A Matemática na Escola

CAPES
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UFRGS SEAD Educação a Distância
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS ppgemat
UFRGS EDITORA

A Matemática na Escola
NOVOS CONTEÚDOS, NOVAS ABORDAGENS

Elisabete Zardo Búrigo
Maria Alice Gravina
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Vera Clotilde Vanzetto Garcia
Organizadores

EAD
SÉRIE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UFRGS EDITORA

UFRGS SEAD Educação a Distância

1ª edição: 2012

Capa e projeto gráfico: Carla M. Luzzatto
Revisão: Zuleica Oprach de Souza
Editoração eletrônica: Rafael Marczal de Lima

Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS
Coordenador: Luis Alberto Segovia Gonzalez

Apoio em Publicações da Secretaria de Educação a Distância
Apoio operacional: Deise Mazzarella Goulart
Laura Wunsch
Marleni Nascimento Matte
Michelle Donizeth Euzébio

Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática
Diretor do Instituto de Matemática: Rudnei Dias da Cunha
Coordenadora do Curso: Maria Alice Gravina
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática: Marcus Vinicius de Azevedo Basso

M425 A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens / organizadoras Elisabete Zardo Búrigo ... [et al.]. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.
304 p. : il. ; 17,5x25cm

(Série Educação A Distância)

Inclui figuras e quadros.

Inclui referências.

1.Matemática. 2. Matemática – Ensino fundamental – Novas abordagens. 3. Matemática – Ensino Médio – Novas abordagens. 3. Matemática – Ensino Médio – Novos conteúdos. 4. Matemática – Formação de professores – Mudanças curriculares - Escola. I. Búrigo, Elisabete Zardo. II. Universidade Aberta do Brasil. III. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Secretaria de Educação a Distância. Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural. IV. Série

CDU 51

CIP-Brasil. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
(Jaqueline Trombin – Bibliotecária responsável CRB10/979)

ISBN 978-85-386-0158-6

SUMÁRIO

Parte III

Novas Abordagens no Ensino Médio

Parte IV

Novos Conteúdos no Ensino Médio

APRESENTAÇÃO

Este é um livro produzido por professores, para professores. Seu foco é a sala de aula da escola básica e a formação dos professores de matemática que refletem sobre sua prática docente, tendo em vista a aprendizagem dos estudantes. Apresentamos propostas didáticas para diferentes conteúdos ou temas da matemática escolar e, também, propostas de inclusão de novos temas no currículo.

Os autores dos capítulos são professores do ensino fundamental e médio que cursaram o Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), criado em 2005, e professores desse Curso. Os capítulos introdutórios discutem as conexões entre a formação de professores de matemática, sua reflexão sobre a prática docente e as mudanças curriculares na escola básica. Os demais capítulos estão baseados nas dissertações apresentadas pelos mestres; nos que são assinados por dois autores, o segundo autor é o(a) orientador(a) da dissertação.

O livro é dirigido aos professores do ensino fundamental e médio e aos seus formadores, professores e pesquisadores em Educação Matemática. É dirigido especialmente aos alunos do Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática para Educação Básica, oferecido em 2009 pela UFRGS em parceria com a Universidade Aberta do Brasil (UAB). Pretende contribuir para sua prática docente, sugerindo novos conteúdos e novas abordagens de tópicos da matemática escolar, mas também e, sobretudo, pretende contribuir para sua formação como professores pesquisadores, trazendo exemplos de trabalhos fundamentados em referenciais teóricos adequados e desenvolvidos segundo metodologias de pesquisa consistentes.

As propostas de ensino aqui apresentadas têm origem em inquietações dos autores vivenciadas em suas trajetórias profissionais. Cada uma das sequências didáticas ou abordagens propostas foi experimentada em uma ou mais turmas do ensino fundamental ou do ensino médio, em escolas de rede pública estadual, municipal ou federal e da rede privada.

Os relatos evocam alguns dos momentos mais interessantes dessas experimentações, citando falas e escritas dos alunos. As narrativas são sempre seguidas de discussões em que os autores refletem sobre as atividades propostas, considerando essa participação. São apresentadas explicações para os casos em que as atividades provocaram ou não as aprendizagens, as atitudes ou as respostas esperadas e, nos casos de insucesso, são apontadas alternativas para a reformulação das sequências experimentadas.

Os capítulos refletem a diversidade dos enfoques, das inquietações, dos estilos, dos referenciais teóricos utilizados e das escolhas metodológicas dos mestrandos e de seus orientadores. As experiências relatadas também são as mais diversas, envolvendo desde alunos das séries iniciais até alunos de ensino médio, em instituições de ensino que também se diferenciam nas suas trajetórias, nos seus projetos pedagógicos e na composição do respectivo grupo de alunos.

Em muitos casos, a sequência didática foi inteiramente planejada antes de sua implementação, e modificada pontualmente durante ou após a aplicação. Em outros casos, a intervenção do(a) professor(a) foi construída a partir de problemas formulados pelos próprios alunos ou de situações surgidas em sala de aula que possibilitaram novas abordagens de conteúdos matemáticos.

As sequências ou abordagens propostas, detalhadas nas respectivas dissertações, podem ser reproduzidas, com as adaptações que forem consideradas necessárias a cada sala de aula. Mas elas são apresentadas, antes de tudo, como provocações, como convites para que cada professor reflita e inove sua própria prática docente e para que comunique suas aprendizagens aos colegas e à comunidade mais ampla de educadores matemáticos. Quando um texto aqui apresentado inspirar outra experiência e especialmente outro texto, espera-se que ele seja citado, com os créditos devidos aos respectivos autores.

Com este livro, divulgamos uma parcela dos trabalhos produzidos no Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS, entre 2007 e 2010. Os capítulos trazem recortes das dissertações, numa linguagem mais informal e destacando alguns elementos que dão uma ideia da qualidade e da riqueza do material produzido nesse curto período de tempo. Os leitores estão convidados a consultar a versão integral das dissertações, bem como os demais trabalhos produzidos no Curso, acessando a Biblioteca Digital da Universidade.

Desejamos a todos uma ótima leitura!

Coordenação do Curso de Especialização "Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor" (UFRGS/UAB)

PARTE I

INTRODUÇÃO

FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E MUDANÇAS CURRICULARES NA ESCOLA

Vera Clotilde Vanzetto Garcia

Este artigo trata das diretrizes atuais para a formação do professor de Matemática, destacando o papel deste profissional na análise e mudança dos currículos escolares, em tempos de crise na educação. O objetivo é relacionar a figura do professor pesquisador e reflexivo com atividades de formação, desenvolvidas em nível de pós-graduação.

1. FORMAÇÃO DE PROFESSORES

A teoria dos professores reflexivos propõe uma concepção de docência como prática que, aliada à reflexão constante, conduz à criação de um conhecimento específico, ligado à ação.

A reflexão do professor sobre sua própria prática, seguida pela problematização e não aceitação da realidade cotidiana da escola, é considerada o início do processo de compreensão e de melhoria do seu ensino. O professor reflexivo é um profissional inovador e criativo, que descobre problemas e saídas, inventa e experimenta novas soluções, liberando-se de formas convencionais, e em constante (re)construção.

Entende-se “professor pesquisador” como aquele que explicita as inquietudes que emergem da sua prática e toma-as como problema de pesquisa, procurando soluções bem fundamentadas, com o objetivo de propor e implementar mudanças concretas na sala de aula e/ou na sua instituição.

Com base nesses conceitos (SCHÖN, 1995; DEWEY, 1933; NÓVOA, 2001), entendemos que existe hoje um novo papel destinado ao professor: profissional com competência para analisar sua própria prática e o currículo escolar, para propor mudanças.

O professor pesquisador e reflexivo tem potencial transformador: é aquele com conhecimento para refletir sobre e analisar o que está fazendo, em relação a seus efeitos nas crianças, nas escolas e na própria sociedade. É um professor que reflete em ação e sobre sua ação, preocupado em examinar o que faz, por que o faz e como pode mudar o que faz.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica em nível superior (BRASIL, 2002) incluem especial valorização para a prática, definida como lugar, foco e fonte de pesquisa. O documento enfatiza a necessidade de se associar o preparo do professor ao aprimoramento das práticas investigativas, considerando que o conhecimento de processos de investigação vai possibilitar o aperfeiçoamento das práticas pedagógicas, que devem ser desenvolvidas com ênfase nos procedimentos de observação e reflexão, visando à atuação em situações contextualizadas.

O documento indica características consideradas inerentes à atividade docente, entre as quais: desenvolver práticas investigativas; elaborar e executar projetos para desenvolver conteúdos curriculares; utilizar novas metodologias, estratégias e materiais de apoio.

Também na direção da formação de professores, foi criada, em 2004, a área de Ensino de Ciências e Matemática da CAPES, que tem incentivado a organização de Mestrados Profissionalizantes, dirigidos para professores em exercício.

A formação do professor pesquisador e reflexivo permeia o projeto pedagógico do Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da UFRGS, criado em 2005. Dentre os objetivos específicos do Curso, destacam-se os que enfatizam competências para desenvolver pesquisa na sala de aula e para assumir o papel de agente de transformação dentro de sua escola, questionando os programas e métodos e multiplicando a formação recebida. Nessa perspectiva, o Curso exige de seus alunos elaboração de dissertações que constituam uma pesquisa profissional, aplicada, com desenvolvimento de processos ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino na área específica.

Autores da área da Educação Matemática manifestam-se nesta direção. Segundo Perez (2005, p. 252), "a chave da competência profissional é a capacidade de equacionar e resolver problemas da prática [...] É preciso estudo, trabalho, pesquisa para renovar e, sobretudo, reflexão para não ensinar apenas 'o que' e 'como' lhe foi ensinado". Neste espírito, entende-se professor reflexivo e pesquisador como aquele que explicita as inquietudes que emergem da sua prática, e toma-as como problema de pesquisa, procurando propostas de solução bem fundamentadas, com o objetivo de propor e implementar mudanças concretas na sala de aula e/ou na instituição.

Fiorentini, Souza e Melo (1998) salientam as demandas colocadas hoje ao professor. Por um lado, "espera-se dele uma atitude investigadora e crítica em relação à prática pedagógica e aos saberes historicamente produzidos; por outro lado, passa a ser responsável pela produção de seus saberes e pelo desenvolvimento curricular da escola" (p.332).

O presente livro foi planejado para disponibilizar produtos da pesquisa dos professores/mestrandos da UFRGS que trazem propostas para mudanças curriculares. Este artigo analisa com mais cuidado o significado dessas mudanças.

2. MUDANÇAS CURRICULARES

Currículo escolar não é apenas uma lista de conteúdos, um programa a cumprir. Tem hoje uma acepção muito mais ampla, incluindo propósitos, conteúdos, métodos e procedimentos de avaliação. É o conjunto de todas as vivências e conhecimentos disponibilizados pela escola, na escola. Uma mudança curricular, portanto, não consiste apenas em retirar ou inserir conteúdos, mas pode constituir-se numa proposta de nova metodologia, de nova abordagem ou de novo sistema de avaliação.

É consenso que a educação, no Brasil, está em crise. Em especial, a escola pública parece não estar cumprindo sua função de formar cidadãos autônomos, com condições de inserção no mercado de trabalho, aptos para uma vida digna, socialmente integrados.

Muitos motivos justificam mudanças no currículo escolar. Podemos lembrar a qualidade da educação; as demandas econômicas e sociais; a universalização do ensino e a necessidade de uma educação para todos; as transformações tecnológicas que modificam o mundo do trabalho e a vida cotidiana; a globalização; a necessidade de inserir o país no comércio mundial em condições competitivas; a prática usual de um ensino "tradicional" identificado com concepções de ensino e aprendizagem obsoletas e seculares.

Um primeiro passo, na direção de responder a estas demandas, foi dado com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), publicados pelo MEC, a partir de 1997.

Mais recentemente, o Conselho Nacional de Educação (BRASIL. CNE, 2009) lançou um plano de mudança para o ensino Médio, propondo a articulação das dimensões trabalho, ciência, tecnologia e cultura.

> [...] o Ensino Médio deve ser estruturado em consonância com o avanço do conhecimento científico e tecnológico, fazendo da cultura um componente da formação geral, articulada com o trabalho produtivo. Isso pressupõe a vinculação dos conceitos científicos com a prática relacionada com a contextualização dos fenômenos físicos, químicos e biológicos, bem como a superação das dicotomias entre humanismo e tecnologia e entre formação teórica geral e técnica-instrumental.

O documento sugere a ideia de diferentes formas de organização curricular e de princípios orientadores para a garantia de uma formação eficaz dos jovens brasileiros.

3. NOVOS CONTEÚDOS CURRICULARES

Como já foi dito, um currículo inclui propósitos, conteúdos, métodos e procedimentos de avaliação. Cabe, então, no contexto das mudanças curriculares, questionar conteúdos e propor sua inserção na escola, oferecendo, simultaneamente, novas abordagens.

Ao ensinar um certo conteúdo de matemática, em geral, perguntamos: o quê? Como? O que devo ensinar? Como ensiná-lo? Mas a pergunta, hoje, deveria ser: por quê? Quais as razões de ensiná-lo? Por que está presente no currículo escolar? Por que ele foi escolhido e não outro?

Considerando as mudanças sociais aceleradas e o novo contexto em que vivemos – um mundo globalizado, na era da informação e da tecnologia – e considerando objetivos para melhoria da qualidade da educação e do compromisso social para com o aluno, poderíamos questionar e mesmo afastar alguns conteúdos do currículo e incluir outros.

Neste livro, disponibilizamos quatro propostas de conteúdos ausentes do currículo usual, podendo ser trabalhados tanto no nível fundamental, como no médio:

- Grafos;
- Transformações geométricas;
- Vetores;
- Matemática Financeira.

Grafos

Os Grafos constituem teoria recente na Matemática e, talvez por isso, ainda não estão presentes nos currículos escolares.

Um grafo é um diagrama composto por vértices interligados por arestas, que traduz informações sobre alguma situação real. Por exemplo, um mapa é um grafo que traz informações sobre cidades (representadas por vértices), sobre as estradas que as ligam (as arestas) e que pode informar sobre as distâncias entre elas, custo de transporte rodoviário, nível de periculosidade do caminho, etc. Um fluxograma que representa um programa para um computador é um grafo; o mapa das tubulações de petróleo, que cruzam a Ásia, é um grafo; uma planta elétrica de um imóvel é um grafo; as redes de computadores são grafos, sendo cada terminal representado por um vértice e os cabos de rede pelas arestas.

Estruturas que podem ser representadas por grafos estão em toda parte e muitos problemas de interesse prático podem ser formulados como questões sobre certos grafos. Além disso, este conceito se oferece como um mundo novo para as aplicações de conteúdos da matemática escolar tradicional, tais como Matrizes, Combinatória e Geometria, criando pontes num currículo que se caracteriza como fragmentado.

Transformações Geométricas

As transformações geométricas não fazem parte do currículo mais tradicional da escola, mas já estão presentes em livros didáticos mais recentes, como a coleção de Pires e Pietropaolo (2002), que destacam movimentos das figuras e os definem, no ensino fundamental. Também os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997) salientam a importância das atividades de transformação das figuras geométricas (rotação, translação, ampliação e redução), para adquirir percepção espacial.

Na Geometria Euclidiana, as isometrias formam um grupo de transformações congruentes que se caracterizam por manter inalteradas as propriedades das configurações de pontos do plano. São também chamadas de movimentos rígidos, pois preservam linhas retas, retas paralelas, ângulos entre retas e congruências entre segmentos. Ou seja, um quadrado sujeito a uma isometria continua quadrado, com as mesmas medidas, embora ocupe outra posição no plano. Isometrias são as rotações, as reflexões e as translações de objetos do plano. As homotetias preservam a semelhança entre as figuras, mas não a congruência, por isso não são consideradas isometrias. Um quadrado sujeito a uma homotetia pode tornar-se maior ou menor, mas ainda é um quadrado.

As transformações geométricas euclidianas têm o mérito de vincular a matemática com o mundo em que vivemos, um mundo em constante movimento. São também muito visíveis, quando ensinadas com o auxílio dos softwares educativos e da Geometria Dinâmica, que favorecem sua visualização. Além disso, tecem pontes no interior do currículo escolar, unindo geometria, funções e matrizes: uma transformação geométrica nada mais é do que uma função cujo domínio e contradomínio são o plano ou o espaço.

Vetores

O ensino dos vetores, em geral, é desenvolvido nas aulas de Física, especificamente para se tratar de conceitos físicos. Velocidade e aceleração de um objeto e as forças que agem sobre ele são descritas por vetores. No entanto, vetor é um ente matemático, cuja definição envolve conceitos da matemática: vetor é um representante de uma classe de equivalência de segmentos orientados que têm mesmo comprimento, direção e sentido. Esses segmentos podem ser representados por setas, para indicar que são orientados, mas é preciso ter cuidado para não definir vetor como uma seta.

Em particular, a ideia de vetor é fundamental no ensino dos números complexos, pois cada número da forma $a + bi$ pode ser representado por um par ordenado (a, b) que está associado a um ponto do plano cartesiano e, ao mesmo tempo, a um vetor em duas dimensões, com origem na origem do plano e extremidade em (a, b). Associar números complexos e vetores permite dar significado e abrir o mundo das aplicações dos complexos: módulo e argumento referem-se ao comprimento e ao sentido do vetor; operações com números complexos podem ser associadas a operações com objetos da Física.

Além disso, o trabalho com vetores auxilia a estabelecer relações internas entre conteúdos de Matemática, quando associamos as operações com números complexos/vetores com transformações geométricas, utilizando, hoje, o recurso dos softwares de Geometria Dinâmica, que facilitam imensamente a visualização da dinâmica das transformações.

Matemática Financeira

Matemática Financeira é um conteúdo matemático essencialmente aplicado, e um dos mais antigos na história da matemática. É um conjunto de ferramentas que auxiliam na compreensão do mundo, de extrema relevância, mas que apenas recentemente vem sendo incluído nos currículos escolares e nos livros didáticos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Ensino Médio (BRASIL, 1999) enfatizam a necessidade da compreensão da Matemática e de seus temas, para a formação de um cidadão capaz de tomar decisões em sua vida profissional e pessoal, especialmente nas relações de consumo. Nesta ótica, a Matemática no Ensino Médio deve ir além de seu valor formativo – que inclui o desenvolvimento do pensamento e do raciocínio dedutivo – para mostrar-se, também, com valor instrumental – uma ferramenta que serve para a vida cotidiana.

O documento PCN+ (BRASIL, 2002) sugere competências e habilidades que o ensino de Matemática deve proporcionar ao aluno e que exigem conhecimento de Matemática Financeira: reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática – por exemplo, ao ler textos de jornais ou outras comunicações, compreender o significado de dados apresentados por meio de porcentagens –; ler e interpretar diferentes tipos de textos com informações apresentadas em linguagem matemática, desde livros didáticos até artigos de conteúdo econômico, social ou cultural; compreender a responsabilidade social associada à aquisição e uso do conhecimento matemático, utilizando-o na defesa de seus direitos como consumidor; conhecer recursos, instrumentos e procedimentos econômicos e sociais para posicionar-se, argumentar e julgar sobre questões de interesse da comunidade.

Além da sua natureza aplicada, o trabalho com Matemática Financeira também auxilia a estabelecer relações internas entre conteúdos de Matemática. A resolução de problemas na área, e mesmo a dedução do formulário básico formam um interessante campo de contextualização para os conceitos mais simples de progressão aritmética e geométrica.

4. NOVAS ABORDAGENS CURRICULARES

Com a sociedade da informação, o desempenho profissional vai exigir conhecimentos de matemática, de ciência e de tecnologia, em amplo leque de situações. É consenso entre diferentes autores e educadores que, na alfabetização matemática para a sociedade da informação, três aspectos devem ser colocados em evidência: habilidades, atitudes e contextos.

Nas habilidades, destaca-se a habilidade intelectual para lidar com situações complexas, que exijam múltiplas estratégias, múltiplas soluções, avaliação e interpretação; o saber ler e escrever em linguagem matemática; a aptidão para resolução de problemas novos e não rotineiros que dependam de raciocínios e conhecimentos matemáticos.

Quanto às atitudes, referem: a valorização da matemática como ferramenta para resolução de problemas; a confiança em dispor de tal conhecimento quando necessário; práticas cooperativas de enriquecimento intelectual, advindo da confrontação de diferentes perspectivas.

No que tange ao contexto, o mesmo diz respeito aos recursos tecnológicos que concorrem para a abordagem e tratamento de problemas matemáticos; diz respeito à constante exigência de adaptação a novas situações-problema.

Nesta perspectiva, oferecemos, neste livro, quatro maneiras de desenvolver novas abordagens para o ensino da matemática:

1) a metodologia da resolução de problemas;
2) a metodologia da modelagem matemática;
3) o uso das tecnologias da informação e computação;
4) a transposição didática.

A metodologia da resolução de problemas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (BRASIL, 1997, p. 43) sugerem que "no processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las".

Diferentes autores da área de Educação de Matemática sugerem a resolução de problemas como metodologia de ensino (ONUCHIC, 1999; DANTE, 1991; CARRAHER, 1991), porém, adotar este caminho implica em mudanças nas concepções do professor.

Os problemas deveriam ser propostos, na escola, para contribuir para a construção de novos conceitos e novos conteúdos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. Entretanto, alguns professores têm visão restrita dos problemas, pois o hábito tradicional de desenvolver um conceito consiste em exposição oral, apresentação de exemplos e resolução de exercícios ou problemas. Mas é preciso diferenciar problema de exercício: *exercício* é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido, como a aplicação de algum algoritmo ou fórmula já conhecida, e envolve mera aplicação de resultados teóricos; *problema,* necessariamente, envolve invenção e/ou criação significativa.

A metodologia da modelagem matemática

Tendências atuais da Educação Matemática no Brasil apontam para a importância de se estabelecer relações entre a Matemática, outras disciplinas e outros contextos e a modelagem aparece como um caminho de integração e contextualização do ensino da Matemática (BARBOSA, 1999, 2001a, 2001b, 2002; BASSANEZI, 2004; BIEMBENGUTT; HEIN, 2003; PONTE, 1992).

A modelagem matemática, como metodologia de ensino, consiste na transformação de problemas da realidade em problemas matemáticos. Sua resolução, em linguagem matemática, é, por sua vez, transformada, para ser apresentada na linguagem adequada ao contexto.

Uma modelagem exige um aluno ativo para analisar, explicar um problema e tomar decisões sobre o mesmo; coletar informações, formular hipóteses e testá-las, obter modelos e validá-los (ou não) para determinada situação. A matemática escolar torna-se mais interessante e desencadeia processos de reflexão-na-ação. Esta reflexão possibilita que o aluno compreenda a sua ação, reorganize ou aprofunde o seu conhecimento acerca do problema em estudo e, interagindo com os conhecimentos construídos, desenvolva sua competência profissional futura (FIDELIS; ALMEIDA, 2004). É uma metodologia interdisciplinar, pois pode ligar a matemática com o mundo dos problemas da Física, Química, Biologia, ou mesmo do cotidiano.

Alguns autores utilizam o termo modelação (modelagem em educação) quando se referem à modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. Neste caso, o fenômeno modelado serve mais de pano de fundo ou como motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria Matemática, valorizando-se mais o processo utilizado do que a validação do modelo. Percebem a modelagem como um ambiente de aprendizagem que valoriza o processo de construção do conhecimento do aluno e as interações no meio em que vive.

O uso das tecnologias da informação e computação (TICs)

Muitos autores da área de Educação Matemática sugerem o uso das tecnologias da informação e computação na sala de aula (PENTEADO; BORBA, 2003; ARAÚJO, 2002; PENTEADO, 1999; MALTEMPI, 2004).

Com o advento da sociedade da informação, o sistema educativo brasileiro deve se integrar num novo contexto e, sendo a escola um micromundo que tem, dentre suas finalidades, a preparação dos indivíduos para a vida adulta de amanhã, deve ela constituir-se com as mesmas características.

A presença, cada vez maior, das Tecnologias da Informação e Comunicação em todos os setores, torna-se uma ameaça de exclusão social para os indivíduos que participam de um processo educativo que se mantém à margem da formação de competências necessárias para inserção nesta sociedade.

Em escolas já equipadas com laboratórios para uso de mídias digitais e com acesso à *web*, frequentemente observa-se uma subutilização destes recursos. Em geral, nesses espaços, o trabalho com os alunos restringe-se à formação generalista – noções gerais de informática, familiarização com editores de texto e desenho, familiarização com a navegação na *web*. Nas aulas de matemática, pouco se utilizam as mídias digitais e, quando isso é feito, frequentemente as práticas didáticas seguem os moldes tradicionais das aulas de giz e quadro-negro. Mudam os recursos para a educação, mas as concepções dos professores sobre o processo de ensino e aprendizagem não se modificam.

É preciso destacar, junto ao professor, que a apropriação das tecnologias de informação e comunicação (TICs) no ensino da matemática contribui para facilitar o processo de ensino-aprendizagem, para a inserção do jovem na sociedade tecnológica e, também, oferece ferramentas interdisciplinares entre as diferentes áreas de conhecimento.

Como sugere o MEC (BRASL,1998), a utilização das TICs traz contribuições ao processo de ensino-aprendizagem de Matemática à medida em que: a) relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que, por meio de instrumentos, esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente; b) evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas; c) possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem; d) permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo.

Em particular, nas aulas de Matemática, o uso das TICs pode ter diferentes finalidades: a) como fonte de informação, poderosa para alimentar o processo de ensino-aprendizagem; b) como auxiliar no processo de construção de conhecimento; c) como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções; d) como ferramenta para realizar determinadas atividades – uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc.

Aplicação da transposição didática

Transposição Didática refere-se ao processo de adaptação pelo qual passa o saber científico, quando transformado no conjunto dos conteúdos que constituem os programas escolares e que pode ser chamado de “saber escolar” (PAIS, 2002). É o trabalho de construção de uma passagem entre o conhecimento científico e aquele que o aluno é capaz de aprender.

