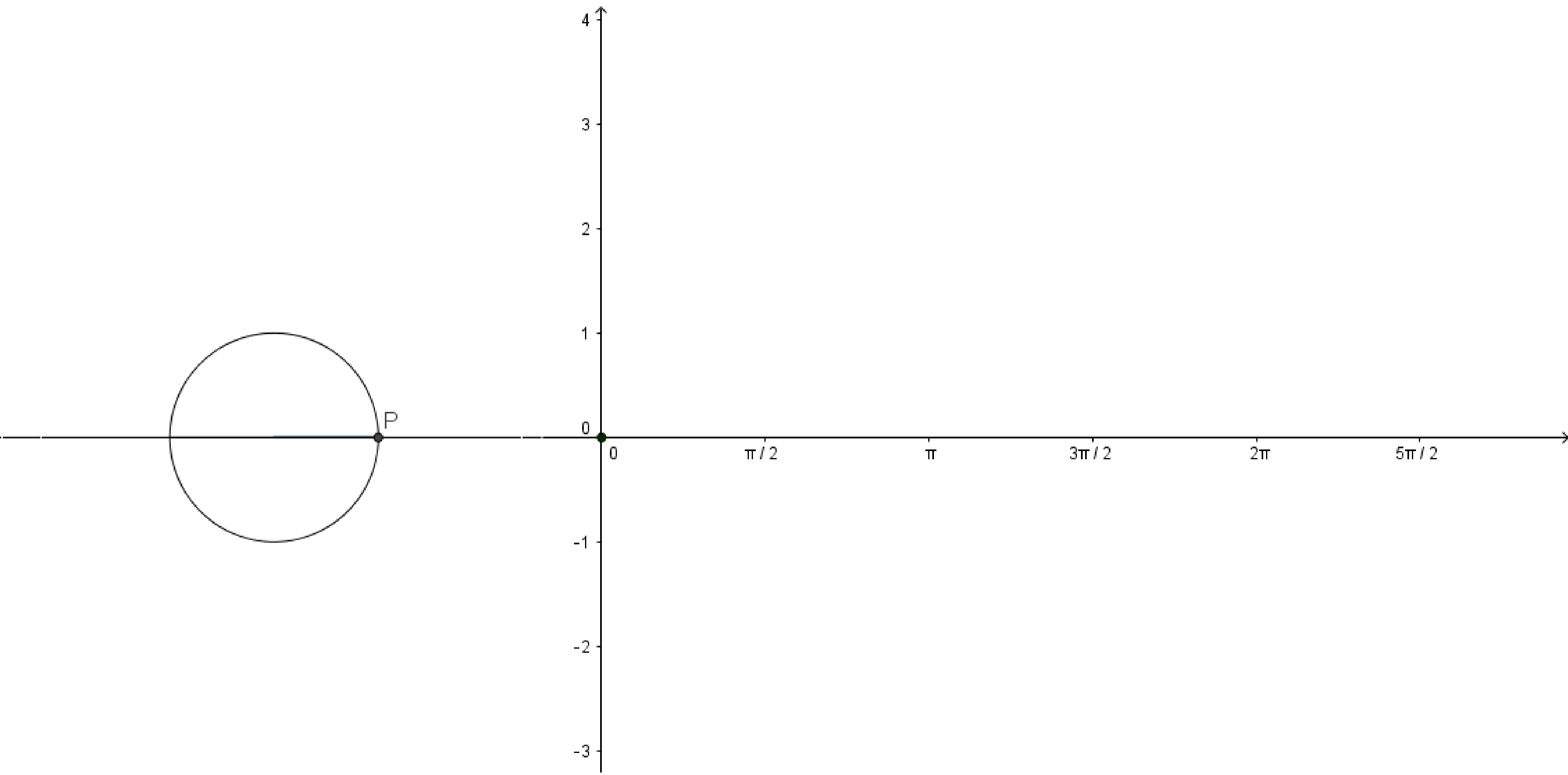


tan α = b/c

tan β = cotan α = c/b



4
3
2
1
0
-1
-2
-3
P
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2



4
3
2
1
0
-1
-2
-3
P
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2