Perrenoud (1993) define como transposição didática a essência do ensinar, ou seja, a ação de “fabricar artesanalmente os saberes, tornando-os ensináveis, exercitáveis, e passíveis de avaliação no quadro de uma turma, de um ano, de um horário, de um sistema de comunicação e trabalho” (p. 25). Para ele, essa é uma “tradução pragmática dos saberes para atividades e situações didáticas” (p. 26), que surge como uma resposta ou reação às situações reais de sala de aula.

Alguns professores baseiam suas aulas em livros didáticos, confiando na transposição didática desenvolvida pelo autor. Outros assumem sua responsabilidade sobre o currículo, refletindo sobre e analisando os conteúdos programáticos, as metodologias e as relações professor-aluno. Essa atividade está sempre ao alcance do professor, sendo mobilizada quando um projeto ou plano pedagógico é construído. Depende da articulação de diferentes categorias de conhecimento: conhecimento do conteúdo específico que ele ensina; conhecimento pedagógico geral (dos princípios e estratégias de gestão e organização da classe); conhecimento do currículo, dos materiais e dos programas; conhecimento dos alunos e das suas características; conhecimento do contexto educativo (conhecimento do grupo, comunidade, cultura etc.); conhecimento dos fins, propósitos e valores educativos. Além disso, nesta tarefa, o professor vai produzir um conhecimento que é só seu e que não pode ser ensinado nas instituições de formação de professores: o “*conhecimento pedagógico do conteúdo específico*”, uma maneira sua de transformar o conteúdo acadêmico em conteúdo ensinável, inteligível aos alunos (SCHULMAN, 1986).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A crise histórica da educação brasileira – que se manifesta nos altos índices de analfabetismo, evasão e fracasso escolar, na insuficiência dos recursos destinados à educação e numa aparente incapacidade de implantação de uma escola de qualidade

– tem sido alvo de sucessivas investidas. Diferentes propostas educativas têm sido formuladas, visando à formação de professores e os currículos da escola básica.

Nesse contexto, foram criados cursos em nível superior, dirigidos para professores, com o objetivo de contribuir para a formação de um profissional reflexivo, pesquisador em sala de aula, com potencial para produzir mudanças e melhorias no currículo de sua escola.

O conceito de professor pesquisador e reflexivo parte do princípio de que o ensino de qualidade começa pela reflexão do docente sobre a sua atividade, com boa fundamentação no conhecimento sistematizado. O mesmo conceito reconhece, ainda, que este professor é um produtor e não simples consumidor de materiais e ideias alheias.

O trabalho reflexivo do professor manifesta-se na sua contribuição para o currículo, que inclui conteúdos, metodologias, métodos de avaliação e todo o conjunto das vivências e atividades oferecidas ao aluno, na escola e pela escola.

Relatamos aqui algumas propostas que professores, enquanto alunos do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da UFRGS, desenvolveram, visando alterações curriculares, com novos conteúdos e novas abordagens.

Entre os novos conteúdos, apresentamos Grafos, Vetores e Transformações Geométricas. Dentre as novas abordagens, destacamos a resolução de problemas, a modelagem matemática, o uso das TICs e a transposição didática, que é o trabalho de tradução do conhecimento acadêmico em conteúdos didaticamente assimiláveis pelo aluno.

Finalizando, destacamos a importância da produção do professor, num cenário de crise e de transformação da escola. Acreditamos que mudanças curriculares que nascem do corpo docente são mais sólidas e adequadas do que mudanças veiculadas em documentos públicos oficiais, gerados fora do ambiente escolar.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Jussara. *Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática:* As Discussões dos Alunos. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. O que pensam os professores sobre a Modelagem Matemática? *Zetetikè,* Campinas, v. 7, n.11, p. 67-85, 1999. Disponível em: <http://joneicb.sites.uol.com.br/zetetike.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2007.

______. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24ª, Caxambu, 2001. *Anais...* Caxambu: 2001a. 1-CDROM. Disponível em: <http://joneicb.sites.uol.com.br>. Acesso em: 20 ago. 2007.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema,* Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001b. Disponível em: <http://joneicb.sites.uol.com.br/bolema.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2007.

______ . Modelagem Matemática e os futuros professores. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25ª, Caxambu, 2002. *Anais...* Caxambu: 2002. Disponível em: <http://joneicb.sites.uol.com.br/anped2002.pdf >. Acesso em: 27 ago. 2007.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática:* uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. *Modelagem Matemática no ensino.* São Paulo: Contexto, 2003.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica*, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Brasília: MEC, 2002a.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. *Ensino médio inovador*. Brasília: MEC, 2009.

BRASIL. MEC. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais* (5ª a 8ª série): Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL. MEC. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *PCN+: Ensino Médio* - orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

CARRAHER, Terezinha Nunes. *Aprender pensando*: contribuições da psicologia cognitiva para a educação. 6. ed. Petrópolis: Vozes, 1991.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de matemática.* 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

DEWEY, John. *Como pensamos*. Barcelona: Paidos, 1933. 274p.

FIDELIS, Reginaldo; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Modelagem matemática em sala de aula; contribuições para competência de refletir-na-ação. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VII, São Paulo, 2004. *Anais...* Disponível em http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais%5Cco0080.doc. Acesso em: 10 mai. 2010.

FIORENTINI, Dario; SOUZA JÚNIOR, Arlindo José de; MELO, Gilberto Francisco Alves de. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, Corinta; FIORENTINI, Dario; PEREIRA, Elisabete. (Org.) *Cartografias do trabalho* *docente: professor (a) – pesquisador (a).* Campinas: Mercado das Letras, 1998. p. 307-335.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. *Educação Matemática pesquisa em movimento.* São Paulo: Cortez, 2004. p. 264-282.

NÓVOA, Antônio. *O Professor Pesquisador e Reflexivo*. Entrevista concedida em 13 de setembro de 2001. Disponível em: <http://www.tvebrasil.com.br/salto/entrevistas/antonio_novoa.htm>. Acesso em: 10 mai. 2010.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática:* Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição Didática. In: MACHADO, Silvia Dias A. *Educação Matemática*: uma introdução. 2 ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 13-42.

PENTEADO, Miriam Godoy; BORBA, Marcelo de Carvalho. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PENTEADO, Miriam Godoy. Novos Atores, Novos Cenários: Discutindo a Inserção dos Computadores na Profissão Docente. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org). *Pesquisa em Educação Matemática:* Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 297-313.

PEREZ, Geraldo. Prática reflexiva do professor de matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. (Org.). *Educação matemática, pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2005. p. 250-263.

PERRENOUD, Philippe. *Práticas pedagógicas, profissão docente e formação:* perspectivas sociológicas. Lisboa: Dom Quixote, 1993.

PIRES, Célia Carolino; CURI, Edda; PIETROPAOLO, Ruy. *Educação Matemática*: 5ª série. São Paulo: Atual, 2002.

PONTE, João Pedro da. A Modelação no processo de aprendizagem. *Educação e Matemática*. Portugal, n. 23, p. 15-19, 1992. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/92-Ponte(Educ&Mat).doc>. Acesso em: 10 mai. 2010.

SCHÖN, Donald. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (Org.) *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote, 1995. p. 77-91.

NOVOS CONTEÚDOS E NOVAS ABORDAGENS

Maria Cristina Varriale
Vilmar Trevisan

1. INTRODUÇÃO

A importância da Matemática há muito ultrapassou os limites da Academia, sendo hoje reconhecida pelos órgãos governamentais como uma das molas propulsoras de base para o desenvolvimento de um país. Em consequência, é notório o incentivo que tem sido promovido pelo governo federal, nos diversos níveis do ensino de matemática, visando garantir a qualidade deste ensino, em especial nos níveis Fundamental e Médio.

Infelizmente, se questionarmos qualquer professor de matemática na Universidade, verificaremos que é uníssono o clamor a respeito do pouco domínio que os alunos mostram ter sobre os conteúdos previamente abordados. Vale lembrar que professores de matemática na universidade lecionam para alunos que escolheram se preparar para uma profissão que, em algum grau, envolve matemática, ou seja, supõe-se que tenham sido alunos interessados em suas aulas de matemática na escola! Professores de outras disciplinas, como Física, também se ressentem da falta de conhecimentos matemáticos dos alunos que chegam à Universidade.

É fato que o ensino de matemática na escola não tem alcançado seus objetivos. É uma triste realidade que se confirma não apenas no desempenho dos candidatos ao vestibular, mas também em outros indicadores tais como os diversos exames (ENEM, Prova Brasil) organizados pelo Ministério da Educação (MEC).

Face ao exposto, os programas de formação de professores de matemática passam a constituir o foco das atenções, pois, afinal, caberia a estes profissionais a difícil tarefa de alterar esse quadro. Deseja-se atingir não apenas os professores em formação, nos cursos de licenciatura, mas também aqueles que já atuam no ensino. A experiência e os anseios destes últimos são de enorme valia na busca de um ensino mais bem sucedido, no sentido de se alcançar uma melhor aprendizagem aos alunos.

Em nível de Pós-Graduação, um novo Comitê é constituído na CAPES, para tratar especificamente do Ensino de Ciências e Matemática, abrindo-se assim um promissor espaço para Mestrados Profissionalizantes nesta área.

Paralelamente, é preciso reconhecer os grandes incentivos que têm sido proporcionados visando à oferta de cursos à distância, entre os quais licenciaturas e especializações em Matemática, o que, sem dúvida, derrubando limitações de distância, permite uma maior abrangência da clientela atingível.

É neste contexto que nos encontramos hoje, como docentes do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, da UFRGS, interagindo com os alunos deste curso, que são docentes em exercício há no mínimo dois anos no ensino médio ou fundamental, e que trazem bem claramente suas inquietudes/frustrações com relação à sua atuação. Ao se candidatarem ao Mestrado, todos esses professores afirmaram categoricamente que queriam e sentiam a necessidade de melhorar/mudar, e, cheios de expectativas, contam com a nossa orientação neste tão desejado aprimoramento.

Diversas etapas deverão, evidentemente, constituir a busca da realização desta meta, de modo a delinear com precisão onde e como trilhar esse caminho para o aprimoramento de uma proposta didática. A materialização do objetivo alcançado configura-se através de um produto concreto, sequência didática específica de um tópico a ensinar, aprovado quando da conclusão deste Mestrado, e cujo efeito poderá ser multiplicado inúmeras vezes, na medida em que for divulgado em grande escala para outros professores de matemática.

2. POR QUE NOVAS ABORDAGENS?

A necessidade de se adotar uma “nova” abordagem para ensinar algum conteúdo curricular “antigo” de matemática decorre de diversos fatores, os quais têm sido identificados não apenas pelos docentes que chegam ao nosso Mestrado, ansiosos e com muitas expectativas neste sentido, mas também pelas orientações curriculares estabelecidas pelo MEC.

Palavras como modelagem, contextualização, tecnologia computacional têm sido valorizadas e utilizadas com muita frequência, quando se trata de atualização e de inovação em estratégias de ensino.

O aluno de hoje é contestador e a relação docente/aluno mudou nas últimas décadas. A insatisfação dos alunos tem sido verbalizada invocando falta de motivação e de interesse: “Para que aprender isso? Onde vou usar?” Sem entender o significado do que está sendo ensinado, o aluno passa a odiar as aulas de matemática, reduzidas a um monte de fórmulas e mecanismos a decorar, e, traumatizado, esse aluno acumula frustrações e falhas de aprendizagem, e isso prejudica o ambiente da sala de aula de matemática.

Buscando resgatar o interesse dos alunos, professores têm procurado aproximar o ensino de matemática de situações cotidianas integrantes da realidade dos alunos. Valorizando a prática, procura-se contextualizar os conteúdos a serem ensinados, na expectativa de torná-los atraentes, de modo que o aluno entenda o seu significado e, tendo participado da construção deste conhecimento, reconheça a sua importância.

Com os grandes avanços obtidos na área de recursos computacionais, professores têm se dedicado à construção de objetos de aprendizagem, visando novas abordagens de um grande leque de conteúdos de matemática. Inúmeras simulações de experimentos podem ser exploradas pelos alunos, de modo a beneficiar-se no que tange à compreensão de conteúdos. Restrições inerentes ao uso exclusivo de quadro e giz têm sido superadas pelo uso de softwares que permitem visualização gráfica de relações entre as variáveis envolvidas em algum problema.

Ao adotar um ensino através de uma abordagem de problemas para introduzir conteúdos de matemática, vale observar que não são apenas os problemas do cotidiano que podem interessar o aluno; a motivação dele poderá, também, ser promovida a partir de problemas históricos.

Enfim, são diversas as novas abordagens que poderão ser sugeridas por algum professor, em substituição à abordagem atualmente por ele utilizada, e que tem se mostrado ineficiente no ensino de determinado conteúdo, para um grupo de alunos sob sua responsabilidade. Cabe ressaltar que a eficiência de uma ou outra abordagem poderá diferir, dependendo do grupo de alunos envolvidos. Caberá ao professor reconhecer a necessidade de adotar uma nova abordagem, ou não, dependendo do resultado alcançado.

3. POR QUE NOVOS CONTEÚDOS?

A fraca motivação dos estudantes da Escola Básica tem sido apontada por muitos professores como um dos maiores desafios a serem enfrentados em sala de aula. Uma maneira natural de aumentar o interesse dos alunos é fazer com que o cotidiano dos estudantes se aproxime dos assuntos a serem tratados no currículo.

Essa aproximação do cotidiano do estudante pode ser feita através de abordagens diferentes de conteúdos consagrados, como discutimos até aqui, mas, naturalmente, novos conteúdos podem ser introduzidos de modo a explicar situações corriqueiras, incorporando novas ferramentas matemáticas.

A sociedade evolui de forma muito rápida, via transformações sociais, políticas e principalmente tecnológicas, de tal sorte que a Escola – uma instituição naturalmente resistente a mudanças – não consegue incorporar essas transformações no ritmo em que elas acontecem. Essa lenta reação da Escola se reflete principalmente no currículo, que acaba por se tornar "velho" e pouco atrativo para o estudante de forma muito rápida.

É nossa atribuição, como docentes, trazer para a sala de aula situações atrativas e motivadoras e, porque não, novas ferramentas matemáticas para explicá-las. Muito do que se produz em Matemática – e muito se produz – fica reservado ao mundo acadêmico apenas, ou então é aplicado diretamente às inovações tecnológicas que originaram este conhecimento. Pouco chega à sala de aula. Mas existem situações em que novos conteúdos podem ser introduzidos no Ensino Médio de maneira natural. Veremos mais adiante exemplos dessas situações.

Outro fator importante que encoraja a introdução de novos conteúdos é o teor dos documentos oficiais. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais e em outros escritos do MEC, pode-se facilmente encontrar referências implícitas à necessidade de novos conteúdos (exemplos podem ser encontradas nas várias citações dos Parâmetros encontrados nos outros capítulos deste volume).

4. EXEMPLOS DE NOVAS ABORDAGENS E NOVOS CONTEÚDOS

Entre as novas abordagens que foram construídas por alunos deste Mestrado Profissionalizante, as três que escolhemos para servir de base na nossa disciplina do Curso de Especialização em Matemática – Mídias Digitais – Didática para Educação Básica (ver sítio http://www.ufrgs.br/espmat/) trazem sugestões objetivas, de modo a preencher lacunas em pontos nevrálgicos distintos do Ensino Médio e Fundamental. Essa escolha, evidentemente, não desmerece outras dissertações que também propuseram sequências didáticas visando contribuir na superação de dificuldades detectadas para o ensino de certos assuntos, da forma como atualmente são abordados.

É bem sabido que a passagem da aritmética para a álgebra, e do número para a letra, tem sido bastante traumatizante, tanto para o aluno quanto para o professor, visto que o aluno tem mostrado grandes dificuldades até mesmo em reconhecer a sua importância. A alternativa proposta por Newton Kern (2008) para introduzir a **álgebra** ao aluno da sexta série do Ensino Fundamental faz uso de um aplicativo denominado "Árvores Algébricas", que propicia a este aluno uma oportunidade de reconhecer a estrutura de um problema, provocando-o a construir relações funcionais, e a partir daí a generalização e a abstração do pensamento algébrico.

A introdução dos problemas de **contagem** aos alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental constitui outro desafio para o professor de Matemática, porque os alunos consideram esse assunto como algo muito difícil, chato e confuso e, em um clima de hostilidade, acabam dificultando ainda mais a aprendizagem em sala de aula. A abordagem sugerida por Gustavo Carvalho (2009) faz uso de jogos na resolução de problemas de contagem, e o objetivo de motivar o aluno e auxiliá-lo em sua aprendizagem foi alcançado na medida em que as diversas situações, apresentadas em tais jogos, propiciaram uma ampliação da abrangência de representações e de estratégias de contagem, atraindo o interesse do aluno em aprender a resolver tais problemas.

A introdução dos conceitos de **geometria analítica**, importante assunto de matemática do Ensino Médio, é outro gargalo, considerado pelo aluno, à primeira vista, como algo muito distante dos seus sentidos. Esse foi o assunto investigado por Ricardo Santos (2008), que apresenta uma proposta por ele implementada no segundo ano do Ensino Médio, em que a nova abordagem consiste em fazer uso do software Grafequation, através do qual o aluno, sob orientação do professor, tem a oportunidade de construir e visualizar os gráficos correspondentes às diversas fórmulas que se estudam em geometria analítica. Adicionalmente, disponibiliza-se um tutorial em linguagem HTML para uso do programa, bem como sugestões de aplicações para Ensino a Distância.

Exemplificamos a seguir três dissertações apresentadas por alunos deste Mestrado Profissionalizante que introduzem conteúdos que não costumam ser ministrados na Escola Básica. Elas foram a base da nossa disciplina do Curso de Especialização em Matemática – Mídias Digitais – Didática para Escola Básica (ver sítio http://www.ufrgs.br/espmat/) e trazem sugestões, em forma de sequências didáticas, de como esses conteúdos podem ser introduzidos no Ensino Médio. Tais sequências didáticas foram efetivamente implementadas e objetivamente mostram a viabilidade da inserção.

A teoria dos grafos tem uma história rica e atrativa. Além disso, muitos problemas atuais de logística e tecnologia são modelados por grafos. A dissertação de Gláucia Sarmento Malta (2008) faz uma sugestão de inserção de grafos na segunda série do Ensino Médio, mostrando como vários problemas clássicos dessa teoria (tais como o problema do caixeiro viajante, coloração, planaridade, etc.) podem ser discutidos de forma natural e significativa nesta etapa escolar. A metodologia utilizada foi a resolução de problemas.

A geração de figuras fractais, uma ferramenta atrativa, didática e que ilustra aplicações em várias áreas da matemática, é uma das motivações da dissertação de Vandoir Stormowski (2008). Usando a metodologia da engenharia didática, o autor desenvolve uma sequência didática que propicia ao aluno o aprendizado de matrizes, suas operações e definições através de transformações geométricas. Dentre as atividades apresentadas estão aquelas que, utilizando o software Shapari e a composição de transformações geométricas, permitem a introdução de fractais.

O uso de vetores no Ensino Médio dificilmente vai além de aplicações algébricas e quase nunca se dá um tratamento geométrico. O tema da dissertação de Pedro

Carneiro (2007) é a introdução da geometria vetorial no Ensino Médio. Utilizando a engenharia didática como metodologia, o autor desenvolve e implementa uma sequência didática que faz uso da geometria de vetores para o ensino de sistemas de equações lineares. Com o propósito de trazer um recurso que é facilitador da aprendizagem, o autor também constrói um software denominado "Vetores e Operações".

REFERÊNCIAS

CARNEIRO, Pedro Sica. *Geometria vetorial na escola:* uma leitura geométrica para sistemas de equações. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/13337>.

CARVALHO, Gustavo Quevedo. *O uso de jogos na resolução de problemas de contagem:* um estudo de caso em uma turma do 8º ano do Colégio Militar de Porto Alegre. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17845>.

KERN, Newton. *Uma introdução ao pensamento algébrico na sexta série através de relações funcionais*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/15584>.

MALTA, Gláucia Sarmento. *Grafos no Ensino Médio – Uma Inserção Possível.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/14829>.

SANTOS, Ricardo de Souza. *Tecnologias Digitais na Sala de Aula para Aprendizagem de Conceitos de Geometria Analítica:* Manipulações no Software Grafeq. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/15880>.

STORMOWSKI, Vandoir. *Estudando Matrizes a partir de Transformações Geométricas*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/14965>.

PARTE II

NOVAS ABORDAGENS NO ENSINO FUNDAMENTAL

A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE MEDIDA DE COMPRIMENTO E ÁREA NO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Viviane Raquel Backendorf

Muitas são as expectativas de um professor em relação à aprendizagem dos alunos, bem como as decepções quando essa aprendizagem não ocorre da maneira desejada.

Lecionando há alguns anos, especificamente a disciplina de Matemática, percebi que, com o passar dos anos, ela se torna cada vez mais interessante. Com a experiência que vai se acumulando a partir da interação com os alunos, criam-se novos métodos e experimentam-se novas abordagens para atingir o que realmente interessa: a aprendizagem.

Neste capítulo apresenta-se uma pesquisa desenvolvida com alunos de uma turma de quarta série do Ensino Fundamental sobre medidas de comprimento e de área. A ideia da pesquisa surgiu devido à percepção de que alunos de Ensino Médio apresentavam uma diversidade de incompreensões em relação ao tema, apesar do assunto ter sido apresentado em algum momento de sua vida escolar[1].

POR QUE O TRABALHO COM MEDIDAS EM UMA QUARTA SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL?

Da experiência de professora que leciona há 15 anos para as séries iniciais do Ensino Fundamental e há sete anos a disciplina de Matemática para o Ensino Médio, percebo que as dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Médio, em geral, não estão apenas relacionadas aos conteúdos desenvolvidos naquele momento, mas a conteúdos que fazem parte dos Planos de Estudos do Ensino Fundamental.

Um dos temas sobre o qual os alunos apresentam mais dificuldades é o das grandezas e medidas. Em algumas situações, por exemplo, na Geometria Analítica, quando lhes é solicitado o cálculo da distância entre dois pontos, principalmente quando precisam converter unidades de medida de centímetros para metros, metros para quilômetros e quilômetros para metros, eis que surge um problema a ser resolvido

---

1 A pesquisa e a proposta didática estão descritas na Dissertação de Viviane Raquel Backendorf (2010), desenvolvida sob orientação de Elisabete Zardo Búrigo, disponível em: <www.lume.ufrgs.br>. Acesso em agosto de 2010.

antes de partirem para o cálculo da distância. Em outras situações, como por exemplo, na Trigonometria, em que se faz necessário utilizar algum instrumento para medir comprimentos, são comuns perguntas do tipo: "começo a medir a partir do zero ou do um?".

Em função disso, decidi pesquisar sobre o tema medidas, que julgo importantíssimo na vida e no dia a dia das pessoas. Motivo esse, que me leva a acreditar que o tema deva ser bem trabalhado na escola.

Em nossa vida várias situações envolvem medidas. Mesmo quem nunca frequentou uma escola precisa medir. Atendo-nos às medidas de comprimento e superfície, é possível citar várias atividades diárias em que faz-se necessário saber medir essas grandezas. Por exemplo, para poder falar da distância de minha cidade à capital e a outras cidades, uso medidas. Para saber a largura de meu terreno, ou a quantidade de lajotas necessárias para cobrir o chão da sala, inevitavelmente preciso medir.

Na escola, o tema das medidas não está somente relacionado à Matemática, mas a outras áreas do conhecimento. Uma delas é a Física do Ensino Médio, que envolve distâncias e comprimentos em muitas situações. Logo, a dificuldade em medir e converter unidades de medidas vai interferir no entendimento do conteúdo propriamente dito de Física.

Assim, pensei em desenvolver uma pesquisa sobre o ensino das medidas, pois a maneira como os alunos de Ensino Médio e egressos[2] das escolas estão resolvendo situações que envolvem o tema está aquém do que se espera.

As dúvidas são muitas e os erros também, então, onde está o problema? Acredita-se que em alguma etapa do Ensino Fundamental o tema Medidas seja trabalhado nas escolas brasileiras, pois os Parâmetros Curriculares Nacionais que servem de referência para a elaboração dos Planos de Estudos das escolas e os livros didáticos que são distribuídos gratuitamente trazem esse tema como parte integrante dos conteúdos mínimos que devem ser trabalhados nessa etapa da escolarização.

Com o objetivo de fazer uma conexão entre o Ensino Fundamental e Médio, decidi elaborar uma sequência didática que promovesse a construção do conceito das medidas de comprimento e superfície. A aplicação se deu em uma turma de quarta série[3] do Ensino Fundamental, na qual muitos conceitos já haviam sido abordados como, por exemplo, as operações básicas e os números fracionários e decimais.

---

2 Segundo pesquisa realizada pelo INAF 2002 (Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional), em uma questão em que os sujeitos tiveram que medir uma fita com régua ou fita métrica, quase 20% dos sujeitos não responderam ou erraram a questão.

Apostando em uma proposta de construção dos conceitos de medidas, acreditou-se que, ao alcançarem o Ensino Médio ou concluírem seus estudos, esses alunos teriam melhores condições de resolver situações do dia a dia que envolvessem medidas.

A ELABORAÇÃO, A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E A PESQUISA

A construção da proposta didática foi motivada por preocupações com o ensino e o conhecimento dos alunos sobre o assunto medidas, como, também, por observações na atividade de ensino e informações anteriores buscadas com alunos de Ensino Médio. Para essa construção, procurou-se seguir algumas etapas, as quais foram:

1) Verificação das maiores dificuldades encontradas para o aprendizado de medidas de grandezas. Aplicou-se um questionário, a partir de observações feitas nas aulas com alunos do Ensino Médio.
2) Avaliação da importância do tema nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Em função da utilidade do conteúdo Medidas, acreditou-se que fosse um dos temas que deveria ser trabalhado de forma mais efetiva, logo, decidiu-se elaborar uma sequência de modo que ocorresse a construção do conceito de medida.
3) Identificação dos conceitos matemáticos necessários e envolvidos na compreensão e uso adequado das medidas. A partir de pesquisa realizada, foram selecionados alguns conceitos que participam direta ou indiretamente da construção do conceito de medida.
4) Planejamento de atividades que utilizassem questões do dia a dia do aluno, possibilitando a tradução dos conceitos fundamentais de medidas em situações futuras. Algumas atividades foram criadas, considerando o dia a dia da escola e dos alunos. Outras foram adaptadas de materiais encontrados sobre medidas, conforme constam nas referências.

Para que a sequência didática apresentasse um resultado mais satisfatório, procurou-se construir a proposta a partir de uma referência teórica que servisse de base para a elaboração e a utilização de determinadas atividades. Além disso, a sequência das atividades não foi apresentada ao acaso, mas de acordo com o processo de como se dá a compreensão do ato de medir.

3 A quarta série do Ensino Fundamental de oito anos corresponde ao quinto ano do Ensino Fundamental de nove anos.

Inicialmente, procurou-se conhecer mais sobre o ato de medir e sua compreensão. Para isso, pesquisou-se o que diziam matemáticos e estudiosos da psicologia cognitiva sobre o assunto.

Segundo o matemático Caraça (1952), comparam-se grandezas para medir, mas isso não é suficiente. É necessário que haja um único termo de comparação para todas as grandezas de mesma espécie. É necessário que seja estabelecida uma unidade única para medir o que se queira, e que se exprima o número de vezes que a unidade escolhida cabe naquilo que se pretende medir. Apontando, assim, que no problema da medida há três fases e três aspectos distintos: a escolha da unidade, considerando a praticidade, comodidade e economia; a comparação com a unidade; a expressão do resultado da comparação por um número.

Segundo os estudiosos da psicologia, Nunes e Bryant (1997), o ato de medir não é tão simples quanto parece. Não basta pegar uma régua, outro instrumento ou um sistema numérico e dar o tamanho dos objetos. Esse ato envolve dois componentes diferentes e separáveis. Um dos componentes é a inferência lógica ou inferência transitiva, em que comparamos grandezas por meio de uma relação existente entre elas. É preciso apropriar-se da lógica para medir. Outro importante componente envolvido no ato de medir é a compreensão da unidade, caracterizada como uma exigência fundamental, pois quando medimos estamos preocupados com quantidades reais e com as relações de tamanho como maior e menor. É a quantidade constante que as unidades têm e que permite fazer-se uma comparação entre grandezas.

Conforme Plaza e Belmonte (1994), a prática de medir não é algo fácil, portanto, as crianças devem praticar e realizar o ato de medir. Além disso, são listados estágios que a criança deve superar para utilizar corretamente e, ao mesmo tempo, construir seus conhecimentos sobre medidas. Esses estágios, Plaza e Belmonte (1994) ordenam da seguinte forma:

1. consideração e percepção de uma grandeza como uma propriedade de uma coleção de objetos;
2. conservação de uma grandeza: esse estágio considera-se superado quando a criança adquire a ideia de que, mesmo mudando a posição, o objeto permanece constante;
3. ordenação em relação a uma grandeza dada;
4. relação entre grandeza e um número dado: quando a criança consegue relacionar uma grandeza a um número, ou seja, exprimir uma medida em forma de número.

Segundo Plaza e Belmonte (1994), tendo a criança conseguido alcançar esses estágios, por meio de uma maturidade mental obtida pela experiência proporcionada com atividades desafiadoras, de forma que possa testar e verificar seus resultados, ela terá condições de realizar o ato de medir.

Em relação à compreensão da grandeza de comprimento, Piaget, Inhelder e Szeminska (1948) afirmam que é através da transformação lógica e matemática que a criança elabora por meios próprios suas noções geométricas, como a conservação das distâncias.

Ainda, conforme os autores, é preciso diferenciar a conservação e a medida dos comprimentos da conservação e a medida das distâncias. Isso porque são significados bem diferentes do ponto de vista psicológico. Enquanto o comprimento se dá sobre os objetos, a distância está no espaço.

Com base nessas referências, percebeu-se que a construção do ato de medir não está isolada, mas há muitos outros conceitos envolvidos nessa construção. Por isso, pesquisou-se também sobre a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gèrard Vergnaud (2008, p. 32):

> A Teoria dos Campos Conceituais é o resultado de muita pesquisa com estudantes, que nos leva a compreender como eles constroem conhecimentos matemáticos. Ela é fundamental para ensinar a disciplina, pois permite prever formas mais eficientes de trabalhar os conteúdos.

Segundo Moreira (2002, p. 8), para Vergnaud, campo conceitual é:

> [...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição.

Na organização de uma sequência de atividades de ensino voltada para a aprendizagem com medidas, percebeu-se a relação existente entre o estudo das medidas e as estruturas multiplicativas, como são estudadas na teoria dos Campos Conceituais. Em várias situações que apareceram no decorrer das atividades propostas, as estruturas multiplicativas mostraram-se úteis para a solução dessa atividades, principalmente quando se tratava de conversões de unidades de medidas.

Conforme Vergnaud (1983, p. 127):

> [...] seria equivocado separar o estudo de conceitos interligados. No caso das estruturas multiplicativas, sabe-se que é expressamente errada a separação do estudo da multiplicação, divisão, frações,..., pois não são conteúdos matematicamente independentes, mas estão pre-

> sentes simultaneamente em muitos problemas que os estudantes encontram (tradução nossa).

Vergnaud (1983) localiza os problemas multiplicativos no campo conceitual das estruturas multiplicativas. A relação existente ocorre entre quatro quantidades e dois tipos de medidas. E, segundo ele, as estruturas multiplicativas consistem em um conjunto de problemas que podem ser classificados em três subtipos:

a) Isomorfismo de Medidas;
b) Produto de Medidas;
c) Proporção Múltipla.

Desses subtipos, utiliza-se em nossa pesquisa o isomorfismo de medidas, que consiste na proporção direta e simples entre dois espaços de medida M_1 e M_2, já que ele descreve um grande número de situações do cotidiano e de técnicas que incluem, por exemplo:

a) compartilhamento igual (pessoas e objetos);
b) preço constante (bens e custo);
c) velocidade (tempo e distâncias);
d) densidade constante em uma linha, superfície e volume.

No planejamento, partiu-se de atividades que utilizavam o próprio corpo, pois em muitas atividades de seu dia a dia, a criança utiliza o próprio corpo para medir, contar ou comparar. Como o objetivo da proposta é a construção do conceito de medida, decidiu-se realizar atividades práticas para que as crianças vivenciassem cada etapa da construção do conceito de medida, contribuindo para o entendimento da etapa seguinte.

As atividades da sequência foram organizadas em blocos, para que a construção do conceito de medida se desse de forma progressiva. As atividades articulam-se umas com as outras, sem "queimar etapas".

Considerando as etapas para a construção do conceito de medida, bem como o desenvolvimento cognitivo, o planejamento foi organizado de modo a contemplar os seguintes blocos: a construção da unidade; a conversão de unidades; e o perímetro e área.

A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Depois de elaborar as atividades, partiu-se para a sua aplicação em uma turma de quarta série do Ensino Fundamental, buscando verificar-se se é possível promover a compreensão do conceito de medida nessa etapa da escolaridade. Para que a partir dessa aplicação fosse possível fazer uma análise das estratégias e dos esquemas utilizados pelos alunos, optou-se pela pesquisa qualitativa em forma de estudo de caso. Decidiu-se fazer o estudo com uma única turma para que fosse possível analisar mais aprofundadamente cada situação vivenciada em sala de aula.

A pesquisa corresponde ao que dizem Lüdke e André (1986, p. 11 e 17):

> [...] a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra através do trabalho intensivo de campo.
> [...] O estudo de caso é o estudo de um caso, seja ele simples e específico [...].O caso é sempre bem delimitado, devendo ter seus contornos claramente definidos no desenrolar do estudo. O caso pode ser similar a outros, mas é ao mesmo tempo distinto, pois tem um interesse próprio, singular.

A implementação da proposta foi registrada por meio de gravações, registros das falas dos alunos, fotos e cópias dos trabalhos dos alunos envolvidos.

A proposta foi implementada em uma turma de 15 alunos da quarta série da Escola Municipal de Ensino Fundamental Pedro Pretto de Travesseiro[4], da qual eu era professora. As aulas foram ministradas de 23 de setembro de 2008 a 28 de outubro de 2008, no turno da manhã, totalizando 13 encontros de uma hora cada. A turma era composta por 15 alunos, dos quais 13 estavam com dez anos, um tinha 11 anos e um tinha 12 anos.

Os alunos participaram de todo processo de construção dos conceitos envolvidos na medida, cuja aplicação deu-se em etapas, de acordo com o que havia sido pesquisado anteriormente.

CONSTRUÇÃO DA UNIDADE

Em um primeiro momento, as atividades propostas levavam à construção da unidade de medida. A turma foi dividida em grupos. Cada grupo recebeu a seguinte atividade para resolver.

---

4 Travesseiro é um município do Rio Grande do Sul que possui 2.471 habitantes, conforme IBGE 2009. Situa-se no Vale do Taquari, na microrregião Lajeado-Estrela e mesorregião Centro Oriental Rio-Grandense a 114,41km de Porto Alegre. Os municípios limítrofes são Nova Bréscia, Capitão, Coqueiro Baixo, Pouso Novo, Marques de Souza e Arroio do Meio.

Quadro 1 – Atividade de medidas com o uso do corpo

Para melhorar o ambiente escolar, decidiu-se: - colocar sarrafos nas paredes da sala de aula em que não há quadro nem janelas; - colocar trilhos de alumínio nas janelas para colocar outro tipo de cortinas. Ajudem-nos a descobrir a quantidade de material necessário. Cada grupo deverá encontrar uma forma de medir os dois itens sem utilização de qualquer instrumento, somente o corpo. Utilizarão lápis e papel para registrar.

Fonte: Viviane Raquel Backendorf (2008)

Como a proposta era medir as paredes e as janelas sem utilizar instrumentos, somente partes do corpo, houve certa resistência dos alunos, pois se viam perdidos sem poder utilizar régua ou trena. Porém, logo todos escolheram uma parte do corpo e passaram a medir as paredes.

Figura 1– Utilizando o corpo como unidade de medida
Fonte: Viviane Raquel Backendorf (2008)

Enquanto mediam o que lhes fora solicitado, dois grupos discutiam entre si, pois ambos haviam utilizado o palmo para medir as paredes, no entanto, a quantidade de palmos obtida era diferente, mesmo tendo medido a mesma parede. A dúvida foi resolvida quando um componente de um dos grupos observou que poderia haver tamanhos diferentes de palmos. Com isso, alguns alunos envolvidos na discussão demonstraram estar cientes de que a medida da mesma parede, quando utilizamos unidades iguais, resulta no mesmo número.

Durante as apresentações das medições realizadas, percebeu-se a diversidade de unidades escolhidas, o que gerou certa desconfiança entre os alunos em relação aos valores finais encontrados, que foram todos diferentes.

Discutindo e comentando sobre as unidades utilizadas, que foram palmo, corpo, passo e antebraço, um aluno disse que todos haviam medido de forma correta, mas que os grupos obtiveram resultados diferentes porque utilizaram unidades diferentes para medir as mesmas paredes e janelas.

Em função dessas diferenças nos valores finais encontrados, vários alunos comentaram que, para comparar as medições feitas e saber se eram confiáveis ou não, deveríamos comparar as medidas obtidas com os palmos entre si e, em outro grupo, deveríamos comparar passo, corpo e antebraço. Nota-se que eles tinham uma noção de que, mesmo tratando-se de unidades diferentes, as medidas poderiam ser classificadas de acordo com seu tamanho, sendo que a quantidade de unidades deveria aproximar-se, quando o tamanho das unidades utilizadas fosse também próximo. Nessa situação, foi possível observar na fala dos alunos um teorema em ação[5]: "Quanto maior a unidade utilizada, menor será a quantidade de vezes que a unidade se repete."

No entanto, como o objetivo da atividade era comprar sarrafos e trilhos de alumínio para as cortinas a partir das medições realizadas, os alunos concluíram que, na verdade, depois de todas as medições realizadas, eles não tinham condições de dizer qual a quantidade necessária de material. Em função desse problema, foi sugerido por um dos alunos que utilizassem somente uma parte do corpo e, de preferência, da mesma pessoa. Além disso, alguns alunos comentaram que, ao invés de utilizarem unidades grandes, deveriam utilizar unidades como um dedo ou até cabelo para obter maior precisão. Porém, alguns consideraram a utilização do cabelo um absurdo, pois iria demorar demais e gerar confusão na contagem para medir as paredes.

A partir desses comentários, foi possível observar sua compreensão de que unidades menores resultam em maior precisão, pois é possível aplicar um maior número de unidades inteiras naquilo que está sendo medido. No entanto, unidades menores podem tornar-se um incômodo e gerar confusão quando a diferença entre a unidade utilizada e o objeto a ser medido é muito grande, já que será necessário repetir muitas vezes a mesma unidade.

5 Conforme Vergnaud (2009, p. 23): "Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação". A criança encontra um grande número desses teoremas quando atua sobre o real e resolve problemas no espaço, no tempo, no domínio das quantidades e das grandezas.

Segundo Caraça (1952), a escolha da unidade faz-se de acordo com o caráter prático de comodidade e de economia. Portanto, é necessário que se consiga expressar facilmente o que se mediu.

Verificou-se que os próprios alunos deixaram transparecer a compreensão de que podemos expressar as medidas de acordo com a situação. Dessa forma, tem-se uma ideia mais clara do resultado da medição que será expresso com facilidade.

Foi possível construir esse entendimento, pois a experiência fez com que decidissem pela comodidade, reconhecendo a importância da escolha da unidade adequada, de acordo com o objeto a ser medido, tratando como mais precisa a medição realizada com a unidade menor, enquanto a unidade maior era vista como a mais prática. Percebe-se assim que ocorreu a compreensão da unidade de medida.

CONVERSÃO DE UNIDADES

Durante os comentários sobre as medições realizadas, os alunos falaram da confusão que gera a utilização de diferentes unidades para medir o mesmo objeto. Eles próprios sentiram a necessidade de padronização, pois mediram as mesmas paredes, no entanto, não tinham condições de dizer quem havia medido corretamente.

Então, decidiram eleger como unidade padrão da turma o "palmo aberto e em pé". Copiaram o desenho de um palmo em uma folha de cartolina e todos os grupos utilizaram esse instrumento (palmo de cartolina) para medir as paredes. Como o palmo não cabia um número inteiro de vezes na parede, acharam interessante que se criasse uma unidade única, como parte do palmo. Os alunos foram colocando os dedos encostados uns nos outros sobre o palmo de cartolina. Todos eles testaram e para a maioria cabiam dez dedos. Para alguns cabiam nove e para outros até 11. Assim, decidiram repartir o palmo em dez partes iguais que chamariam de "dedos". Surgiu a dúvida: "E se não couber mais um dedo?" Decidiram repartir o dedo em duas partes iguais, que chamariam de "dedinhos".

Nessa atividade, percebeu-se a presença da transitividade, pois comentavam que, quanto maior a distância a ser medida, maior a quantidade de vezes que a unidade padrão, o palmo, iria se repetir.

Da mesma forma como sentiram a necessidade de escolher uma unidade padrão para a turma, sentiram a necessidade de converter a unidade padrão, o palmo, para o Sistema Métrico Decimal, para poderem se comunicar com um maior número de pessoas, conseguindo informar, a quem quer que fosse, a quantidade necessária de material. Para resolver o problema dos sarrafos e trilhos, decidiram medir com uma régua o palmo utilizado para medir as paredes e, assim, expressar as medidas encontradas em metros, centímetros e milímetros, caso fosse necessário. A partir daí, os alunos abandonaram o instrumento utilizado até então, o palmo de cartolina.

Depois dessa atividade, foram realizadas várias outras em que os alunos tiveram que converter unidades de medida. Surgiram diferentes estratégias e esquemas de resolução. Os alunos utilizaram bastante as estruturas multiplicativas, em especial, a proporcionalidade.

O exemplo que segue é de uma atividade na qual os alunos, divididos em grupos, tiveram que converter vários valores em diferentes unidades, de metros para centímetros e milímetros e vice-versa. Nesse exemplo, os alunos tiveram que converter 15 metros para centímetros e milímetros. O grupo que apresentou essa solução utilizou a proporcionalidade e associatividade.

Quadro 2– Soluções de alunos para problema de conversão de medidas

15m	10m =1000cm =10000mm 5m = 500cm = 5000mm
	10m + 5m = 15m
	1000cm + 500cm = 1500cm
	10000mm + 5000mm = 15000mm

Fonte: Viviane Raquel Backendorf (2008)

NAS MEDIÇÕES, O MILÍMETRO FAZ DIFERENÇA?

Comentando sobre a partição do metro em centímetros e a expressão do centímetro em milímetros, surgiu a dúvida em relação ao milímetro e à possibilidade de se obterem partes dele. Voltando à sugestão dada por um aluno de medir as paredes com um fio de cabelo, decidiram verificar a espessura desse fio. Pegaram uma régua e foram colocando alguns fios de cabelo lado a lado entre duas marcas do milímetro. Observaram que um fio de cabelo pode ser colocado lado a lado, em torno de cinco ou seis vezes dentro do milímetro.

Como haviam observado isso, perguntei se o milímetro seria a menor unidade de medida existente. Por um instante, eles ficaram quietos, aí um dos alunos disse:

– *Vai até o infinito*.

Nesse momento outro aluno tirou de sua mochila uma lupa. Colocou-a sobre a régua, dizendo que existem coisas muito pequenas que, se observarmos com uma lupa ou microscópio, conseguimos ver.

A partir desses comentários, foi discutida a importância dada à precisão para medir.

Em uma determinada situação resolvida pelos alunos, os resultados tiveram uma variação de quatro milímetros. Em função disso, questionou-se o grupo sobre o motivo pelo qual isso teria acontecido. Então, um dos alunos respondeu: "Faltou precisão na hora de medir".

Questionei-os sobre essa diferença e a interferência ou não nas medições realizadas. Dei exemplos de onde poderiam sobrar ou faltar quatro milímetros:

– Tenho esse bloco de folhas na mão. Se eu fosse acrescentar ou tirar quatro milímetros na espessura ou na grossura, faria diferença?

Uma aluna respondeu:

– Se tirássemos quatro milímetros, tu ficarias sem folhas.

Outro aluno deu um exemplo:

– Se meu pai instalasse uma porta que tivesse quatro milímetros a mais ou a menos, iria dar problema.

Aproveitei esses comentários para falar sobre as situações em que faz diferença quando faltam ou sobram milímetros. Perguntei se representaria um problema a sobra de quatro milímetros ou a falta de quatro milímetros em uma das paredes da quadra de esportes. Responderam que não, pois como a quadra é grande, essa diferença nem seria percebida.

Esse questionamento foi interessante, pois surgiram situações em que realmente faz diferença ter milímetros a mais ou a menos e outras em que essa diferença é irrelevante. Dessa forma, observou-se a percepção, por parte dos alunos, de que as unidades podem ser divididas em unidades menores, de acordo com a necessidade.

PERÍMETRO

Outro bloco desenvolvido com várias atividades foi o da medida do perímetro de algumas figuras planas. Trabalhou-se a ideia de contornos de objetos e figuras. Ao medirem a horta, que tem a forma de retângulo, surgiu a ideia do perímetro como soma dos lados. Assim, em relação ao quadrado, retângulo e triângulo, as atividades levaram os alunos a escrever o perímetro em forma de cálculo, encontrando mais de uma maneira de expressar o perímetro de cada figura, de acordo com o número e as medidas dos lados. Já em relação ao círculo, fez-se longa discussão, pois os alunos queriam de alguma maneira encontrar um modo de calcular o perímetro do círculo. Perguntei:

– E se eu tiver que encontrar o perímetro de um círculo?

Uma das alunas foi até o quadro, desenhou um círculo e sugeriu o seguinte: fazer "traços" no meio do círculo, um na vertical e outro na horizontal, obter a medida de cada um deles, multiplicar por dois, e daí somar.

Outro aluno sugeriu que se medisse com a trena até o meio do círculo e se multiplicasse o valor obtido por dois.

Com essa explicação, percebeu-se a importância dada às linhas retas, ou, então, aos segmentos de reta. Independente da situação, a solução é buscada nas retas. Essa utilização de linhas retas pode estar relacionada ao fato de as réguas serem retas, e de os instrumentos utilizados pelos alunos serem rígidos.

Após várias sugestões, todas baseadas no cálculo para encontrar o perímetro, uma aluna disse:

– Eu acho que é melhor pegar um metro que mede tecido, uma fita métrica e medir tudo ao redor.

Perguntou-se, então, por que não utilizariam a régua. Eles responderam que "ela é reta, não se entorta, aí não dá para medir certo." Ainda perguntou-se:

– Se tivéssemos que cercar com tela um canteiro em forma de círculo, como seria melhor proceder?

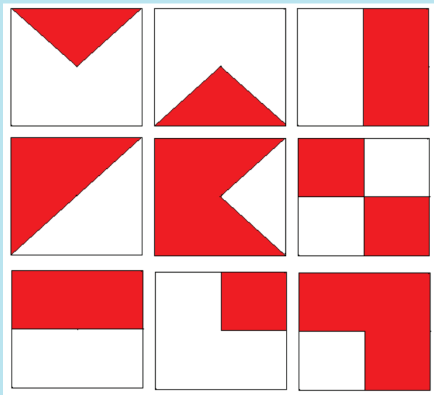
Os alunos acharam que o melhor seria medir ao redor, pegar uma trena e contornar o canteiro. Assim, concluíram que, nesse caso, o melhor seria utilizar um instrumento flexível. Perceberam que não tinham o conhecimento suficiente para escrever o cálculo do perímetro de uma circunferência sem medi-la diretamente, como acontecia nas outras figuras (poligonais) em que, dependendo do caso, bastava medir um dos lados.

Figura 2 – Verificando o perímetro de corpos redondos
Fonte: Viviane Raquel Backendorf (2008)

Em relação à área, iniciou-se o trabalho com uma atividade em duplas, em que os alunos tiveram que comparar o tamanho de regiões coloridas entre si.

Quadro 3 – Atividade de comparação de áreas de figuras

* Quais das figuras abaixo possuem região colorida do mesmo tamanho? Justifique.



Atividade adaptada: UMA DISCUSSÃO SOBRE O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO NO ENSINO FUNDAMENTAL - LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA (LEMAT-DMAT-UFPE)

Fonte: Viviane Raquel Backendorf (2008)

Identificou-se cada quadrado com uma letra de A até I, na ordem da esquerda para a direita e de cima para baixo:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Foi entregue uma folha com a atividade para cada dupla e solicitou-se que anotassem os resultados sem comentá-los com os demais colegas. Assim, cada dupla começou a discutir entre si quais as figuras que poderiam ter região colorida de mesmo tamanho. Eles se perguntaram se poderiam recortar as figuras e obtiveram confirmação. Observando o trabalho das duplas, percebeu-se que todas elas comparavam os triângulos entre si, retângulos entre si e quadrados entre si. Uma aluna, muito motivada, descobriu que era possível formar outras figuras a partir dos triângulos e quadrados, afirmando:

– Se dividirmos um quadrado ao meio, encontramos dois triângulos.

Enquanto isso, uma das duplas juntava a parte colorida de um quadrado com a de outro, tentando preencher todo o quadrado. Dessa forma, cada dupla ia descobrindo outras formas de observar cada quadrado e suas regiões coloridas.

Durante essa análise, foi perguntado:

– O triângulo colorido da figura D é o que em relação ao quadrado?

Eles responderam que o triângulo era a metade do quadrado. O mesmo foi feito com as outras figuras, cuja parte colorida representava a metade do quadrado, e eles responderam corretamente.

Perguntou-se sobre o quadradinho pequeno da figura H e o seu tamanho em relação ao quadrado grande. Eles disseram que seria a quarta parte. Em relação à mesma figura, uma aluna fez o seguinte comentário:

– E se dividirmos esse quadradinho em triângulos, vamos ter oito triângulos.

Foi possível falar sobre as figuras de modo a considerar o triângulo como uma figura capaz de formar retângulos e/ou quadrados. Os alunos utilizaram seus conceitos de triângulo, retângulo e quadrado para resolver a atividade, e, ao mesmo tempo, iniciaram a construção da ideia de área dessas figuras e da relação entre as mesmas.

No início, alguns alunos sentiram necessidade de recortar para compor, decompor ou comparar as figuras. Com a evolução da atividade, foram desfazendo-se dessa necessidade de recortar com a tesoura, pois conseguiam fazer a relação por meio da observação e da utilização de conhecimentos já adquiridos anteriormente, como metade e um quarto. Logo, percebeu-se que, durante a atividade, foram internalizando a relação parte/todo e parte/parte, apoiados nas operações concretas anteriormente realizadas.

Várias outras atividades sobre a área e o perímetro de retângulos e quadrados foram realizadas. Partiu-se, então, para a avaliação da área aproximada de regiões irregulares.

ÁREA DE REGIÕES IRREGULARES

Com o objetivo de obter aproximações da área de regiões irregulares, foram formadas duplas e entregues a cada um deles dois desenhos de regiões não poligonais (Figura 3).

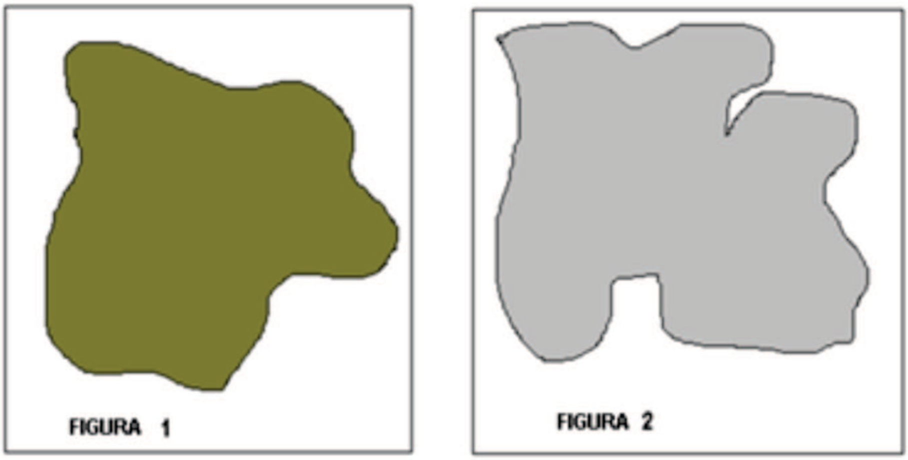


Figura 3 – Utilizada em atividade de avaliação de área de regiões irregulares
Fonte: Viviane Raquel Backendorf (2008)

Falamos dos mapas e perguntei o que seria um mapa, então um aluno disse:

– *Mapa é uma planta baixa de algum lugar.*

Comentei que as figuras com as quais eles iriam trabalhar haviam sido criadas no computador, mas que poderiam ser utilizadas para posteriormente se trabalhasse com mapas de verdade. Falou-se sobre a irregularidade dos mapas, que nem sempre se teria um quadrado ou retângulo para calcular a área e, por isso, o desafio seria descobrir a área aproximada das duas figuras.

Deram várias sugestões, entre as quais duas que orientaram o início do trabalho

– *Fazer quadradinhos.*

– *Fazer um retângulo ao redor.*

Assim, entregou-se a cada dupla uma malha quadriculada feita em lâmina de retroprojetor, cujos quadradinhos possuíam 1 centímetro de lado. Questionados sobre a área de cada quadradinho, de forma convicta responderam que seria um centímetro quadrado[6].

Iniciaram a atividade e observei as diferentes formas que utilizaram para calcular as áreas das figuras.

Percebeu-se, novamente, que calcular área havia se tornado simples, pois decomporiam a figura em quadradinhos para depois somente contá-los. Mostraram também que, falando em área, tratamos de unidades de medida dadas pelas áreas

6 Os alunos souberam falar de um centímetro quadrado, pois em atividade anterior haviam construído o metro quadrado.

de retângulos ou quadrados[7], pois contando a quantidade de quadradinhos que cabem em uma região consegue-se contar o espaço ocupado.

A grande maioria das duplas começou a contagem pelos quadradinhos inteiros e depois juntavam as partes. Uma dupla pensou em desenhar um retângulo ao redor de cada figura e descontar, no final, as partes do retângulo que não continham a figura.

Com essa atividade, muitas habilidades e conceitos foram empregados, como as partes e seu deslocamento e união.

Partindo dessas figuras, comentei com os alunos sobre plantas de casas e mapas de municípios como o nosso, por exemplo. Perguntei se seria possível transferir para um papel o espaço ocupado por nosso município. Prontamente um aluno respondeu:

- Claro que é, se até tem mapa do Brasil!

Com uma prática semelhante, tentamos aproximar a área do município de Travesseiro. Os alunos encontraram valores muito próximos do real, o que os deixou convictos de que a atividade realizada era concreta e tinha sua utilidade.

O QUE É POSSÍVEL COMENTAR SOBRE A PESQUISA

A elaboração, a partir dos estudos realizados, e a aplicação da sequência didática fizeram com que eu repensasse a metodologia que adotava em sala de aula. Foram construídos novos conceitos e aprendi muito com os esquemas e estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das atividades propostas.

Deu tudo certo? Todos aprenderam tudo e agora sabem tudo? Não.

O que posso afirmar é que o conceito de medida foi construído, em especial, a noção de unidade de medida. A conversão de unidades de medida, que é um empecilho no Ensino Médio, foi tratada com melhor desenvoltura. A utilização das estruturas multiplicativas teve papel fundamental para que a conversão de unidades fosse construída e aprendida.

As dificuldades apareceram e as dúvidas não foram todas resolvidas. A diferenciação entre perímetro e área foi a maior dificuldade enfrentada, e as atividades propostas na sequência não foram suficientes para desenvolver melhor esses conceitos. A utilização de papel quadriculado nas atividades de medida do perímetro e área da horta pode ter contribuído para essa confusão. No cálculo da área, além de contar os quadradinhos que ocupavam o espaço, muitos ainda multiplicavam por quatro, contando todos os lados desses quadradinhos.

7 Poderiam ser outras figuras, mas essas foram as que apareceram no trabalho.

A fundamentação teórica influenciou muito na direção dada à pesquisa e ajudou a explicar erros ocorridos na resolução do que era proposto.

O aspecto mais positivo foi a participação dos alunos. Em muitos casos, os esquemas e as estratégias utilizadas por eles surpreenderam, pois surgiam soluções que eu não imaginava poderem aparecer entre alunos de uma quarta série do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BACKENDORF, Viviane R. *Uma sequência didática de medidas de comprimento e superfície no 5° ano do ensino fundamental:* um estudo de caso. 187p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2010.

_______. *Fotos das crianças – prática em sala de aula*. (2008). 2 unid.; coloridas; 13cm x 18cm.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Tipografia Matemática, 1952.

LIMA, Paulo F.; BELLEMAIN, Paula M. B. Habilidades matemáticas relacionadas com grandezas e medidas. In: FONSECA, Maria da C. F. R. *Letramento no Brasil:* habilidades matemáticas - reflexões a partir do INAF 2002. São Paulo: Global/Ação Educativa Assessoria, Pesquisa e Informação/Instituto Paulo Montenegro, 2004.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. *Pesquisa em Educação:* abordagens qualita tivas. São Paulo: EPU, 1986.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemática.* Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel; SZEMINSKA, Alina. *La géométrie spontanée de l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France, 1948.

PLAZA, Maria del C. C.; BELMONTE, Juan M. *El problema de la medida:* didactica de las magnitudes lineales. Madrid: Sintesis, 1994.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York: Academic Press Inc, 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, p. 75-90, 1986.

______. Todos perdem quando não usamos a pesquisa na prática. In: GROSSI, Gabriel P. Fala, mestre. *Revista Nova Escola*, São Paulo, ano XXIII, n. 215, p. 32-36, 2008.

______. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano A. (Org.). *A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. Curitiba: CRV, 2009.

INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO POR MEIO DE RELAÇÕES FUNCIONAIS

Newton Bohrer Kern
Maria Alice Gravina

1. INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma proposta didática para o ensino introdutório de álgebra na sexta série (sétimo ano) do Ensino Fundamental, por meio do estudo de relações funcionais, usando diferentes situações-problema e, dentre elas, situação de modelagem matemática. Na viabilização da proposta, foi de grande importância a utilização do objeto de aprendizagem "Máquinas Algébricas"[8], pelas suas possibilidades de concretização de relações funcionais em interface adequada para alunos de sexta série. As atividades desenvolvidas com esse objeto propiciaram a evolução dos alunos no uso da linguagem algébrica: de início apenas raciocínios de natureza aritmética estavam explícitos, mas, aos poucos, raciocínios algébricos foram se fazendo cada vez mais presentes. Ao final da experimentação com a turma de sexta série, os alunos mostraram entendimento sobre as relações funcionais estudadas – envolvendo essencialmente o conceito de proporcionalidade – sabendo expressá-las via "leis", tabelas e gráficos. Como produto resultante deste trabalho, temos uma sequência de atividades, organizada em grau crescente de complexidade, sempre contemplando os importantes momentos de exploração no objeto de aprendizagem "Máquinas Algébricas". A sequência é apresentada integralmente como anexo no texto completo da dissertação de Mestrado *Uma introdução ao pensamento algébrico na sexta série através de relações funcionais* (KERN, 2008)[9]; neste capítulo são apresentados alguns elementos da sequência e de sua experimentação em sala de aula.

A motivação para a realização deste trabalho está diretamente ligada à nossa prática profissional. Pela nossa experiência pessoal[10], entendemos que os conteúdos de Matemática trabalhados nas quinta e sexta séries (sexto e sétimo anos) são mais

8 Este objeto foi desenvolvido no Instituto Freudenthal (disponível em: <http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html>. Acesso em: 02 jul. 2011) e uma versão em português está disponível no *site* EDUMATEC, em <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>, no *link* Atividades/Atividades Diversas de Funções e Gráficos/Máquinas Algébricas para o Ensino Fundamental.
9 O texto completo da dissertação está disponível na Biblioteca Virtual da UFRGS, em: <http://www.lume.ufrgs.br>. Acesso em: 02 jul. 2011.
10 O primeiro autor do trabalho é professor em séries finais do Ensino Fundamental desde 1996.

bem aceitos por parte dos alunos em geral, até porque grande parte deles têm aplicação direta no cotidiano. Os alunos não costumam questionar a necessidade de aprender a trabalhar com números negativos, unidades de medidas, números decimais, porcentagens ou proporções, por exemplo. Porém quando se inicia o estudo de conteúdos algébricos (equações, polinômios, produtos notáveis, fatoração), há um questionamento sobre a necessidade da formalização algébrica, sobre a utilidade do conteúdo trabalhado. A mudança de um trabalho voltado para a Matemática concreta, diretamente ligada a situações do dia a dia, para um trabalho voltado para aspectos mais abstratos, mais afastados do cotidiano, é um dos motivos para as dificuldades no ensino e na aprendizagem da Matemática. Em particular, o aprendizado da álgebra tem se constituído como um dos maiores desafios no ensino de Matemática do Ensino Fundamental.

2. SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA

Como deveria ser feita a introdução à linguagem algébrica? Existem diferentes ideias e diferentes enfoques. Charbonneau (1996, p. 34) diz que a álgebra seria “[...] um caminho para manipular relações”. Usiskin (1997) chama a atenção para as diferentes interpretações e concepções associadas à álgebra: aritmética generalizada; estudos de procedimentos para resolução de problemas; estudo de relações entre quantidades; e o estudo de estruturas e propriedades.

Para o ensino da álgebra, temos como recomendações gerais nos Parâmetros Curriculares Nacionais[11] (PCNs):

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (BRASIL, 1998, p. 115).

De forma mais específica, os PCNs destacam as diferentes dimensões a serem contempladas no estudo da álgebra escolar, sinalizando as diferentes características do uso das letras, bem como os diferentes conceitos e procedimento que se apresentam em cada uma destas dimensões. Há, nos Parâmetros (BRASIL, 1998, p. 116), um interessante diagrama que sistematiza essa recomendação, o qual transcrevemos na Figura 4.

---

11 Este documento está disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 02 de Julho de 2011

Figura 4 – Álgebra no Ensino Fundamental
Fonte: Kern, 2008

E, neste documento, alerta-se para o fato de que os professores não desenvolvem todas essas dimensões, já que privilegiam fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações. Dessa forma, os professores perdem a oportunidade de realizar um ensino que articula o desenvolvimento das diferentes competências que concorrem para o amadurecimento de raciocínios de natureza algébrica.

Na dissertação em que este capítulo está baseado (KERN, 2008), fizemos uma análise do ensino de álgebra em livros didáticos aprovados pelo MEC. A maioria dos livros traz uma abordagem na forma de resolução de problemas. No entanto, a justificativa da necessidade do uso da linguagem algébrica para expressar equações que resolvem problemas acaba perdendo a força porque, em muitos casos, o aluno resolve os problemas propostos com simples raciocínio aritmético, ou seja, os problemas motivadores não são os mais apropriados.

Dentre as quatro dimensões apontadas anteriormente, escolhemos a "Funcional" para desenvolver a proposta didática de introdução ao pensamento algébrico, e nela também vamos contemplar a modelagem matemática. É disso que vamos tratar nas próximas seções.

3. A CONSTRUÇÃO DE UMA PROPOSTA

Objetivando a construção de uma proposta didática que propiciasse uma melhoria no aprendizado da álgebra, concentramo-nos nas diferentes diretrizes que frisam a importância da álgebra no desenvolvimento do aluno. Essas diretrizes apontam que é na observação das relações entre os números, na observação das diferentes formas de representar situações matemáticas – gráficos, tabela, expressão – que o aluno desenvolve o pensamento algébrico, e não por meio do ensino centrado na resolução mecânica de exercícios.

O processo de construção da proposta, e do resultante produto didático, foi desenvolvido dentro dos moldes da Engenharia Didática. Essa é uma metodologia de pesquisa não apenas teórica, mas voltada para as experiências em sala de aula. Adotamos a organização de pesquisa delineada pela Engenharia Didática e de acordo com essa organização desenvolvemos o processo de criação, experimentação e análise de nossa proposta didática.

Entendendo que na dimensão das relações funcionais podemos também contemplar, em parte, outras das dimensões que são recomendadas para o ensino da álgebra escolar (destacadas na seção anterior), fizemos a nossa primeira escolha didática: tomar a perspectiva das relações funcionais, aqui incluindo a modelagem, como um caminho para a introdução à álgebra na sexta séria do Ensino Fundamental.

A abordagem via modelagem, sendo uma atividade prática e de experimentação com coleta de dados, pode proporcionar momentos muito ricos para discussão em sala de aula. Para a execução de uma atividade de modelagem é necessário se fazer uma preparação, escolher alguma situação em que os alunos possam efetuar medições, organizando-as em uma tabela. Depois de trabalhar com a tabela, os alunos podem estabelecer relações entre os valores encontrados, descobrindo uma regra de comportamento, a ser expressa de forma algébrica.

Nossa segunda escolha didática apoia-se em princípios tomados da “Educação Matemática Realista (EMR)”, desenvolvida pelo Instituto Freudenthal da Universidade de Utretch – Holanda[12], nos meados da década de 1970, como uma reação aos efeitos da matemática moderna, em particular quanto à ênfase que começou a ser dada às estruturas e aos formalismos no ensino da matemática escolar. Um dos princípios da EMR é que a matemática não deve ser transmitida, mas descoberta e reinventada pelos alunos, devendo ser vivida como uma atividade humana, para que se torne então um conhecimento pleno de significado.

Com o propósito de contemplar um processo de aprendizagem em contexto “realista”, o Instituto Freudhental vem fazendo uso de tecnologia informática, especialmente na forma de “objetos de aprendizagem”, que são pequenos *softwares* (*applets*), de natureza interativa, voltados para aprendizagem de conteúdos bastante específicos. O *site* do Instituto abriga uma extensa coletânea desses objetos em

12 O Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education tem como objetivo traçar diretrizes e produzir material visando à melhoria do ensino de matemática e de ciências. Disponível em: < http://www.fi.uu.nl/en/algemeen.html />. Acesso em: 02 jul. 2011.

tópicos de aritmética, álgebra, geometria, funções, matemática discreta, entre outros assuntos[13].

No que segue, apresentaremos o objeto de aprendizagem "Máquinas Algébricas"[14], escolhido para ser usado em nossa proposta didática porque dispõe de uma estrutura que provoca de forma natural, e, portanto, em contexto "realista", a construção do conceito de função, fazendo uso da linguagem algébrica.

O objeto apresenta uma área de trabalho, na região cinza da Figura 5, em que são disponibilizadas "caixas brancas" para entrada e saída de dados e "caixas laranjas" que disponibilizam diferentes operações (soma, diferença, multiplicação, divisão, operações com potências). Para realizar as operações, o aluno pode utilizar livremente as "caixas brancas e as laranjas", ligando-as com setas conforme a ordem das operações a serem efetuadas.

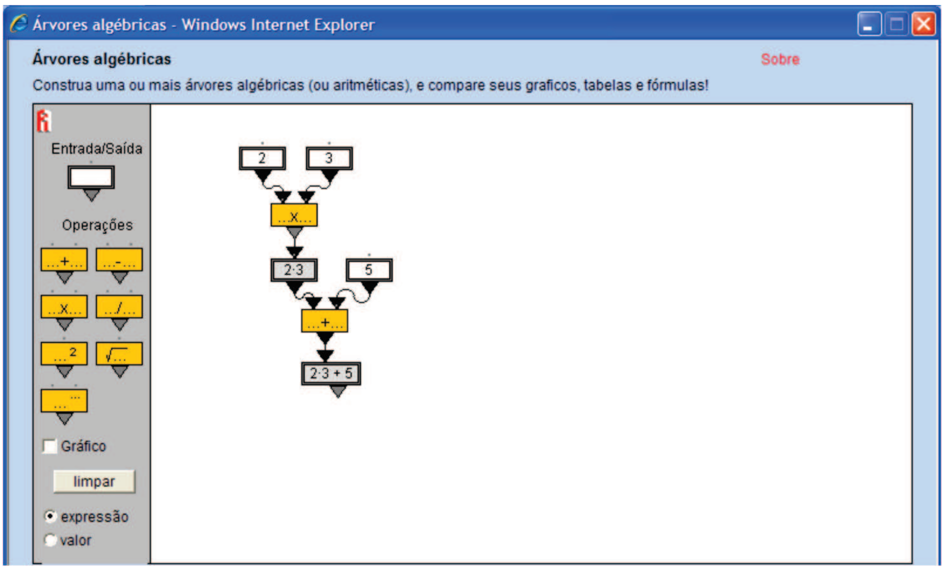


Figura 5 – Interface do objeto "Árvores algébricas"
Fonte: Kern, 2008

Na Figura 5 ilustramos o procedimento que implementa a operação $2 . 3 + 5$, usando três "caixas brancas" em que são colocados os números 2, 3 e 5, e duas "caixas laranjas" que indicam as operações de multiplicação e de soma. Quando

13 Disponível em: < http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html >. Acesso em: 02 jul. 2011.

14 Este objeto foi desenvolvido no Instituto Freudenthal e, por meio de uma parceria, disponibilizamos uma versão em português. A versão em português pode ser acessada no *site* EDUMATEC, em: <http:/ /www.edumatec.mat.ufrgs.br>. Acesso em: 02 jul. 2011 por meio dos *links* Atividades/Atividades Diversas de Funções e Gráficos/Máquinas Algébricas para o Ensino Fundamental.

trabalhamos somente com dados numéricos, temos a opção de resposta na forma “valor” ou na forma “expressão”.

Usando as “caixas brancas e as laranjas” podemos também obter expressões algébricas, as quais podem ser associadas a tabelas e gráficos. A Figura 3 ilustra a “máquina” que corresponde à expressão $2 \, . \, a + 5$, acompanhada de tabela de valores e de representação gráfica.

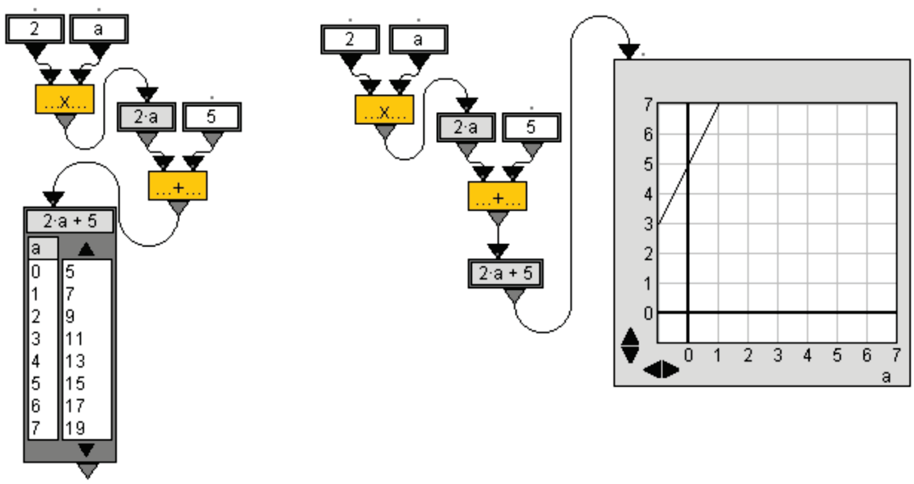


Figura 6 – Opções de tabela e de gráfico
Fonte: Kern, 2008

O objeto “Máquinas Algébricas” muito pode contribuir para o aprendizado do significado das “letras” quando utilizadas na álgebra. O aluno, diante de um determinado problema, esquematiza o processo de resolução do problema, usando a “caixa branca” como espaço a ser ocupado por números que correspondem a situações particulares do problema a ser resolvido, e tem-se nesse procedimento o uso da ideia de variável, ainda sem maiores formalismos. O aluno não precisa se preocupar em efetuar cálculos, sendo apenas necessário que identifique as etapas de resolução do problema. A habilidade do aluno para representar as etapas do problema, através de uma “máquina”, pode ser o início de pensamento algébrico mais explícito.

A sequência de atividades preparada para o uso do objeto “Máquinas Algébricas” foi projetada da seguinte forma: inicialmente o aluno entenderia o funcionamento do objeto, e depois seria provocado no entendimento de que uma “máquina”, muito particular, por ele construída para resolver um certo problema, poderia ser usada para resolver generalizações deste mesmo problema. O reconhecimento, por parte do aluno, de que a substituição de um certo valor numérico, colocado em “caixa-branca” da “máquina”, por outro valor numérico não provoca alteração na estrutura do problema, é um passo crucial na construção da ideia de variável e de expressão algébrica.

Vamos ver na apresentação da experiência que foi a partir das diferentes "máquinas" construídas para resolver instâncias particulares de um mesmo problema que os alunos avançaram na direção da "máquina generalizadora". Foi a partir deste momento que os alunos passaram a trabalhar com o conceito de variável na forma de "caixa branca" vazia, na "espera de números" a serem processados pela "máquina", conforme as operações algébricas por eles estruturadas.

Uma atividade de modelagem matemática fez parte da proposta didática: os alunos realizaram uma experiência prática, fazendo medições, coletando informações, construindo tabelas e gráficos, representando a modelagem do problema de diferentes formas, formulando hipóteses e respondendo a determinados questionamentos. Essa atividade de modelagem também tratou de relações entre variáveis.

A sequência de atividades concebida visou um processo de aprendizagem com crescente exigência quanto ao uso da linguagem algébrica. De início criou-se a necessidade da generalização, ainda que de forma intuitiva; depois veio a exigência de expressar as relações funcionais através da linguagem algébrica, usando-se diferentes representações – expressão algébrica, tabelas e gráficos.

4. A EXPERIÊNCIA E OS RESULTADOS

A experiência de ensino foi realizada com uma turma de sexta série, do turno da tarde do Centro de Ensino Médio Pastor Dohms, escola privada de Porto Alegre. A turma era constituída por 30 alunos, com idades variando entre 11 e 13 anos.

A dinâmica de trabalho com os alunos, em um total de seis encontros (três encontros de 55 minutos e três encontros de 110 minutos), foi a seguinte:

a) Cinco dos encontros aconteceram no laboratório de informática da escola, que dispunha de 20 computadores e um projetor multimídia, com os alunos trabalhando em duplas, na sua grande maioria, e alguns poucos trabalhando individualmente.
b) Um encontro foi reservado para a atividade de modelagem matemática e, dada a sua natureza, aconteceu em sala de aula, com os alunos dispostos em grupos de pelo menos quatro, em torno da mesa onde foram feitas a experiência de medição, a coleta de dados, a construção de tabela e a construção do modelo matemático.

c) Em todas as atividades os alunos receberam uma “folha guia da atividade”, com a situação-problema a ser explorada e com espaços em branco para escreverem suas respostas, muitas delas transcrições das “máquinas” por eles construídas[15].

d) Ao final de cada encontro, o professor conduziu momentos de discussão coletiva, de forma a sistematizar o conhecimento produzido pelos alunos nos momentos de trabalho em grupo.

A concepção inicial da sequência de atividades foi readaptada ao longo da experimentação, com a reestruturação de algumas atividades, isso porque sentimos a necessidade de fazer intervenções que não estavam previstas, para esclarecer as dúvidas e os questionamentos que se apresentavam nos grupos.

No que segue, a partir da apresentação do enunciado de algumas atividades desenvolvidas, vamos ilustrar o processo de aprendizagem vivenciado pelos alunos.

4.1 O primeiro Problema Proposto: o “Parque Arco-Íris”

O primeiro problema a ser resolvido pelos alunos foi:

> Um parque de diversões cobra R$ 5,00 pelo ingresso e R$ 3,00 por brinquedo.
> Quanto gastará Carla se andar em sete brinquedos? E se andar em 12?
> Se Vitor gastou R$ 56,00, em quantos brinquedos ele andou? E se Daniela tinha R$ 40,00, em quantos brinquedos ela poderia andar?

Para resolver o item (1) da atividade, os alunos construíram inicialmente a “máquina” que calcula o gasto no caso de sete brinquedos e depois construíram uma nova “máquina” para responder à pergunta relativa aos 12 brinquedos (Figura 7), neste momento sem maior atenção à similaridade da estrutura que resolve as duas perguntas.

15 Esta exigência de transcrição para a folha de papel da “máquina” construída se justifica pela necessidade de coleta de material de pesquisa.

Figura 7 – "Máquina" da atividade "Parque de diversões"
Fonte: Kern, 2008

Para o item (2), alguns alunos construíram "máquinas" que utilizam as operações inversas, conforme ilustra a Figura 8. Outros utilizaram a "máquina" construída para o item (1) e, por meio de tentativas com diferentes valores numéricos, obtiveram a resposta "17 brinquedos", conforme mostra a Figura 9.

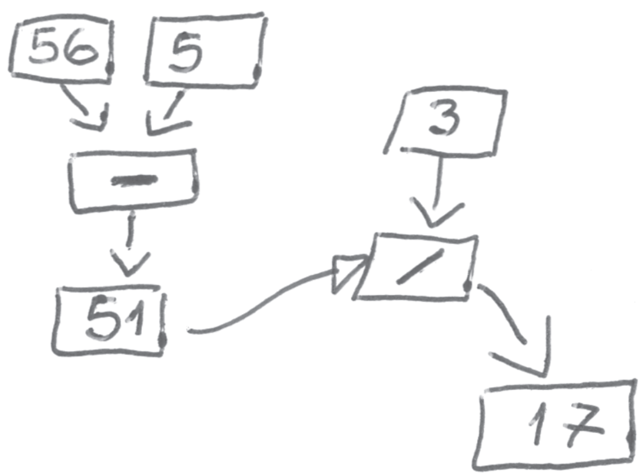


Figura 8 – Problema 3 resolvido por máquina inversa
Fonte: Kern, 2008

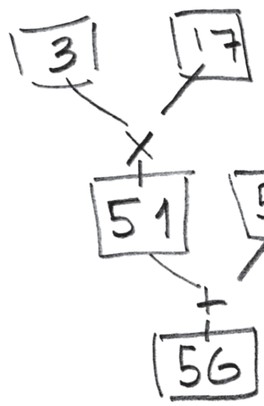


Figura 9 – Problema 3 resolvido por tentativas
Fonte: Kern, 2008

Ao final do primeiro encontro, a grande maioria dos alunos tratou cada pergunta da situação proposta como um novo problema e, dessa forma, refizeram a construção de “máquinas”, mesmo tendo elas a mesma estrutura. Foram raras as situações nas quais os alunos tiveram que trabalharam com a mesma “máquina” para responder a perguntas similares.

4.2 A Atividade com as “Impressoras”

No segundo encontro, os alunos trabalharam com a atividade “Impressoras”. Essa atividade manteve o propósito de provocar nos alunos a ideia de que uma mesma estrutura de resolução pode ser usada em vários casos de um mesmo problema. O enunciado da atividade era o seguinte:

> O laboratório de informática da escola tem duas impressoras: uma tipo “jato de tinta” e outra tipo “laser”. A “jato de tinta” imprime 12 páginas por minuto e a “laser” imprime 18 páginas por minuto.
>
> (1) Quantas páginas a “jato de tinta” imprime em 2 minutos? E em 5 minutos? E em 13 minutos?
>
> (2) E quantas páginas a “laser” imprime em 3 minutos? E em 7 minutos? E em 12 minutos?
>
> (3) As duas impressoras juntas imprimirão quantas páginas em 6 minutos? E em 9 minutos?

Neste segundo dia de aula, observamos que os alunos passaram a utilizar uma mesma “máquina” para resolver problemas similares, apenas trocando o valor que havia sido colocado na “caixa branca”. Nas Figuras 10 e 11, temos diferentes soluções apresentadas para o item (3): alguns alunos calcularam a quantidade de “folhas impressas” em cada impressora, e depois somaram os resultados; outros alunos somaram as “velocidades de impressão” das duas impressoras, concluindo que, juntas, imprimiam 30 páginas por minuto, e então multiplicaram a "velocidade" obtida pelo tempo.

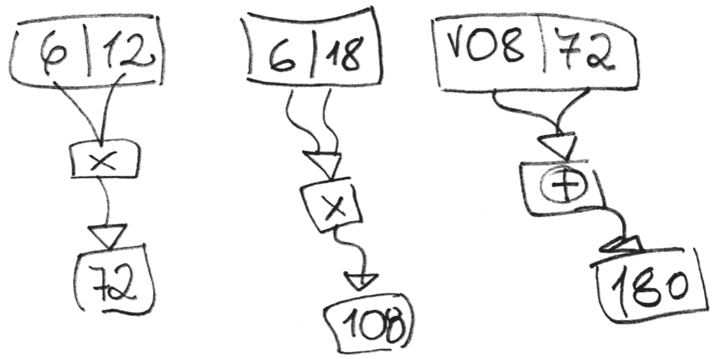


Figura 10 – Cálculo para cada impressora
Fonte: Kern, 2008

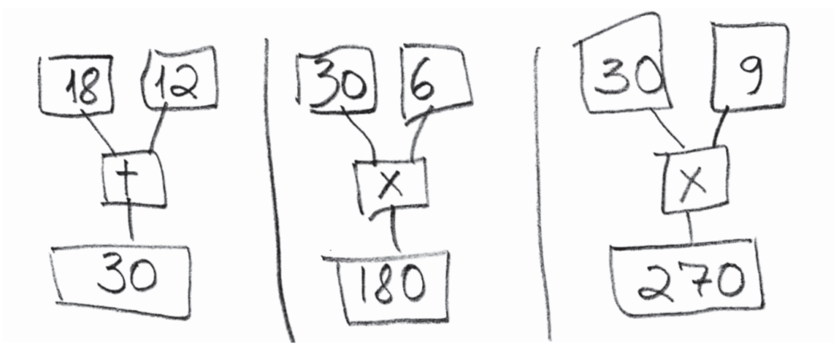


Figura 11 – Cálculo a partir da soma das "velocidades de impressão"
Fonte: Kern, 2008

A atividade foi planejada de modo a avançar com as relações inversas, sendo nossa expectativa a de que houvesse o uso da "máquina generalizadora":

> (4) Quanto tempo a "jato de tinta" leva para imprimir 900 páginas? Quanto tempo a "laser" leva para imprimir 900 páginas?
> (5) Quanto tempo as duas juntas levam para imprimir 900 páginas? E, quantas páginas imprime cada uma das impressoras?

Para resolver o item (4), os alunos produziram a "máquina" que divide a quantidade de páginas (900) pela velocidade da correspondente impressora, e, neste procedimento, a "caixa branca" que recebe o número correspondente à velocidade funciona como uma variável, mas os alunos também resolveram o item utilizando as "máquinas" construídas para resolver os itens (1) e (2) da atividade e, por meio de tentativas de "tempo", determinaram o total de "900 cópias". Nesses dois procedimentos observamos diferentes habilidades, o que procuramos ilustrar na Figura 12: no primeiro procedimento, os alunos estão trabalhando com o conceito de função; já no segundo procedimento, nos parece que eles estão fazendo uso da ideia de incógnita de uma equação.

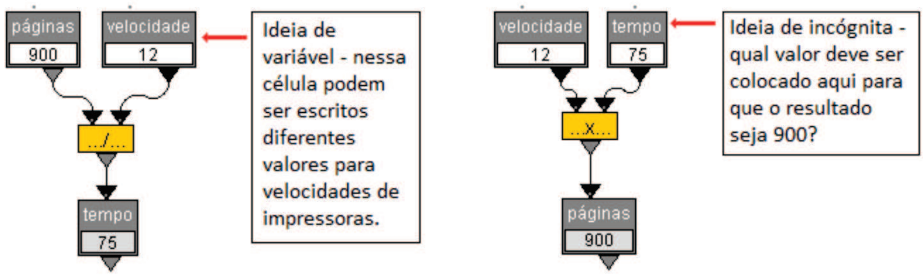


Figura 12 – Velocidade de Impressão
Fonte: Kern, 2008

Podemos perceber que a "máquina" que responde ao item (5) tem estrutura semelhante ao clássico problema das "duas torneiras"[16]. É um item cuja resolução exige maiores habilidades. Observamos que, para resolver o item (3), basta somar a quantidade de páginas produzida, por minuto, pelas duas impressoras e então multiplicar pelo tempo de funcionamento; já no item (5) é preciso trabalhar com a imagem inversa da função que associa ao *tempo o número de cópias* e aqui temos uma situação em que a linguagem da álgebra pode ajudar na estruturação do raciocínio.

Julgamos que o item (5) da atividade é bastante complexo para alunos de sexta série e é interessante observar que, no contexto das "máquinas", muitos alunos apresentaram soluções corretas e similares: somaram as "velocidades de produção" das duas impressoras e concluíram que "juntas imprimem 30 páginas por minuto", e então dividiram as 900 páginas por 30 para determinar o tempo de 30 minutos (Figura 13).

16 Dada a vazão de água de duas torneiras, pede-se o tempo necessário para encher um determinado tanque, tendo-se as duas torneiras abertas.

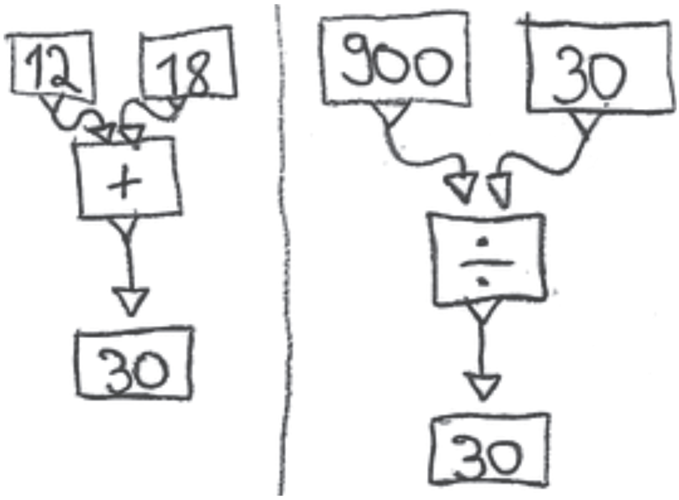


Figura 13 – Somando as velocidades
Fonte: Kern, 2008

Neste segundo encontro, a grande maioria dos alunos mostrou bastante desenvoltura na construção de "máquinas generalizadoras", tanto para expressar o "número de cópias produzidas por uma impressora em função do tempo", quanto para expressar a relação inversa em que "o tempo é função do número de cópias".

4.3 Atividade de Modelagem Matemática: "bolinhas na água"[17]

Esta atividade, proposta para o terceiro encontro da experiência, foi realizada em sala de aula, com os alunos organizados em grupos de pelo menos quatro, em torno de mesas retangulares. O material para a atividade, distribuído para os grupos, consistia em:

a) garrafa plástica[18] com marcações horizontais espaçadas por 1 cm, com água até a primeira marcação e 100 bolinhas de vidro (Figura 14);
b) folha "guia de atividade" e folha com sistema de coordenadas.

17 Esta atividade de modelagem foi inspirada no livro *Algebra Experiment I – Exploring Linear Functions*, de Mary Jean Winter e Ronald J. Carlson. – Addison-Wesley Publishing Company.
18 Utilizamos garrafas de plástico de 2 litros.

Figura 14 – Material para a atividade de modelagem
Fonte: Kern, 2008

Os alunos seguiram a orientação da folha "guia da atividade", que dizia:

Quadro 4 – Guia da atividade

Na garrafa, adicione bolinhas de vidro, uma a uma, até que o nível da água suba exatamente 1 cm. Marque essas informações na tabela.

Bolinhas	cm

(2) Quantas bolinhas precisamos para que o nível da água suba: 1 cm? 3 cm? 7 cm?

Fonte: Kern, 2008

Um dos objetivos da atividade foi levar os alunos à situação concreta de observar a influência de um fator sobre outro fator – no caso, a quantidade de bolinhas influenciando na altura do nível da água – e, dessa forma, provocá-los na compreensão dos conceitos de variáveis independente e dependente.

Os alunos foram desafiados na formulação de hipóteses e na elaboração de raciocínios generalizadores. Inicialmente todos os grupos, colocando bolinha após bolinha, contaram quantas eram necessárias para fazer o nível da água subir 1 cm. Já para fazer subir o nível da água até 2 cm, as atitudes foram diversificadas: alguns dos grupos continuaram colocando as bolinhas de vidro na garrafa e fazendo a contagem, enquanto em outros grupos houve a manifestação de que *"se já sei quantas bolinhas deslocam a água em 1 cm, para saber as outras basta multiplicar"*.

Para determinar a quantidade de bolinhas necessárias para que o nível de água subisse 7 cm, uma questão com intenção de provocar raciocínio generalizador, os grupos apresentaram diferentes e interessantes comportamentos:

a) Um dos grupos coletou as bolinhas que estavam sobrando nos demais grupos para que pudesse realizar, concretamente, a experiência de "ver o nível de água subir 7", e, dessa forma, o grupo se colocou na exaustiva atitude de contar bolinhas enquanto observava e media os diferentes níveis de água.
b) Outro grupo, para alcançar os 7 cm, somou a quantidade de bolinhas necessárias na soma de deslocamentos tais como 2 cm + 2 cm + 3 cm, obtendo o total de 37 + 37 + 56 = 130 bolinhas.
c) Também observamos um grupo que fez uso de raciocínio com média aritmética: observaram que para o deslocamento de 1 cm foram usadas 17 bolinhas e que para 2 cm foram usadas 38 bolinhas. Com a diferença de 21 bolinhas da segunda medição para a primeira, foi calculada então a média (17 + 21) ¸ 2 = 19, que informa o número de bolinhas para a variação de 1 cm no nível d'água. E, finalmente, o grupo determinou o número de 133 bolinhas correspondente à variação de 7 cm, fazendo a multiplicação 19 x 7 = 133 bolinhas.

Com o propósito de discutir aspectos relativos à coleta de dados em situação de modelagem, o professor sugeriu que todos os grupos realizassem as medições solicitadas, mesmo que já tivessem respondido às perguntas por meio de raciocínios de proporcionalidade. A Figura 15 registra parte dessa coleta de dados.

Bolinhas	centimetros
17	1
0	0
37	2
56	3
75	4

Bolinhas	centimetros
15	1
34	2
51	3
70	4
89	5

Bolinhas	centimetros
17	1cm
☺	☺
38	2 cm
77	4 cm
95	5 cm

Bolinhas	centimetros
18	1
92	5
37	2
56	3
76	4

Bolinhas	centimetros
14	1
35	2
54	3
75	4
96	5
0	0

Bolinhas	centimetros
15	1
35	2
54	3
74	4
93	5
0	0

Figura 15 – Dados coletados pelos alunos na atividade das bolinhas na garrafa
Fonte: Kern, 2008

A diversidade de valores obtidos (por exemplo, os valores 70, 74, 75, 75, 76, e 77, correspondentes aos 4 cm) produziu uma interessante discussão, com a formulação de várias hipóteses: as bolinhas de vidro poderiam ter tamanhos diferentes; as marcações nas garrafas não eram muito precisas; e essa diversidade poderia ser decorrente da dificuldade para medir o nível de água com a régua disponível.

A segunda parte da atividade foi planejada com o objetivo de trabalhar outras maneiras de representar matematicamente a mesma situação problema – via gráfico e via relação funcional – e, depois disso, voltamos à construção das "máquinas":

Quadro 5 – Guia da atividade - continuação

(4) Marque todos os pontos da tabela na folha quadriculada.

(5) Os pontos que você marcou estão alinhados?

(6) Há um ponto que podemos marcar no gráfico que não depende de medição. Qual é este ponto?

(7) Trace uma reta que passe o mais próximo possível de todos os pontos.

(8) Observe o gráfico e responda: quantas bolinhas são necessárias para que o nível da água suba: 1 cm? 4 cm? 0,5 cm?

(9) Como seria uma "máquina" algébrica que resolve os três itens acima?

Fonte: Kern, 2008

No trabalho com o gráfico da situação-problema, os alunos marcaram os pontos encontrados na tabela, sem maiores dificuldades. Os grupos perceberam que os pontos estavam próximos de um alinhamento. Para o traçado da reta, o professor chamou atenção para o ponto que não depende de medição, e os alunos logo concluíram que se tratava do ponto (0,0). Levando em consideração o ponto (0,0), eles traçaram a reta solicitada (Figura 16). Apenas um grupo teve dificuldades, traçando uma reta que não passava, de forma satisfatória, perto dos pontos.

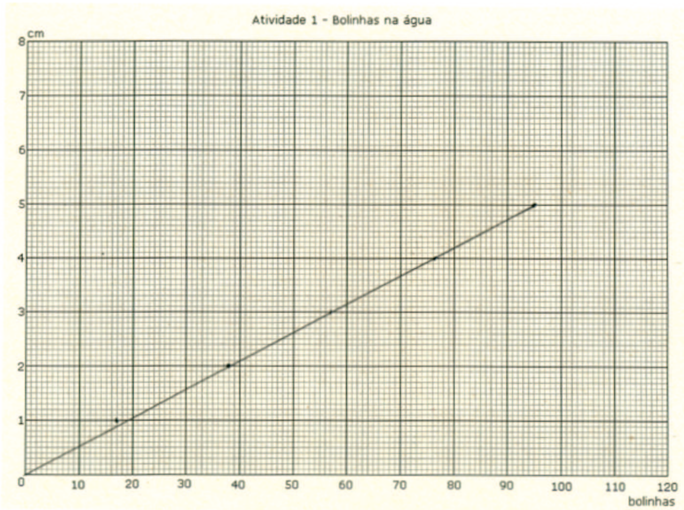


Figura 16 – Gráfico do deslocamento da água em função da quantidade de bolinhas
Fonte: Kern, 2008

A partir da observação do gráfico, era esperado que os alunos respondessem o item 8 da atividade – "Quantas bolinhas são necessárias para que o nível da água suba: a) 1 cm? b) 4 cm? c) 0,5 cm?". Mas muitos fizeram uso dos dados que estavam na tabela.

Vale aqui observar que no "fenômeno" modelado, o procedimento de colocar bolinhas na garrafa, uma a uma, corresponde ao processo de modelagem discreta. Ao utilizar o sistema de coordenadas para marcar os pontos correspondentes as medidas feitas, os alunos identificaram um conjunto de pontos aproximadamente alinhados. A partir desses dados, foi solicitado a eles que traçassem uma reta que "ficasse muito próxima dos pontos marcados". Nesse momento, estava sendo iniciada a transição do modelo discreto para o modelo contínuo. Fazendo uso da reta, os alunos observaram, por exemplo, que a quantidade de bolinhas necessárias para deslocar 1 cm não precisa ser necessariamente um número inteiro. Após a construção do gráfico, um dos grupos avançou no ajuste das informações obtidas na tabela: havendo indicado, no momento de medição, que 19 bolinhas correspondiam ao deslocamento de 1 cm, ao analisar o gráfico, eles observaram que a reta passava um pouco acima do ponto (1, 19), aproximadamente no ponto (1, 19.5). E, com o valor de 19.5, eles explicaram as 78 bolinhas correspondentes aos 4 cm que haviam encontrado no momento da medição, fazendo a multiplicação $4 \times 19.5 = 78$.

Por fim, os grupos trabalharam na "máquina" que relaciona "número de bolinhas" e "nível d'água". Foram criadas "máquinas" com o cuidado de manter uma "caixa branca" vazia para receber números correspondentes à variável "nível de água em cm", conforme mostra a Figura 17. Mas ainda observamos casos em que três "máquinas" foram construídas para responder sobre o "número de bolinhas" quando o nível sobe 1 cm, 2 cm ou 4 cm, como mostra a Figura 18.

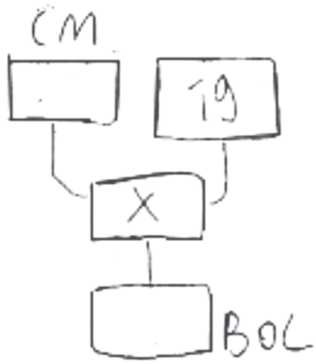


Figura 17 – "Caixa-branca" vazia
Fonte: Kern, 2008

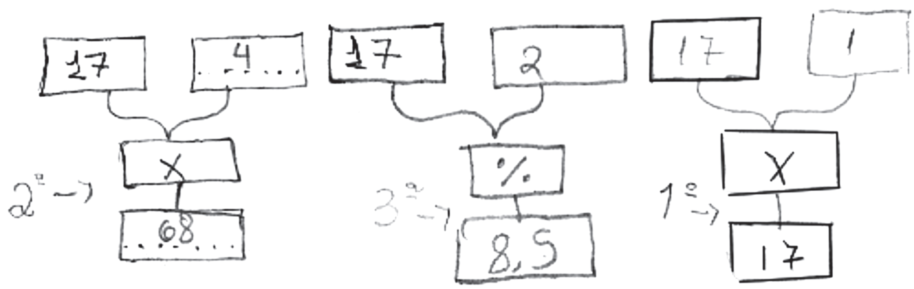


Figura 18 – Diferentes máquinas para um mesmo problema
Fonte: Kern, 2008

Com perguntas correspondentes às situações em que a medição é impossível de ser realizada, por exemplo, "se colocamos apenas uma bolinha é possível observar o quanto sobe o nível de água?", provocamos os alunos a usarem a "máquina" construída.

Encerramos a atividade discutindo as diferentes formas de representação do "fenômeno" modelado – tabela, gráfico e "máquina". Dessa forma, analisamos, juntos, a estrutura das "máquinas generalizadoras" correspondentes ao "número de bolinhas em função de cm" e sua inversa "cm em função do número de bolinhas" e então introduzimos a letra "*x*" para representar a "caixa branca" vazia em cada "máquina" e assim escrevemos, por exemplo, a relação funcional: "número de bolinhas = 19 . *x*, onde *x* é a variação do nível da água em cm".

4.4 Retomando a Atividade “bolinhas na água”

No quarto encontro voltamos à experiência das “bolinhas na água”, mas avançando com situações nas quais os alunos deveriam observar a variação do nível da água em diferentes tipos de garrafas e estabelecer as correspondentes relações funcionais, utilizando diferentes tipos de representação (tabela, gráfico, “máquina”):

A experiência da medição do nível de água na garrafa, com bolinhas, foi realizada com os recipientes abaixo. Os dados foram registrados em três tabelas diferentes, uma para cada recipiente.

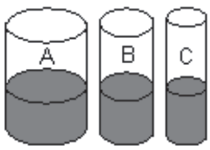


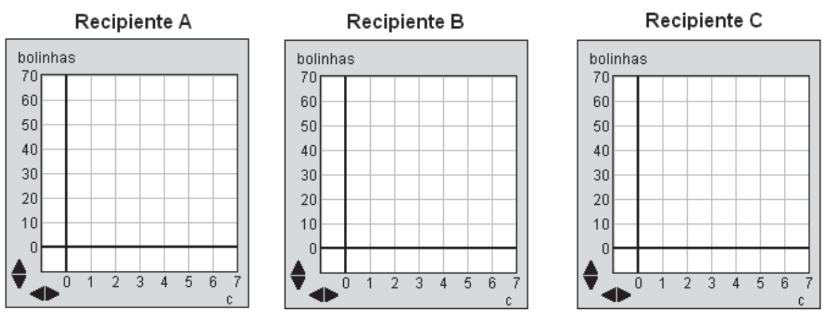
Tabela 1	
bolinhas	cm
30	3
60	6
90	9

Tabela 2	
bolinhas	cm
30	2
60	4
90	6

Tabela 3	
bolinhas	cm
12	1
36	3
60	5

Qual é a tabela correspondente a cada recipiente?

Faça o gráfico correspondente a cada recipiente.



Desenhe a máquina que, informando o quanto sobe em cm o nível de água, calcula o número de bolinhas.

Figura 19 – Retomando a atividade “Bolinhas na água”
Fonte: Kern, 2008

Considerando que este é um problema com muitas informações e que estávamos trabalhando com alunos de sexta série, foi grande a nossa satisfação quando observamos as resoluções apresentadas por um número significativo de grupos. Em sistema de coordenadas com grade quadriculada (Figura 20), os alunos marcaram os pontos informados nas três tabelas, traçaram a reta correspondente a cada um dos gráficos e, sem maiores dificuldades, estabeleceram as correspondências entre gráficos e garrafas.

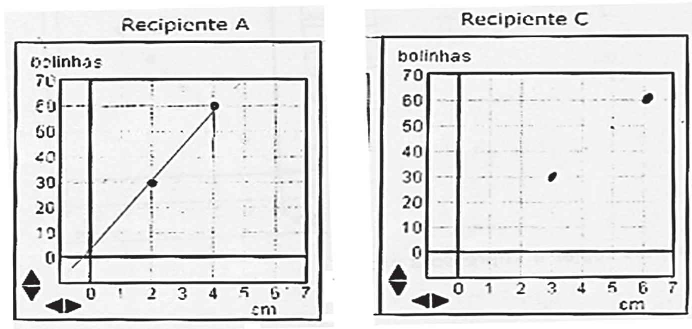


Figura 20 – Pontos e gráficos
Fonte: Kern, 2008

Os alunos também retomaram o objeto "Máquinas Algébricas" e nele construíram as "máquinas" correspondentes a cada uma das três garrafas (Figura 21), e escreveram expressões que informavam o número de bolinhas em função do nível de água.

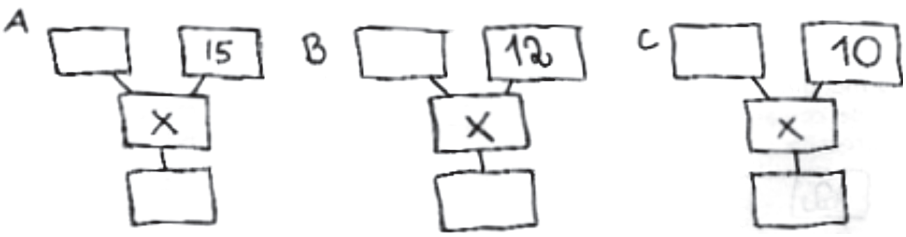


Figura 21 – "Máquinas" correspondentes às três garrafas
Fonte: Kern, 2008

4.5 Comentários sobre o Desenrolar da Sequência de Atividades

Além dos quatro encontros comentados anteriormente, foram realizados mais dois encontros como parte de nossa experiência de ensino. Nesses encontros finais, os alunos trabalharam, essencialmente, com máquinas mais elaboradas quanto ao número de variáveis envolvidas no problema. Por exemplo, uma das máquinas que construíram resolvia o problema de calcular o "gasto do freguês" em uma pizzaria, onde havia o consumo de pizza, refrigerante e sorvete. Alguns grupos produziram "máquinas" mais elaboradas ao incluírem também o dinheiro para pagamento e o correspondente troco a ser dado ao freguês.

Ao longo da realização da experiência, observamos uma evolução no desempenho dos alunos, e, por isso, foi possível identificar um crescimento na compreensão da linguagem algébrica. De início, os alunos construíram para cada caso particular do problema uma "máquina algébrica", ainda indicando um forte raciocínio de natureza aritmética. Depois avançaram com as "máquinas genéricas" que resolviam um mesmo problema em muitas situações particulares, já indicando um raciocínio de natureza algébrica.

Intencionalmente, a sequência de atividades proposta aos alunos se restringiu a situações que trataram de relações de proporcionalidade, pois nosso objetivo maior foi propor uma introdução ao pensamento algébrico por meio do trabalho com relações funcionais, e para tanto julgamos importante que a experiência se desenvolvesse dentro da simplicidade do modelo linear.

5. CONCLUSÃO

Finalizamos este texto colocando a pergunta: será que é possível ensinarmos álgebra de uma maneira diferente? É verdade que ensinar um conteúdo de um modo diferente exige um complexo processo de reestruturação. Não temos a pretensão de obter a resposta a tal pergunta, nem de trazer a solução dos problemas no ensino de álgebra. O que temos, depois de refletir sobre nossa prática diária de professor, com base em leituras feitas na elaboração de nosso trabalho de dissertação e pela experimentação realizada como parte deste trabalho, são algumas contribuições.

Acreditamos que, ao desenvolver nos alunos de sexta série a habilidade de expressar relações entre variáveis, propiciamos uma introdução ao pensamento algébrico de forma tal que o "uso das letras" se tornou significativo trazendo a compreensão da necessidade e da importância da álgebra. A exploração de situações problema, usando o aplicativo "Máquinas Algébricas", possibilitou aos alunos a transição do raciocínio de natureza aritmética àquele de natureza algébrica, sem que houvesse a necessidade de apresentação formal da noção de variável e função. Além da ideia de variabilidade e de dependência entre variáveis, os alunos indicaram ter compreendido as diferentes formas de representação de uma situação que envolve uma relação funcional – tabelas, gráficos e leis da função.

O progresso de nossos alunos nos faz julgar que a sequência de atividades proposta foi ao encontro da necessidade de abordarmos a introdução à álgebra de um modo diferente. Mas é importante lembrar que não existem regras que possam garantir, de antemão, o sucesso de uma experiência de ensino. O que temos na literatura, na pesquisa e, em particular, na nossa dissertação de Mestrado, são orientações e experiências que podem ajudar os professores no interessante e complexo processo de ensinar Matemática. Na dissertação apresentamos uma análise detalhada do desenrolar das atividades realizadas com os alunos, indicando dificuldades e progressos. Este material, para além do texto aqui apresentado, pode ajudar os professores interessados em realizar novas experiências de ensino no contexto da álgebra, e é dentro desse espírito que trazemos a nossa contribuição.

6. REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org). *Didática das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais* (5ª a 8ª série): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHARBONNEAU, Louis. From Euclid to Descartes: Algebra and its Relation to Geometry. In: BEDNARZ, N. *et al*. (Ed.). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 15-37.

JANVIER, Claude. Modeling And The Initiation Into Algebra. In: BEDNARZ, N. *et al.* (Eds.). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 225-236.

KERN, Newton. *Uma introdução ao pensamento algébrico na sexta série através de relações funcionais,* 137 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/15584>.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org.). *As Idéias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1997. p. 9-22.

O USO DE JOGOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM: UM ESTUDO DE CASO EM UMA TURMA DE OITAVO ANO

Gustavo Quevedo Carvalho

INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é descrever uma proposta de sequência didática em problemas de contagem. O trabalho debruça-se sobre um estudo de caso realizado em uma turma do oitavo ano do Colégio Militar de Porto Alegre (CMPA)[19]. Com o uso de jogos previamente selecionados, criou-se um ambiente de provocação acerca de situações em que era necessário colocar em prática o pensamento multiplicativo.

Fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993), que toma como ponto fundamental da cognição o processo de conceitualização do real, e na Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky (1991), cuja perspectiva é de que a constituição das funções complexas de pensamento é veiculada pelas trocas sociais, fez-se uma análise de como os sujeitos se comportaram nas diferentes atividades que abordavam o campo conceitual multiplicativo, bem como das estratégias/esquemas utilizados por eles na resolução dos questionários propostos ao final de cada jogo.

Para uma conclusão, retomam-se as análises dos esquemas utilizados pelos sujeitos e os indicativos de que propor situações novas, no campo conceitual multiplicativo, reforça a possibilidade de os alunos reformularem suas formas de resolução ou de as adaptarem a um novo contexto.

PROBLEMAS DE CONTAGEM

A ideia de trabalhar com problemas de contagem partiu de minha curiosidade e da dificuldade em compreender as questões dessa natureza quando aluno de Ensino Médio. Assim, surgiu a oportunidade de voltar a trabalhar com problemas de contagem, agora direcionados aos alunos de uma turma de oitavo ano.

Outra razão que levou ao trabalho com problemas de contagem foi o pouco contato que meus alunos tiveram com situações inseridas nesse contexto. O CMPA

19 Dissertação apresentada no Mestrado em Ensino de Matemática (UFRGS), orientada pelo Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke.

possui um Plano de Disciplina (PLADIS) de cada matéria, que nada mais é do que a organização dos componentes curriculares, enunciando os assuntos a serem abordados ao longo do período letivo. O primeiro contato que o aluno do CMPA tem com problemas de contagem ocorre no sexto ano do Ensino Fundamental, quando são abordados o conjunto dos números naturais e suas operações.

Dentro dos objetivos específicos do assunto, o professor trabalha a operação multiplicação como uma adição de parcelas iguais. O aluno deve reconhecer os fatores e o produto, saber aplicar as propriedades da multiplicação e resolver exercícios.

Ao trabalhar esses tópicos, é preciso levar em conta algumas instruções metodológicas. Uma dessas instruções refere-se à resolução de problemas utilizando o princípio fundamental da contagem, já incentivando o aluno a pensar logicamente sobre questões dessa natureza.

O estudo de problemas de contagem fica restrito apenas a esse ano do ensino fundamental, sem qualquer menção nos demais anos. Somente no segundo ano do Ensino Médio é que os alunos voltam a ter contato com os problemas de contagem. Muitas vezes, os alunos sentem grandes dificuldades em interpretar esses problemas e, geralmente, eles esperam que uma fórmula possa resolver todos os problemas propostos. Também existe aquela situação em que o aluno questiona a importância de estudar esses problemas.

E, realmente, se o professor não expuser ao aluno os objetivos de se estudar problemas de contagem, o propósito da unidade torna-se irrelevante. Os problemas de contagem são importantes porque iniciam o sujeito no campo do raciocínio combinatório. Além disso, auxiliam a organizar de forma mais adequada um conjunto de dados ou informações, fugindo de fórmulas decoradas, apresentadas sem sentido. Essa organização representa um futuro esquema para resolução de novos problemas ou de novas situações em que a contagem for referida.

As fórmulas devem ser uma consequência de observações em problemas de contagem variados, que podem necessitar de distintas estratégias e, assim, possibilitar ao aluno fazer sua construção. Provocá-lo em diferentes situações de contagem, aumentando gradativamente o seu grau de dificuldade, favorece a oportunidade de direcioná-lo a deduzir uma fórmula, como citado há pouco, não como "decoreba", e sim como uma maneira prática de resolução.

O uso de jogos foi uma maneira de tratar do assunto de uma forma atraente e interessante. Para que houvesse um retorno por parte dos alunos, era necessário que eles estivessem motivados com as diversas situações propostas. Os jogos também propiciaram uma integração entre os estudantes, bem como a prática da socialização, da cooperação e da formação/resgate de atitudes. A aproximação entre jogos e problemas de contagem veio a contribuir em muito na ampliação do conjunto de conceitos do campo multiplicativo, dado que possibilitam ao aluno prever resultados e comparar hipóteses.

Associam-se a essas colocações as de Borin (2004), o qual defende que a atividade de jogar desempenha papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, dedutivo e indutivo, da linguagem, da criatividade, da atenção e da concentração. Habilidades estas essenciais para o aprendizado em Matemática.

A PROPOSTA DE JOGOS EM PROBLEMAS DE CONTAGEM

Outros autores já escreveram artigos, dissertações e teses corroborando a ideia de sequências didáticas alternativas e envolventes para problemas de contagem.

No trabalho intitulado *Jogo de regras e construção de possíveis: análise de duas situações de intervenção psicopedagógica*, de Piantavini (1999), há uma investigação das relações entre o jogo Senha e a construção de possíveis, no contexto de duas intervenções psicopedagógicas com alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental, uma limitada à estrutura do jogo e outra acrescida de situações problematizadoras explícitas. Segundo a análise, baseada na teoria epistemológica de Piaget, os resultados obtidos nos pós-testes demonstraram que a intervenção baseada em problematizações foi mais eficaz em desencadear nos sujeitos evoluções e construções efetivas dos possíveis, mediante a análise dos próprios meios empregados no jogo Senha. Os dados da pesquisa afirmaram a importância do jogo em um contexto educativo e psicopedagógico, como desencadeador de reflexão nos sujeitos, proporcionando construções significativas do ponto de vista cognitivo.

Na tese de doutorado *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*, de Grando (2000), o interesse da pesquisa recaiu sobre o jogo pedagógico no ensino da Matemática. Nessa pesquisa, a autora investiga os processos gerados na construção e/ou resgate de habilidades matemáticas a partir da intervenção com dois jogos (Nim e Contig60) em oito alunos da sexta série do Ensino Fundamental. Os resultados indicaram que houve um processo desencadeador na construção dos procedimentos e dos conceitos matemáticos, pelos sujeitos, em situações de jogo.

Em seu artigo intitulado *A importância dos jogos e curiosidades matemáticas no processo Ensino-Aprendizagem*, de Groenwald (2003), a autora propõe que os professores de matemática utilizem jogos e curiosidades matemáticas como forma de conceituar e comunicar conhecimentos.

Dentre os trabalhos que propõem jogos relacionados à contagem, destaca-se ainda o minicurso *Geoplano e Análise Combinatória: construindo o conhecimento matemático no trabalho cooperativo*, de Ludwig e Rico (2006), e o trabalho “Seleção de jogos” (BARBOSA, 2004).

O ESTUDO DE CASO NO COLÉGIO MILITAR DE PORTO ALEGRE

Os jogos selecionados foram desenvolvidos no segundo semestre de 2008 com uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental, de 33 alunos. A investigação foi desenvolvida como um estudo de caso, conforme citado na introdução.

Um estudo de caso sempre tem um forte cunho descritivo. Baseia-se em trabalho de campo no qual se estuda uma entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações e documentos (YIN, 1984). Mesmo um estudo de caso nunca estando completo, o autor procura levar em consideração todos os aspectos que são importantes para a pesquisa, de modo a tornar tão completa quanto possível essa investigação (PONTE, 2006).

Na coleta de dados foram utilizadas as observações feitas em sala de aula pelo professor[20], orais e escritas (através de um questionário ao final de cada jogo). O professor testemunhou conversas de alguns grupos de alunos durante os jogos sobre como eles traçavam suas estratégias, utilizando ou não o pensamento multiplicativo.

No início do próximo encontro, discuti com o grupo maior as regras do jogo e suas peculiaridades. Nesse momento, observei atentamente as diferentes expressões dos alunos frente às suas estratégias de jogo e se eles identificavam alguma situação vantajosa nesse jogo. Nessas oportunas ocasiões de discussão, os estudantes questionavam alguns momentos do jogo e se era possível alterar alguma regra para torná-lo mais atraente e mais divertido.

Tudo que os alunos conversavam e apontavam sobre um determinado jogo, era anotado em um caderno. Algumas questões dos alunos eram respondidas com outra questão. Muitos alunos sentiam a necessidade da ajuda do professor para obter a resposta e não ficavam muito satisfeitos quando a pergunta lhes era devolvida.

As atividades foram planejadas e referenciadas na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1993), especificamente, em sua abordagem do campo conceitual multiplicativo. O período total previsto de aplicação foi de 14 encontros, mas outras aulas que não estavam destinadas à aplicação das atividades foram utilizadas para debates.

A apresentação das regras e de cada jogo propriamente dito durava, em média, três encontros. Era importante discutir com os alunos sobre os jogos, não apenas para levantar dados da pesquisa, mas também para avaliar o jogo aplicado e replanejar os jogos posteriores, se fosse o caso.

Todos os quatro jogos foram confeccionados pelo pesquisador, fazendo uso de material disponibilizado em sites para construir tabuleiros e fichas. Alguns materiais

20 O professor é o autor deste trabalho.

foram comprados, tais como copos plásticos, dados, tinta guache, folhas de laminado, caixas de lápis de cor e atilhos. Pode-se dizer que o custo da confecção dos jogos foi baixo e sugere-se, quando possível, dentro do planejamento escolar, viabilizar o uso de material reciclável.

A PROPOSTA

A ordem de aplicação dos jogos foi: "A Grande Aposta", "Contig60", "Senha" e "Jogo Bicolorido". O relato de experiência ficará restrito, aqui, aos jogos "A Grande Aposta" e "Senha", bem como à análise de algumas perguntas propostas ao fim de sua aplicação, dos tipos de respostas e das estratégias de resolução que os alunos apresentaram. Para os demais jogos, o leitor é convidado a acessar a dissertação[21] (CARVALHO, 2010).

A classificação das respostas, quanto ao tipo, segue a caracterização a seguir:

a) Resposta em Branco (B): o aluno não respondeu a questão.
b) Resposta Correta Parcial (RCP): o aluno apresenta apenas a resposta numérica da questão, sem desenvolvimento, ou apenas o desenvolvimento sem indicação da resposta numérica.
c) Resposta Incorreta Parcial Negativa (RIPN): o aluno apresenta apenas um valor numérico incorreto, que ele considera ser o correto, sem desenvolvimento.
d) Resposta Incorreta Parcial Positiva (RIPP): o aluno apresenta o desenvolvimento de seu raciocínio listando algumas possibilidades corretas e/ou incorretas, sem indicação de resposta.
e) Resposta Esperada (RE): O aluno apresenta desenvolvimento completo da questão, bem como o resultado numérico correto.

A Tabela 1 indica a classificação das respostas dadas a cada questão, sinalizando o número de alunos que tiveram suas respostas classificadas em cada um dos tipos descritos anteriormente.

21 A dissertação está disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17845>. Acesso em 24 de maio de 2010.

Tabela 1 – levantamento quantitativo das respostas por tipo

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos					

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

APRESENTAÇÃO DO JOGO "A GRANDE APOSTA"

Este jogo é uma adaptação do jogo "A grande corrida de cavalos", que faz parte do projeto Experiências Matemáticas com Educandos do Programa Curumim (2007). No jogo, as crianças eram divididas em pequenos grupos. Duas crianças eram designadas a negociarem as apostas nos cavalos e elas eram chamadas de negociadores, um educando era responsável pela organização e os demais alunos eram os jogadores apostadores. Em um painel era montado um quadro com os números dos cavalos, de 2 a 12.

Realizou-se uma adaptação deste jogo para ser jogado entre duplas e, com isso, foi necessário formular algumas regras, descritas a seguir. Como o considerei um novo jogo, resolvi também dar a ele um novo nome. Para esse jogo, cada dupla necessitava de:

a) fichas de numeração dos cavalos (total de 11 fichas);
b) dois dados pequenos de **cores distintas**;
c) um copo plástico para "mexer" os dados;
d) um pequeno bloco de papel em que a dupla identificaria cada jogador, os números dos cavalos de cada jogador e o vencedor de cada páreo.

Antes do primeiro lançamento de dados, cada jogador da dupla escolhia seus cavalos, de modo que cada um ficasse com o mesmo número de fichas. Essa escolha poderia ser feita de forma aleatória, com as fichas voltadas para baixo ou com cada jogador escolhendo seus cavalos. Os jogadores ficaram livres para que decidissem a forma como escolheriam seus cavalos. Cada jogador recebia 5 fichas e a ficha que restava era chamada de "cavalo-curinga".

Escolhidos os cavalos, decidia-se quem faria o primeiro lançamento dos dados. Vejamos, então, como funciona o jogo propriamente dito:

a) O primeiro jogador, que chamaremos de jogador 1, lança os dados. Se a soma das faces voltadas para cima for o número de um de seus cavalos, ele vence o páreo e marca no bloco um traço (|) e o número do cavalo sorteado; caso contrário, o jogador 2 vence e faz o mesmo. Se a soma for o número do "cavalo-curinga", então ele anota para si esse número e tem direito de lançar os dados novamente.
b) O segundo jogador, que chamaremos de jogador 2, procede com o segundo lançamento dos dados. Aqui também pode ocorrer qualquer das três situações descritas acima, e o jogo continua normalmente.
c) Ao término da corrida, ou seja, dos seis páreos, será considerado vencedor aquele jogador que venceu mais páreos.
d) Em caso de empate, ou seja, se cada jogador tiver vencido três páreos, será considerado vencedor aquele jogador que obtiver a maior soma dos números correspondentes aos cavalos sorteados nos páreos em que foram vencedores. Caso algum jogador tenha pontuado com o "cavalo-curinga", o valor deste também entra na soma.

Vejamos uma situação do jogo em que houve empate:

	Jogador 1	Jogador 2
Cavalos	3, 7, 5, 9 e 10	2, 6, 4, 8 e 11
Páreo 1	| (10)	
Páreo 2		| (8)
Páreo 3		| (11)
Páreo 4	| (7)	
Páreo 5	| (10)	
Páreo 6		| (6)
Soma	27	25

Figura 22 – Exemplo da situação do jogo "A Grande Aposta"
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Na escolha dos cavalos, o "cavalo-curinga" é o de número 12. Como cada jogador venceu três páreos, então a decisão ficou para a soma dos cavalos vencedores de cada páreo.

Questão 1: Após ter jogado algumas vezes, você acha que todos os cavalos têm a mesma chance?"

Resposta esperada: Não. Algumas somas saem mais do que outras. Logo, alguns cavalos podem sair mais vezes.

Tabela 2 – Frequência de respostas à questão 1 do jogo "A Grande Aposta"

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	1	0	9	19	2

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Os dois alunos que responderam corretamente o que era esperado formavam uma dupla. A justificativa que apresentaram para a questão veio em forma de um esquemas, um deles representado na Figura 23. A resposta não estava completa, mas esses alunos reconheceram que alguns cavalos eram mais favoráveis do que outros.

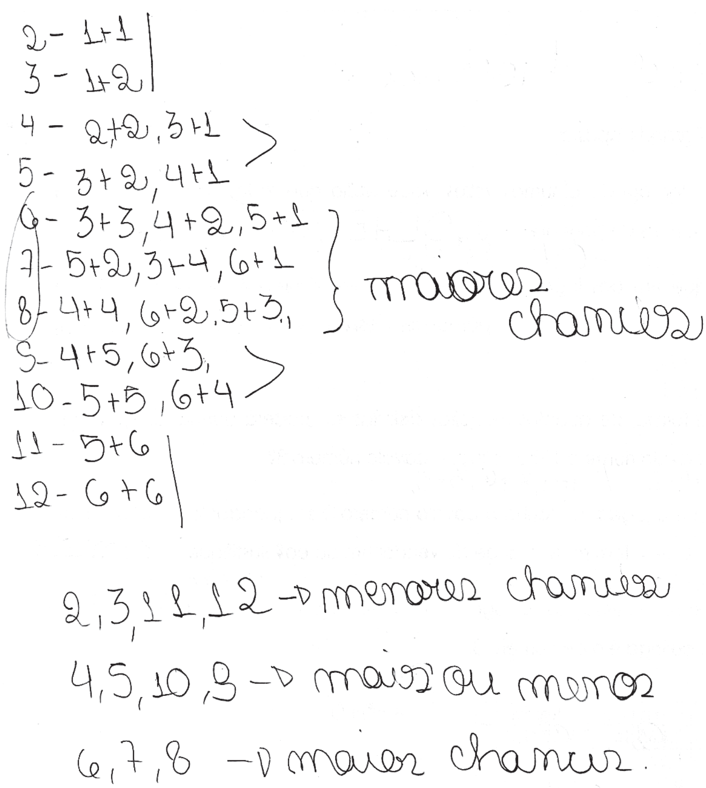
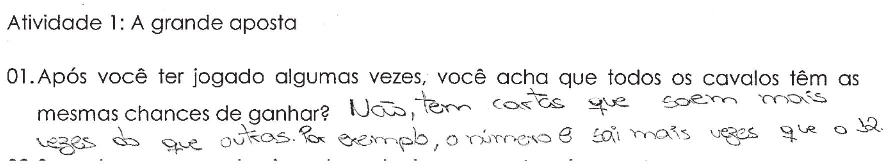


Figura 23 – Resposta de aluno
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

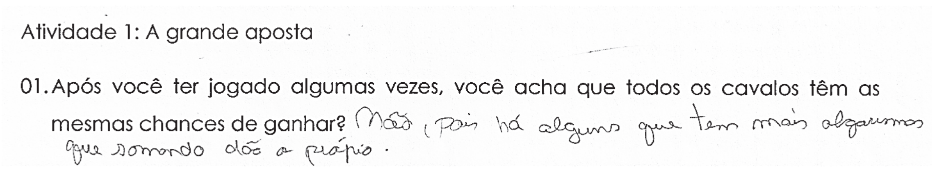
Observe que o aluno montou um esquema e classificou os cavalos quanto às suas possibilidades de vitória. Seu colega de jogo também apresentou esquema semelhante, entretanto, não apresentou as chances dos cavalos. É importante ressaltar que um desses alunos respondeu "não" à questão. Veja a Figura 24, correspondente à resposta.


Atividade 1: A grande aposta

01. Após você ter jogado algumas vezes, você acha que todos os cavalos têm as mesmas chances de ganhar? Não, tem cartas que saem mais vezes do que outras. Por exemplo, o número 8 sai mais vezes que o 12.

Figura 24 – Resposta de aluno: "Não, têm cartas que saem mais vezes do que outras. Por exemplo, o número 8 sai mais vezes que o 12."
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Houve também aqueles alunos que tentaram explicar suas respostas, mas não encontraram um argumento válido para isso ou não souberam expressar-se claramente. Ao analisar as respostas obtidas, deparei-me com o exemplo a seguir (Figura 25).


Atividade 1: A grande aposta

01. Após você ter jogado algumas vezes, você acha que todos os cavalos têm as mesmas chances de ganhar? Não, pois há alguns que tem mais algarismos que somando dão o próprio.

Figura 25 – Resposta de aluno: "Não, pois há alguns que têm mais algumas que somando dão o próprio."
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Questão 4: Suponha que o jogador 1 tenha o cavalo número 3, e o jogador 2 tenha o cavalo de número 12. Quem tem mais chance de vencer um páreo? Justifique.

Resposta esperada: O cavalo de número 3 pode sair de duas maneiras: (1,2) ou (2,1). O cavalo de número 12, apenas uma: (6,6). Então, o cavalo 3 tem mais chance de vencer um páreo.

Tabela 3 – Frequência de respostas à questão 4 do jogo "A Grande Aposta"

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	4	8	17	1

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

As 17 respostas classificadas como RIPP são as dos alunos que listaram as possibilidades dos dois cavalos, mas desconsideraram que os dados eram distintos (é importante observar que as cores dos dados eram diferentes). Vemos a seguir, nas Figuras 26 e 27, as respostas de dois desses estudantes.

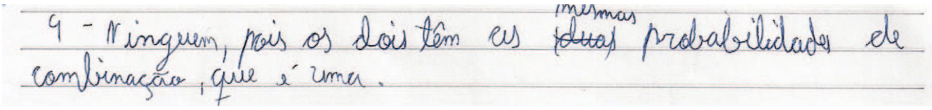
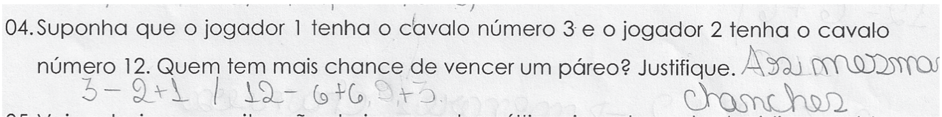

4 - Ninguem, pois os dois têm as ~~duas~~ mesmas probabilidades de combinação, que é uma.

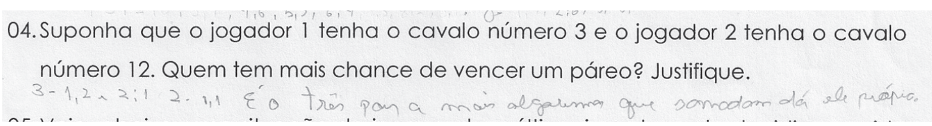
Figura 26 – Resposta de aluno
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho


04. Suponha que o jogador 1 tenha o cavalo número 3 e o jogador 2 tenha o cavalo número 12. Quem tem mais chance de vencer um páreo? Justifique. As mesmas chanches

3 – 2+1 / 12 – 6+6, 9+3.

Figura 27 – Resposta de aluno
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

O único aluno que teve sua resposta considerada como RE, na verdade, confundiu os números dos cavalos, mas, mesmo assim, sua resposta foi satisfatória. Esse aluno é o mesmo que respondeu à questão 1 com o argumento da soma dos algarismos. Veja a justificativa para sua resposta na questão 4. Ao ler a resposta do aluno, questionei-o, novamente, sobre essa "soma dos algarismos" (Figura 28). O aluno então respondeu mostrando os tais algarismos, que nada mais eram do que os números das faces dos dados. Ele, de fato, não estava se referindo aos algarismos, e sim às somas, concluindo que, para o número 3, existem mais possibilidades de soma do que para o número 12.


04. Suponha que o jogador 1 tenha o cavalo número 3 e o jogador 2 tenha o cavalo número 12. Quem tem mais chance de vencer um páreo? Justifique.

3 - 1,2 e 2,1 2 - 1,1 É o três, pois a mais algarismos que somados dá ele própio.

Figura 28 – Resposta de aluno - "É o três, pois há mais algarismos que somados dão ele próprio"
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Questão 7: *Supondo que a escolha dos cavalos não fosse feita "aleatoriamente" pelos cartões e sim pelo número obtido da* ***soma*** *das faces voltadas para cima dos dois dados. Quais e quantas são as possíveis somas?*

Resposta esperada:

1+1, 1+2, 1+3, 1+4, 1+5, 1+6, 2+1, 2+2, 2+3, 2+4, 2+5, 2+6, 3+1, 3+2, 3+3, 3+4, 3+5, 3+6, 4+1, 4+2, 4+3, 4+4, 4+5, 4+6, 5+1, 5+2, 5+3, 5+4, 5+5, 5+6, 6+1, 6+2, 6+3, 6+4, 6+5, 6+6. (36 maneiras)

Tabela 4 – Frequência de respostas à questão 7 do jogo "A Grande Aposta"

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	0	1	11	19	1

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Neste momento, muitos alunos solicitaram a presença do professor, pois necessitavam de ajuda. Eles estavam chegando ao fim do questionário e percebiam que as perguntas exigiam mais do que "responder só por responder". Era necessário que usassem algum tipo de esquema.

Ao observar que os alunos estavam em dúvidas sobre algumas situações do jogo que o questionário apresentava, fui à frente do quadro e solicitei um instante de atenção. Avisei-os de que passaria de mesa em mesa para ajudá-los nas dúvidas, mas sugeri que eles tentassem escrever algo; que se baseassem nas respostas anteriores e nas discussões com os colegas.

Assim foi feito. E fez efeito. Ajudei, cuidadosamente, algumas duplas. Outras, que haviam solicitado ajuda, já não mais a necessitavam, pois o entendimento da questão e de suas próprias respostas já tomava um caminho compreensível. Mesmo assim, 19 alunos mantiveram uma ideia equivocada quanto à não distinção dos dados e apresentaram, como total de possibilidades, 21 "somas". Mesmo equivocadas, suas respostas foram consideradas um progresso, dado que eles contaram as possibilidades e formalizaram um esquema próprio de contagem. A seguir, nas Figuras 29, 30 e 31, pode-se observar algumas das respostas desses alunos, sendo a última a resposta do aluno que respondeu corretamente o que era esperado.

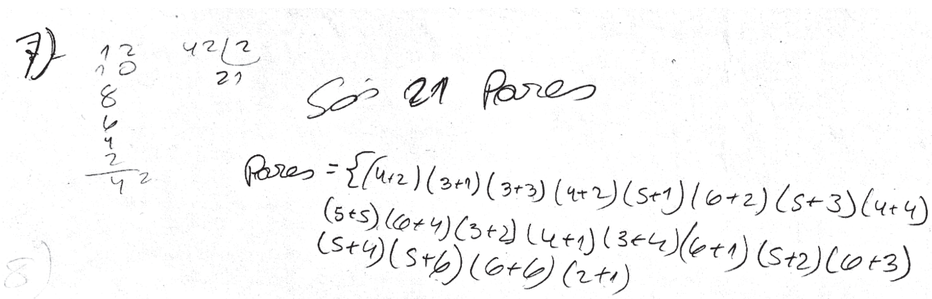


Figura 29 – Resposta de aluno
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

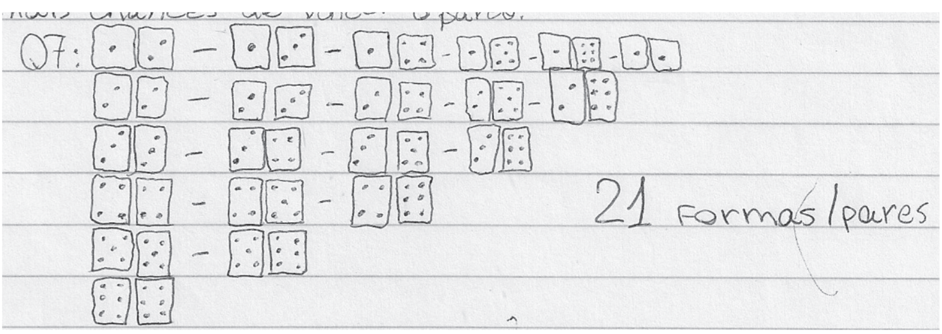


Figura 30 – Resposta de aluno
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

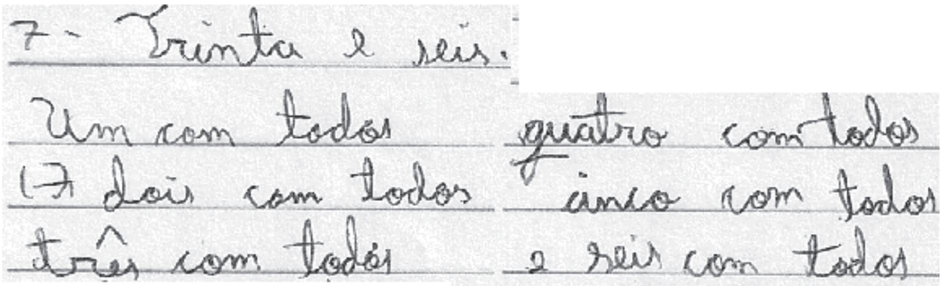

7- Trinta e seis.
Um com todos
(7 dois com todos
três com todos
quatro com todos
cinco com todos
e seis com todos

Figura 31 – Resposta de aluno
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Nessa questão, os alunos foram provocados a pensar nas diferentes possibilidades de pares ordenados e suas somas, e a reformular seus "teoremas-em-ação"[22] sobre as situações em que temos dois dados distintos. De modo geral, nesse primeiro jogo, observou-se que os alunos guardaram para si suas opiniões e suas expressões. Alguns externalizaram suas falas indicando necessitarem de ajuda, mas alguns, uma parte significativa dos participantes guardou para si suas estratégias, talvez antes mesmo de as tornarem falas socializadas.

Dando prosseguimento às análises, foi proposto um segundo jogo. Nessa primeira avaliação do trabalho ainda não era possível afirmar ou suspeitar que algum aluno já houvesse construído um conceito. Um aluno não constrói um conceito em torno de um problema, mas constrói um conjunto de conceitos que lhes dão sentido num campo de problemas (VERGNAUD, 1993). Apresento, então, a análise de outro jogo aplicado em que revi minha estratégia de observação e indagação, a fim de propor aos alunos uma oportunidade de reflexão e construção de novas aprendizagens.

APRESENTAÇÃO DO JOGO SENHA

Este jogo foi criado em 1970 pelo israelense Mordechai Meirovitz e seu objetivo é a descoberta da sequência de quatro cores que compõem uma senha, tomadas dentre seis cores distintas. Essa senha pode ter cores repetidas ou não[23].

22 Conforme Vergnaud (1986), os teoremas-em-ação não são expressos sob uma forma matemática, nem mesmo às vezes sob qualquer outra forma. A criança encontra um grande número destes teoremas assim que atua sobre o real e resolve problemas no espaço, no tempo, no domínio das quantidades e das grandezas (VERGNAUD *apud* BACKENDORF, 2010).

23 Conforme <http://carrosseldaaprendizagem.blogspot.com/2009/04/jogo-da-senha.html>. Acesso em: 21 mar. 2009.

Sendo inviável a compra de tabuleiros, o jogo foi adaptado para o papel. Ao invés de pinos, foram utilizados lápis de cores; e os tabuleiros ficaram de acordo com a Figura 32. Combinou-se que a senha escolhida deveria ser uma sequência de cores distintas.

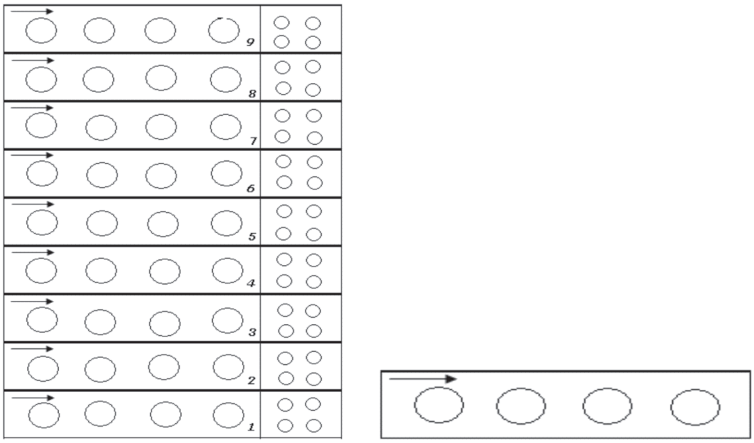


Figura 32 – Tabuleiro do desafiado e tabuleiro do desafiante adaptados do jogo Senha
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Adaptado do jogo original, o material para cada dupla era composto por:

a) tabuleiros indicados na Figura 32;

b) lápis de cores.

Antes do início do jogo, escolhe-se quem será o desafiante, ou seja, aquele que formará a senha, e o desafiado, aquele que tentará descobri-la. Escolhidos os papéis de cada jogador, seguem as regras:

a) O desafiante forma uma senha e colore os espaços reservados para a senha seguindo a direção da seta do seu tabuleiro. Será usada a legenda para identificar as cores. Por exemplo, pode-se supor que o desafiante forme a senha azul(Az)-laranja(La)-vermelho(Vm)-amarelo(Am). Então, da esquerda para direita, o desafiante "colore" os espaços, ficando com a situação representada na figura a seguir.

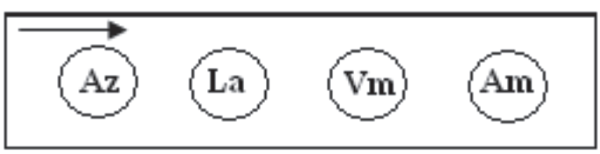


Figura 33 – Exemplo de situação do jogo "Senha" – tabuleiro do desafiante
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

b) O desafiado, então, forma uma senha, no seu tabuleiro, que acredita ser a formada pelo desafiante. Caso não tenha acertado a senha, o desafiante dá algumas "dicas" na coluna da direita do tabuleiro do desafiado. Se o desafiado acertar alguma cor e a posição em que ela está, o desafiante pinta um dos círculos de preto. Se o desafiado acertar apenas alguma cor, mas não sua posição, o desafiante deixa algum dos círculos em branco. Caso a senha apresentada pelo desafiado contenha alguma cor que não coincide com a do desafiante, ele marca um "x" em algum dos círculos. As dicas dadas pelos círculos não seguem ordem alguma.Veja, a seguir, um exemplo em que o desafiado acertou a cor amarela e sua posição, mas uma das cores (verde) não faz parte da senha do desafiante.

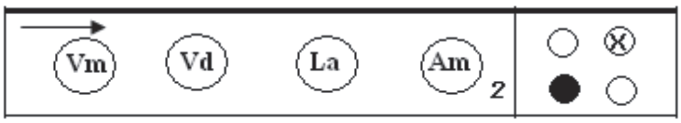


Figura 34 – Exemplo de situação do jogo "Senha" – tabuleiro do desafiado
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

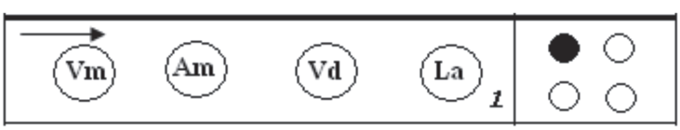
c) O desafiado tem nove tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte a senha em nenhuma das nove oportunidades, ele contabiliza nove pontos.

d) Alternadamente, os jogadores invertem seus papéis. Será considerado vencedor aquele que descobrir a senha do outro em menor número de tentativas, ou seja, aquele que obtiver o menor número de pontos.

QUESTIONÁRIO APLICADO E ANÁLISE

Situação 1: Uso de quatro cores e a senha é formada por quatro cores distintas.

Questão 1: Suponha que, na primeira tentativa, o desafiado apresenta a seguinte combinação de cores e o desafiante preenche o campo de "dicas" da seguinte forma:



Quais são as combinações de senhas possíveis para a próxima jogada, sabendo que a cor amarela está na posição certa?

Resposta esperada:

Vermelho – Amarelo – Laranja – Verde

Verde – Amarelo – Vermelho – Laranja

Verde – Amarelo – Laranja – Vermelho

Laranja – Amarelo – Vermelho – Verde

Laranja – Amarelo – Verde – Vermelho

Tabela 5 – Frequência de resultados à questão 1 do jogo Senha

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
n. de alunos	0	0	0	25	8

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Pelo levantamento quantitativo, pode-se observar uma fatia significativa de alunos que acertaram completamente a questão ou que desenvolveram alguma resolução positiva quanto à resposta esperada.

Nas Figuras 35, 36 e 37 vemos as respostas de alguns dos alunos cujas respostas se configuram RE.

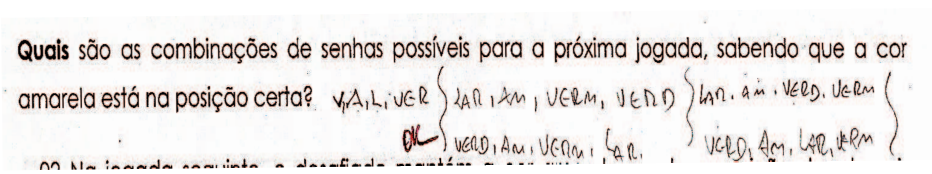


Figura 35 – Resposta de aluno

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

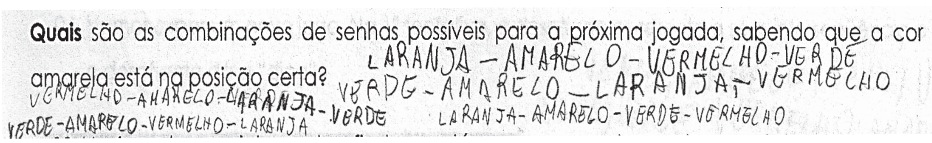


Figura 36 – Resposta de aluno

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

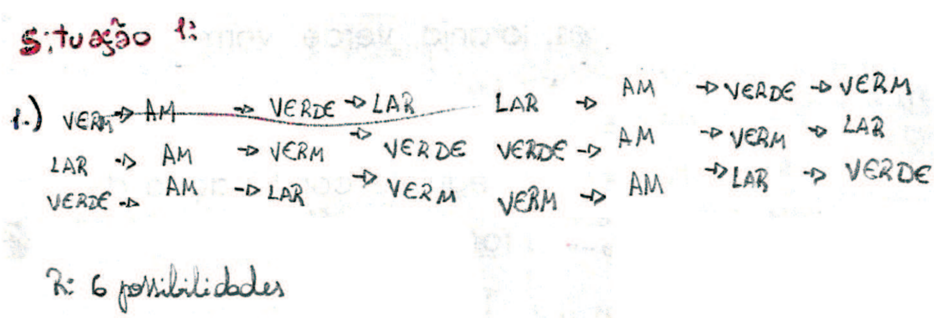


Figura 37 – Resposta de aluno

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

É possível afirmar que esses alunos já possuem uma forma de organização para montar seus esquemas. Observa-se, que na terceira resposta (Figura 37), o aluno se preocupa em organizar as cores da esquerda para a direita, alternando as posições para a cor vermelha. Uma das senhas ele desconsidera, pois é a mesma apresentada pela questão.

Questão 4: Antes de o jogo iniciar, quais eram as possíveis combinações de senha?

Resposta esperada:

Tabela 6 – Possíveis senhas com quatro cores distintas

LA-VD-VM-AM		VD-LA-VM-VD		VM-VD-LA-AM		AM-VM-VD-LA
LA-VD-AM-VM		VD-LA-VD-VM		VM-VD-AM-LA		AM-VM-LA-VD
LA-VM-VD-AM		VD-AM-LA-VM		VM-LA-VD-AM		AM-LA-VM-VD
LA-VM-AM-VD		VD-AM-VM-LA		VM-LA-AM-VD		AM-LA-VD-VM
LA-AM-VD-VM		VD-VM-AM-LA		VM-AM-LA-VD		AM-VD-VM-LA
LA-AM-VM-VD		VD-VM-LA-AM		VM-AM-VD-LA		AM-VD-LA-VM

Legenda: LA: laranja, VD: verde, VM: vermelha, AM: amarelo.
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Tabela 7 – Frequência de respostas à questão 4 do jogo Senha

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	6	0	6	16	5

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

A resposta errada mais frequente foi 16. Os alunos alegaram que o cálculo utilizado foi a multiplicação do número de cores pelo número de espaços a serem preenchidos. Não apenas esses participantes, mas outros mantiveram este “teorema-em-ação” até o fim do jogo. Quando discutiu-se em aula sobre as possíveis senhas para quatro cores, sugeriu-se que escrevessem algumas senhas para que encontrassem alguma regularidade. Essa sugestão surtiu efeito em poucos alunos que começaram a pensar em uma forma prática de encontrar a quantidade de senhas sem ter que listar todas.

Surpreendente foi a reação dos alunos que encontraram mais senhas do que o número que haviam calculado. Eles perceberam que não se tratava de simplesmente multiplicar o número de cores utilizadas pelo número de espaços a serem preenchidos. Eles notaram que algo havia de errado quando ultrapassaram o número de 16 senhas. Essa intervenção foi importante para prepará-los para a próxima etapa do questionário, em que as senhas eram formadas a partir de cinco cores distintas.

Situação 2: Uso de cinco cores e a senha é formada por quatro cores distintas

Questão 1: Na primeira tentativa, o desafiado apresenta a seguinte sequência de cores e o desafiante preenche o campo de "dicas" da seguinte forma:

Sabendo que a cor verde está na posição certa e que a cor vermelha não faz parte da senha, quais são as combinações possíveis para a próxima jogada?

Resposta esperada:

Laranja- Amarelo – Azul – Verde

Laranja – Azul – Amarelo – Verde

Amarelo – Laranja- Azul – Verde

Amarelo – Azul – Laranja – Verde

Azul – Laranja – Amarelo – Verde

Azul – Amarelo – Laranja – Verde

Tabela 8 – Frequência de respostas à questão 1, situação 2 do jogo Senha

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	4	1	0	20	7

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

A interpretação dessa primeira pergunta é muito semelhante à da questão inicial da situação 1. Estando uma das cores correta e outra não pertencendo à senha, então, a resolução envolve uma permutação simples das três cores que restam.

Comparando os dados desta tabela com a tabela da questão 1 na situação 1, vemos que há uma semelhança na distribuição dos valores classificados em RE. Os sete alunos que aqui responderam completamente à pergunta também fazem parte do conjunto dos oito alunos que escreveram, lá, as possíveis senhas.

Também devemos fazer referência à resposta correta de um dos jogadores quanto ao cálculo das possibilidades de senhas (Figura 38).

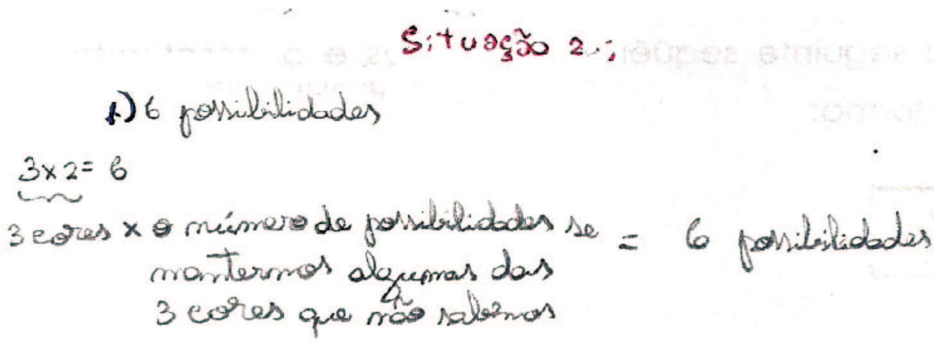
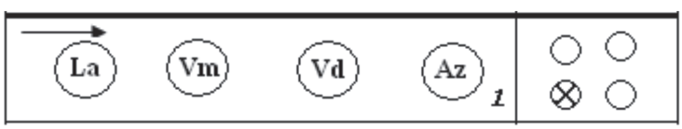

Situação 2.:
1) 6 possibilidades
3x2= 6
3 cores x o número de possibilidades se mantermos algumas das 3 cores que não sabemos = 6 possibilidades

Figura 38 – Resposta de aluno
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Veja que o número de senhas a que ele chegou foi calculado multiplicando o número de cores pelo número de possibilidades, mantendo alguma das 3 cores que "não sabemos qual é". Ele manteve esse "teorema-em-ação" até o fim do questionário, obtendo sucesso nas respostas. Este foi um dos participantes que acertou todas as questões do questionário.

Questão 4: Vamos supor um novo jogo. Na 1ª tentativa, o desafiado apresenta a seguinte sequência e o desafiante dá a "dica":



Sabendo que a cor laranja não faz parte da senha, ***quantas*** *são as possíveis senhas para a próxima jogada?*

Resposta esperada: Substituindo Laranja por Amarelo, teremos 24 combinações.

Tabela 9 – Frequência de respostas à questão 4, situação 2 do jogo Senha

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
n. de alunos	2	1	0	26	4

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

O aluno que respondeu conforme a Figura 38, mostrou, além de uma listagem de possibilidades, o cálculo que efetuou para chegar às vinte e quatro senhas (Figura 39).

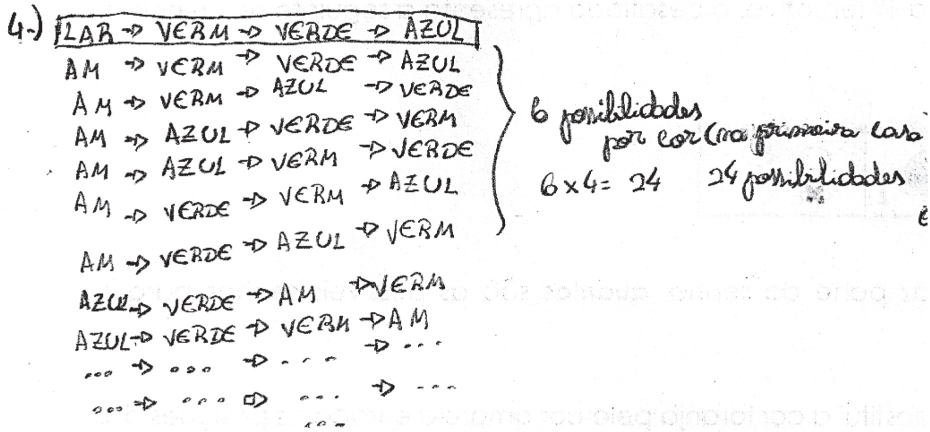


Figura 39 – Resposta de aluno
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

É possível antecipar que este aluno já estava utilizando o "conceito-em-ação"[24] do princípio multiplicativo, pois ele mantém sua forma de resolução e os valores esperados vão surgindo naturalmente. Nesta última resposta, o aluno relaciona algumas senhas e logo após explica o cálculo utilizado. Ele determina quantas são as possibilidades de senhas para uma cor fixa. Então, como para cada cor fixa, há seis senhas possíveis e distintas, ele conclui que existem 24 combinações possíveis.

Ainda assim, alguns mantiveram a ideia de que o total de senhas era obtido multiplicando-se o total de cores pela quantidade de espaços a serem preenchidos (Figura 40).

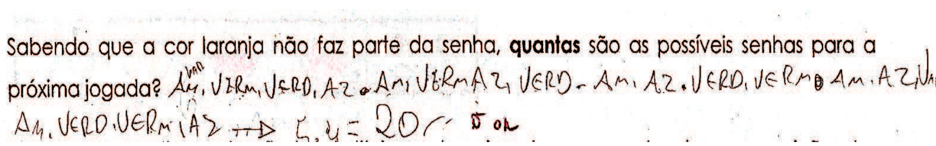


Figura 40 – Resposta de aluno (*5.4=20*)
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

Questão 7: Antes de o jogo iniciar, **quantas** *eram as possíveis combinações de senha?*

Resposta esperada: 1ª espaço: 5 cores; 2º espaço: 4 cores; 3º espaço:3 cores e 4º espaço: 2 cores. Para cada escolha das 5 cores no 1º espaço, haverá 4 para o 2º espaço. Aí já são 20. Para cada uma dessas 20, haverá 3 cores para o 3º espaço. Aí já são 60. Para cada uma dessas 60, haverá 2 cores para o 4º e último espaço. Aí já são 120.

---

24 "Conceito-em-ação" é uma categoria de pensamento considerada como pertinente (VERGNAUD, 1993). Assim como o teorema-em-ação é parte essencial dos esquemas.

Tabela 10 – Frequência de respostas à questão7, situação 2 do jogo Senha

Tipo	B	RCP	RIPN	RIPP	RE
nº de alunos	2	0	0	29	2

Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

As Figuras 41 e 42 mostram as respostas dos dois alunos que responderam satisfatoriamente à questão.

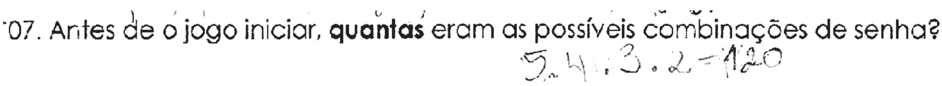

07. Antes de o jogo iniciar, **quantas** eram as possíveis combinações de senha?
5.4.3.2=120

Figura 41 – Resposta de aluno
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

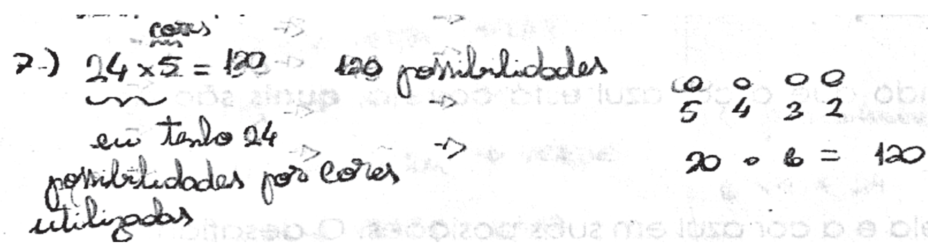


Figura 42 – Resposta de aluno
Fonte: Dissertação de Mestrado de Gustavo Quevedo Carvalho

A primeira resposta, a da Figura 41, leva a crer que o aluno já pensou na multiplicação como ferramenta para chegar na resposta. Observe que ele utiliza o princípio multiplicativo tal qual um aluno que já estudou o conteúdo de combinatória.

Na segunda resposta, a da Figura 42, o jogador considera o que respondeu na questão 4 e afirma, que para cada uma das 24 possibilidades por cor utilizada, há cinco cores, o que dá um total de 120 senhas. Esse jovem é o mesmo que apresentou a resolução na Figura 38. Na mesma resolução, ele apresenta uma multiplicação seguindo o que o colega da resposta anterior apresentou. Esses dois participantes não faziam parte da mesma dupla, mas estavam próximos um do outro.

AVALIAÇÃO DOS JOGOS

Do planejamento à execução das atividades, foram muitas as intervenções e alterações. Alguns equívocos foram inevitáveis, tanto na etapa de organização dos jogos (ordenação e regras) quanto na confecção dos questionários.

Dentre os jogos aqui citados, identificamos, no jogo "A Grande Aposta", a situação de empate tanto no número de páreos quanto na soma dos números dos cavalos. A chance de ocorrência desse evento era mínima e, mesmo assim, ocorreu.

Na verdade, sequer havia sido cogitada essa possibilidade, pois se acreditava que a condição da soma seria suficiente para determinar um vencedor. Uma dupla apresentou essa situação em que cada jogador havia vencido três páreos e, na soma total, obtiveram os mesmos pontos. Como essa foi a primeira atividade aplicada, tomou-se o cuidado de não cometer equívocos dessa natureza nos demais jogos.

Entretanto, alguns episódios foram determinantes para reformulações dos jogos (regras) e os questionários aplicados. Esse é o risco que o professor corre quando propõe uma atividade diferenciada, como um jogo. Mesmo com um período de planejamento suficientemente extenso, nem sempre se consegue verificar as possíveis falhas durante a operacionalização dos jogos e durante as possíveis respostas dos alunos.

O mesmo ocorreu em relação aos questionários, já que cada pergunta foi analisada pormenorizadamente, porque é possível, como aconteceu em alguns momentos da investigação, que o aluno faça uma interpretação totalmente diversa da que é esperada. Depois, ao analisar as respostas, é que era possível identificar o porquê de a questão ter sido interpretada de forma distinta da que se buscava.

No jogo "A Senha", cita-se o fato de alguns alunos estarem desmotivados para responder ao questionário. Esse foi o terceiro jogo aplicado e passava-se por um período de provas parciais de final de ano. Isso contribuiu para que alguns dos jovens ficassem mais distraídos, desatentos e/ou desmotivados. Geralmente, havia prova logo depois do tempo de matemática e alguns jogavam um pouco, respondiam a algumas questões do questionário, mas, por baixo da carteira, estudavam a matéria da prova do próximo período. Essa conjuntura também ocorreu no último jogo, o que ficou evidenciado no número de alunos que responderam ao questionário desse jogo. É importante lembrar aos leitores que a atividade foi inserida no decorrer do segundo semestre de 2008, quando já existia todo um planejamento de assuntos da série a serem trabalhados segundo o PLADIS. Acredita-se que se a abordagem não tivesse sido construída a partir de situações de jogos, não seria possível obter resultados tão positivos e satisfatórios.

CONCLUSÃO

Nesse cronograma tão comprimido e dentro das peculiaridades do ambiente dos jogos, é possível afirmar que se obteve sucesso no que se refere aos objetivos do trabalho.

Ao longo das atividades planejadas, observou-se que algumas perguntas eram respondidas e outras surgiam naturalmente. Foi notável que não se obtinha o total controle das situações. Mesmo que se experimentasse o jogo antes de aplicá-lo, não era possível antecipar os possíveis questionamentos dos jogadores.

A análise jogo a jogo indicou um aumento do aproveitamento da turma frente às novas situações propostas. Isso fica claro quando se volta às diferentes formas de resolução e aos distintos esquemas ou representações utilizadas pelos estudantes da turma.

Ao propor diversas classes de situações que expõem o mesmo campo conceitual, especificamente, as estruturas multiplicativas em problemas de contagem, percebe-se que o jovem utilizava esquemas que já havia empregado em jogos anteriores, reformulando-os ou adaptando-os às novas realidades.

As estratégias aqui tomaram o rumo do pensamento multiplicativo. A partir de certo ponto, **contar** já não era tão simples e eles identificavam que era preciso refletir sobre uma maneira prática de se chegar às quantidades de possibilidades distintas de ocorrência de um evento. Os jogos contribuíram para que os sujeitos pensassem nas possibilidades dentro de uma situação particular, ou seja, raciocinando de forma combinatória com vistas a traçar esquemas para ganhar o jogo. Das falas capturadas ao longo da investigação e das respostas dos alunos, destacam-se algumas que estabelecem uma relação entre os invariantes operatórios[25]:

a) "São possíveis 36 pares: um com todos, dois com todos, três com todos, quatro com todos, cinco com todos e seis com todos", explicação de como foram obtidas as possíveis somas no lançamento de dois dados distintos.
b) "Fórmula: Face x Face x Face => número de somas dos cavalos", generalização do caso para o lançamento de três dados.
c) "Os cavalos não possuem as mesmas chances porque há uns que tem somas a mais do que outros", referência às diferentes possibilidades dos cavalos.
d) "Número de cores vezes o número de espaços", referência à obtenção do número de senhas possíveis.

É de suma importância que trabalhos com jogos sejam propostos aos alunos, especialmente os que abordam problemas de contagem. Esse tema deve ser trabalhado, também, ao longo do Ensino Fundamental, respeitando-se os estágios cognitivos dos alunos e sempre possibilitando a eles que façam uso de seus conhecimentos prévios.

A interação social deve ser uma constante. Os trabalhos coletivos auxiliam no desenvolvimento da aprendizagem, pois estimulam a comunicação oral e escrita, levando o aluno a verbalizar os seus raciocínios, a explicar, a confrontar resultados e a transformar/adaptar suas estratégias de resolução.

25 Teorema-em-ação e conceito-em-ação.

O objetivo do jogo não deve ser restrito unicamente ao jogar por jogar, mas peculiarmente ao de promover uma desacomodação interna no aluno referente às suas habilidades matemáticas, promovendo, assim, uma melhor aprendizagem e uma ampliação do campo conceitual em questão.

REFERÊNCIAS

BACKENDORF, Viviane R. *Uma sequência didática de medidas de comprimento e superfície no 5° ano do ensino fundamental:* um estudo de caso. 198p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2010.

BARBOSA, Juliana Gontijo; FRANCHIN, Danielly Santos; COSTA, Marisa de. *O brincar e a Zona de Desenvolvimento Proximal na Educação Infantil.* Trabalho de estágio em Psicologia Escolar. CEINF – Campo Grande/MS. 2004.

BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas:* uma estratégia para as aulas de matemática. 5. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 2004. 100 p.

CARVALHO, Gustavo Quevedo. *O uso de jogos na resolução de problemas de contagem:* um estudo de caso em uma turma do 8º ano do Colégio Militar de Porto Alegre. 194p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17845>. Acesso em: 24 mai. 2010.

GRANDO, Célia Regina. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.* 239p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. A importância dos jogos e curiosidades matemáticas no processo de Ensino-Aprendizagem. *Educação Matemática em Revista* – RS, v. 5, n. 5, p. 26-28, 2003.

LUDWIG, Paula Isabel; RICO, Rosa Maria Tagliari. Geoplano e Análise Combinatória: construindo o conhecimento matemático no trabalho cooperativo. ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX, Caxias do Sul, 2006. *Anais...* Caxias do Sul: UCS, 2006.

MARTINS, Rosana; GONÇALVES, *Maria Imaculada. Experiências matemáticas com educandos do programa Curumim.* Programa da SEDESE-MG. 2007.

PIANTAVINI, Francismara Neves Oliveira. *Jogo de regras e construção de possíveis:* análise das situações de intervenção psicopedagógica. 231p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas,1999.

PONTE, João Pedro da. O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, Lisboa, v. 3, n.1, p. 3-18, 2006.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). *Acquisition of mathematics:* concepts and processes. New York: Academic Press Inc, 1991. p. 141-161.

______. Teoria dos Campos Conceituais. In: NASSER, L. (Ed.) SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1º, Rio de Janeiro, 1993. *Anais...* Rio de Janeiro, 1993. p. 1-26.

______. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Ed.). *Learning and teaching mathematics, an international perspective.* Hove (East Sussex): Psychology Press Ltda, 1997.

______. La théorie des champs conceptuels**.** *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 10, n. 2-3, p. 133-170, 1998.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. *A Formação Social da Mente:* o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4. ed. Traduzido por José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

______. *Pensamento e Linguagem.* Traduzido por Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

YIN, R. *Case study research:* Designs and methods. Newbury Park, CA: Sage, 1984.

ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: PRODUZINDO SIGNIFICADOS PARA AS OPERAÇÕES BÁSICAS COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Adriana Bonadiman

INTRODUÇÃO

A busca pela melhoria do ensino de matemática tem sido uma meta constante dos educadores dessa área. Uma preocupação comum entre os professores de matemática do Ensino Fundamental é o ensino e a aprendizagem da álgebra elementar [26].

É fato que o atual ensino da matemática, em especial o da álgebra, encontra-se afastado da realidade da maioria dos alunos. Existe certa habilidade, por parte deles, para resolver expressões algébricas mecanicamente, mas, em geral, não sabem porque chegaram a tal resultado ou porque certo problema é resolvido de determinada forma, muito menos fazem associações com os conhecimentos adquiridos em seu cotidiano.

Nessa perspectiva, a pesquisa aqui relatada teve por objetivo principal a elaboração, implementação e validação de uma proposta didática para o desenvolvimento de um ensino que promova a compreensão das operações básicas com expressões algébricas no Ensino Fundamental [27].

Foram também objetivos desta pesquisa o estudo da **produção de significados**[28] para tais operações e sua utilização na representação e na solução de situações-problema[29], além da elaboração de atividades específicas, visando desenvolver no aluno a compreensão de algumas propriedades básicas necessárias no desenvolvimento das operações com expressões algébricas no Ensino Fundamental.

---

26 A expressão **álgebra elementar** é utilizada neste texto como uma forma básica e fundamental da álgebra, ensinada e estudada na Escola Básica.
27 A pesquisa e a proposta didática estão descritas em Bonadiman (2007), dissertação desenvolvida sob orientação de Elisabete Zardo Búrigo, disponível em: <*www.lume.ufrgs.br/handle/10183/11228*>. Acesso em: 10 mai. 2009.
28 Os diferentes significados produzidos (atribuídos) pelos alunos para as referidas operações.
29 Entende-se por **situação-problema** tudo que constitui um desafio para o aluno.

POR QUE ABORDAR ESSE ASSUNTO?

A necessidade de abordar o ensino e a aprendizagem da álgebra e de propor uma sequência didática para o ensino das operações realizadas com algumas expressões algébricas surgiu a partir de experiências em sala de aula na Educação Básica. Nessa etapa escolar ficam evidentes as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos abordados na álgebra elementar. Em especial nas séries finais do Ensino Fundamental, em que a manipulação e as operações com expressões algébricas são motivo de "pavor" para muitos alunos. Esse receio também é observado na dificuldade de muitos profissionais em ensinar esse tópico sem que ele se torne, para seus alunos, mera memorização e aplicação de regras e símbolos.

Segundo Castro (2003), hoje, o ensino da álgebra faz parte da vida escolar desde o Ensino Fundamental, mas vem apresentando tantos fracassos que pode ser considerada um elemento de exclusão, pois grande parte dos alunos não consegue compreendê-la, transformando a álgebra em um simples aglomerado de sinais, símbolos e regras.

ELABORAÇÃO DE UMA PROPOSTA DIDÁTICA: TEORIA BALIZANDO A PRÁTICA

Até bem pouco tempo, acreditava-se que para ministrar uma "boa" aula de álgebra bastava que o professor fosse versado em matemática e expusesse aos estudantes os conceitos, resultados e técnicas de um determinado conteúdo através de uma sequência lógico-dedutiva usando definições, teoremas e métodos de resolução. O processo de ensino e aprendizagem dos alunos ocorria através de mera transmissão de conteúdos. Acreditava-se que o aluno "armazenava" o conhecimento "apresentado" pelo professor através da realização repetitiva e mecanizada de exercícios e memorizações de como esses exercícios foram desenvolvidos.

Na verdade, ainda existem professores que pensam que é dessa forma que os alunos aprendem, ou de maneira bem próxima a essa versão.

Vergnaud (1983, p. 173) chama de "ilusão pedagógica" a atitude dos professores que creem que o ensino consiste na apresentação organizada, clara, rigorosa, das teorias formais e que quando isso é bem feito os alunos aprendem. Na verdade, como Vergnaud, acredito que é através de situações de resolução de problemas que os conceitos são desenvolvidos e se tornam expressivos para os alunos.

Entretanto, desenvolver os conceitos matemáticos – em especial os algébricos – através da resolução de problemas não significa abandonar a formalização de tais conceitos: "Ao mesmo tempo em que as situações formais são necessárias, é preciso levar em consideração que o aluno pode estar ainda muito longe delas." (VERGNAUD, 1983, p. 172).

Para superar esse abismo entre a resolução de determinado problema e a formalização dos conceitos matemáticos envolvidos nesta resolução, é essencial o interesse pela situação-problema por parte de quem o resolve, e a sua apropriação.

Polya (1994) apresenta dois aspectos característicos da atividade de resolução de problemas: a formulação de problemas e os processos de pensamento indutivo. Entretanto, muitas vezes, o professor esquece-se deste último aspecto quando solicita que seus alunos solucionem algum problema que envolva conceitos algébricos.

Notari (2002, p. 85-86) propõe um ensino da álgebra elementar que contextualize os conceitos e procedimentos matemáticos.

> [Isso] deve acontecer em múltiplas vias, tais como: a resolução de problemas, generalização de padrões geométricos/figurativos, onde o aluno possa perceber e descrever regularidades, utilizando-se de diferentes linguagens, produzindo expressões aritméticas generalizáveis.

Nessa mesma linha de pensamento seguem Trigueros e Ursini (2005), afirmando que uma aprendizagem aceitável da álgebra elementar requer que os alunos desenvolvam a capacidade de trabalhar com cada um dos "três usos da letra"[30] e de passar de um ao outro de modo flexível, de acordo com as exigências do problema a ser resolvido. Esta preocupação também aparece nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1998).

De acordo com Lins e Gimenez (1997), a abordagem para a atividade algébrica precisa levar em consideração a produção de distintos significados para a mesma e tais significados produzidos devem ser investigados e justificados. O termo **significado**, que ocupa uma posição central nas perspectivas dos autores, assume a característica de ser o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e sim o que efetivamente se diz no interior de uma atividade. Produzir significados é, então, falar a respeito de um objeto.

Nessa perspectiva, para um ensino e aprendizagem da álgebra que leve em consideração os significados atribuídos pelo aluno, faz-se necessário certo entendimento sobre a produção do conhecimento desse aluno.

Lins e Gimenez (1997) colocam que a produção do conhecimento, algébrico ou não, ocorre quando o par crença-afirmação e justificação ocorre. Sendo a crença-afirmação aquilo no qual o sujeito do conhecimento acredita como produto desse conhecimento, enquanto a justificação é o que garante, para esse sujeito, que ele pode enunciar aquela crença-afirmação.

---

30 Três usos da letra em álgebra, segundo os autores: letra como *incógnita*, letra como **generalização** de procedimentos aritméticos e letra como **variável funcional**.

Para Meira (2003), produzir significados é estabelecer relações entre os conceitos, as ferramentas que utilizamos para construí-los (computadores ou registros escritos, por exemplo), e as atividades nas quais os conceitos emergem (por exemplo, durante a resolução de problemas).

Embora as definições sejam muito diferentes, chama a atenção, em ambas, o fato de considerarem os distintos significados produzidos pelos alunos para a atividade algébrica.

Picciotto e Wah (1993) defendem que uma abordagem satisfatória da álgebra deve envolver uma organização em espiral em que constem, além dos temas, conceitos e ferramentas, habilidades, aplicações e representações múltiplas[31]. Os autores consideram que as ferramentas, os temas e os conceitos alicerçam uma abordagem mais interessante e uma aprendizagem com maior compreensão dos conceitos algébricos. As habilidades matemáticas são desenvolvidas na medida em que o estudante utiliza-se das ferramentas para produzir significado[32] para os conceitos.

Considerando os diferentes conceitos e definições apresentados, certamente o ensino e a aprendizagem da álgebra não podem ser entendidos apenas como um domínio de conhecimentos acadêmicos.

Nessa perspectiva, pondera-se que uma aceitável abordagem para o ensino da álgebra elementar necessite partir dos **significados produzidos** pelo aluno para o conteúdo ou atividade algébrica, na busca da produção de um conhecimento[33] abrangendo a justificação deste significado.

Embora estabelecer relações entre os conceitos, as ferramentas e as atividades seja primordial para a cognição, considera-se que produzir significado sobre um assunto, conteúdo ou atividade algébrica seja mais do que isso. Produzir significado consiste em, além de estabelecer tais relações, ser capaz de enunciar um conjunto de afirmações, perguntas ou suposições sobre o objeto de estudo, envolvendo conjecturas e justificações.

A propósito, pensa-se que seja muito útil, para o ensino da álgebra, o professor tentar descobrir que relações os alunos constroem durante o processo de produção

31 Para esses autores, **ferramenta** é toda espécie de material que possa ser manipulado com a finalidade de promover compreensão ou auxiliar na resolução das atividades propostas; **tema** é tudo que pode servir como motivação para o estudo de tópicos algébricos. A interação entre ferramentas e temas possibilita **representações múltiplas,** o intercâmbio entre temas e conceitos possibilita **aplicações** enquanto a interação das ferramentas com os conceitos permite o desenvolvimento das **habilidades**.
32 Produzir significado para Piccioto e Wah não é o mesmo que para Lins e Gimenez. Para Piccioto e Wah, produzir significado é obter uma compreensão, atribuir motivos para a necessidade de se utilizar ou realizar determinadas ações.
33 Produção de conhecimento no mesmo sentido atribuído por Lins e Gimenez (1997).

de significados. Isso significa dizer que, mais do que selecionar atividades que podem potencialmente envolver pensamento algébrico, para o professor torna-se importante identificar os significados atribuídos pelos alunos para tais atividades, em especial os que divergem dos oficiais. E, não tratar tais significados como erros, mas como uma oportunidade de perceber de que forma o aluno está pensando sobre álgebra.

Com base nas ideias e nas orientações já expostas, esta proposta didática visa o desenvolvimento de um ensino que promova a compreensão das operações básicas com expressões algébricas no Ensino Fundamental, partindo da resolução de situações-problema e de uma aprendizagem cooperativa[34], proporcionando ao aluno condições de produzir significados para a atividade algébrica fazendo uso de materiais manipulativos e de representações múltiplas.

COLOCANDO A PROPOSTA EM PRÁTICA

Para a implementação da proposta, optou-se por uma abordagem qualitativa, na forma de estudo de caso, por acreditar-se que oferece um grande potencial para conhecer e compreender os problemas escolares.

Entende-se que seja de suma importância a interação do pesquisador com os pesquisados (alunos) e dos pesquisados entre si, mediante diálogos que propiciem a busca de **significados** para suas aprendizagens através de uma relação entre as vivências e as culturas dos pesquisados e os saberes já escolarizados (formalizados).

Nessa expectativa, a proposta didática foi aplicada em uma turma do segundo ano do terceiro ciclo (equivalente à sétima série) do Ensino Fundamental em uma escola da rede municipal de Porto Alegre. A escolha da escola justifica-se pelo fato de ela ser uma representante do ensino público, no qual estuda a maioria da população brasileira. Já a preferência por uma única turma foi no intuito de favorecer a observação direta durante o desenvolvimento de tal proposta, condição necessária para a abordagem metodológica escolhida.

Em concordância com as ideias apresentadas por Trigueros e Ursini (2005), por Usiskin (2003) e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), considerou-se de grande importância iniciar o trabalho com os diferentes usos da letra (como incógnita, como generalização do modelo aritmético e como variável funcional) antes das operações entre expressões algébricas. Julgaram-se as representações múltiplas como essenciais para as atividades cognitivas do pensamento, bem como o fato de que um conceito não se forma a partir de um único registro.

34 O termo **aprendizagem cooperativa** tem aqui o significado de uma aprendizagem que ocorra a partir da troca de experiências entre alunos e entre alunos e professor, evidenciadas na verbalização e discussões referentes às justificações elaboradas pelos alunos e no trabalho em grupo.

Tais escolhas foram feitas com o objetivo de permitir ao aluno exercer o direito de reflexão, discussão, interpretação e produção de conhecimento[35].

Wheeler (1996) afirma que, quando se escolhe uma abordagem para introduzir o pensamento algébrico, de alguma forma estamos interferindo no trabalho com as outras abordagens.

Tendo consciência de que outras abordagens metodológicas também seriam possíveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico, optou-se por esta abordagem por priorizar o envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem, a formulação de hipóteses e de argumentações, a cooperatividade entre os alunos, o processo de produção de significados para as operações entre expressões algébricas e, consequentemente, de conhecimento.

Quanto às atividades, algumas foram elaboradas, outras adaptadas de livros didáticos nacionais, estabelecendo-se alguns cuidados quanto à linguagem utilizada, de modo que tal linguagem se aproximasse o máximo possível da usada pelos alunos, e que as atividades representassem problemas a serem solucionados por eles.

Dessa forma, o trabalho foi estruturado em duas fases: a primeira fase enfocando os três diferentes usos da letra, e a segunda fase, o uso da letra como um símbolo abstrato nas operações entre expressões algébricas e suas propriedades.

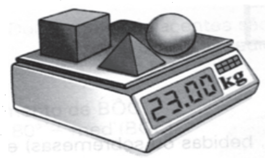
PRIMEIRA FASE: OS DIFERENTES USOS DA "LETRA"

O objetivo principal das atividades desenvolvidas durante a primeira fase foi estimular os alunos a sentirem necessidade de "algo a mais" do que eles já sabiam. O aluno perceberia que a aritmética nem sempre dava conta de responder às questões propostas.

Alguns exemplos de soluções dos alunos para situações-problema propostas são apresentadas nas Figuras 43, 44 e 45.

35 Produção de conhecimento no mesmo enfoque dado por Lins e Gimenez (1997).

6.Observe a balança abaixo. Se o cubo pesa 12 quilogramas e a bola pesa 4 quilogramas. Qual é o peso da pirâmide? 7



a) Explique como seu grupo resolveu esse problema: 23 – 12 – 4

b) Descreva uma forma de representar o peso da pirâmide se soubermos o peso do cubo e da bola:

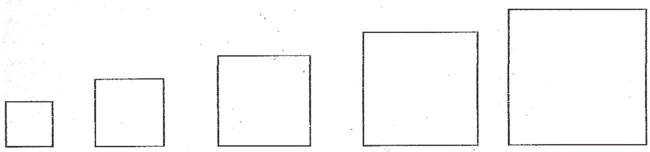
12 + 4 + X = 23

(Obs.: Figura extraída de:GIOVANNI,José Ruy. **Matemática pensar e descobrir: o + novo.** Sexta série.São Paulo: FDT,2002, p.187).

b) Subtraindo 23-12-4 = 7 que é o peso da pirâmide.

Figura 43 – Solução de aluno para problema envolvendo uso de variável como incógnita
Fonte: M. V. R., 8º ano (2006)

1. Observe a seqüência de quadrados, cujas medidas estão numa mesma unidade:



1 2 3 4 5

a) Qual a medida do lado dos próximos dois quadrados dessa seqüência? 6, 7

b) Complete a tabela abaixo:

Medida do lado do quadrado	1	2	3	4	5	6	7
Área do quadrado	1	4	9	16	25	36	49

c) Qual seria a área de um quadrado se seu lado medisse 10 unidades de medida? 100

d) E se o lado medisse 50 unidades de medida? 500

e) Observando os números da tabela descubra uma regra para calcular a área do quadrado se souber a medida do seu lado:

Multiplicando base X altura

f) É possível um quadrado com 64 unidades de área? Justifique sua resposta:

sim 8 8

g) E com 144 unidades de área?

sim 12 12

h) É possível um quadrado com 105 unidades de área? Justifique sua resposta:

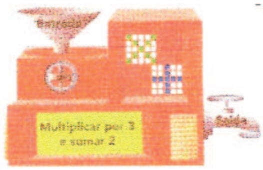
NÃO por que 10 x 10 = 100 que dá menos de 105 e 11 x 11 = 121 que dá mais de 105.

i) É possível saber a medida do lado do quadrado sabendo sua área? Explique como:

sim Área ÷ X = X

Figura 44 – Solução de aluno para problema envolvendo uso de variável como generalização
Fonte: R.C. S., 8º ano (2006)

2) Bruno, aluno da professora de matemática, gostou da idéia de máquina que transforma número e inventou essa outra máquina:



a) Observe o que a máquina de Bruno faz e complete a tabela abaixo:

Número de entrada	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Número de saída	-7	-2	1	2	3	6	11	18	27	38	51

b) O que podemos afirmar sobre o "número de saída" relacionado ao "número de entrada"? Por causa que é somado por dois mais o nº de entrada é multiplicado é somado por dois da entrada é multiplicado x 3 e é somado por +2

c) Existe alguma maneira de representar como ocorre o funcionamento dessa máquina ? Qual?

$x \times 3 = j + 2 = m$

d) Se x representa o "número de entrada", como poderíamos representar o que "sai" da máquina?

$x \times 3 + 2 = m$

e) Tente completar esta tabela:

Número de entrada	7	3	-5	10
Número de saída	23	11	- 13	32

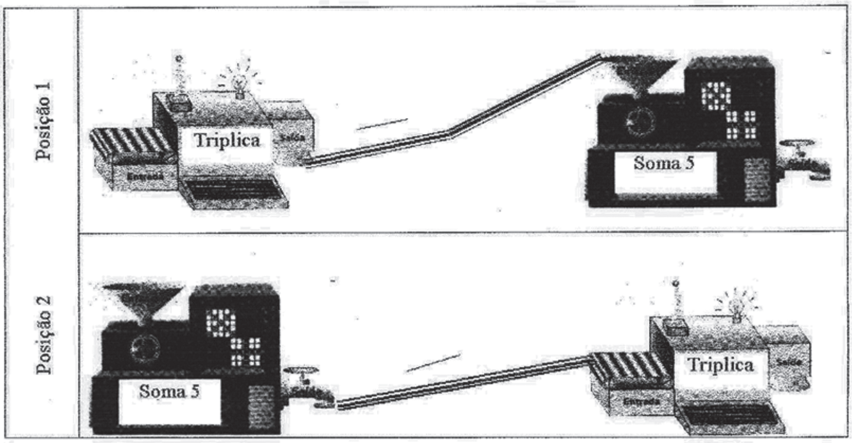
f) Que procedimentos você teve para chegar aos resultado desta tabela? Menos 2 e o resultado dividimos por 3

Figura 45 – Solução de aluno para problema envolvendo uso de variável como variável funcional
Fonte: A. G., 8º ano (2006)

Na atividade descrita na Figura 45, observa-se que a relação de igualdade não foi utilizada de maneira correta. Entretanto, para o grupo, a compreensão era de que a multiplicação do número de entrada por 3 resultaria em um certo valor (no caso representado por *j*) e que a esse número deveria ser somado 2, resultando em outro valor que até então era incógnito (o número de saída), representado pela letra *m*. Ou seja, o funcionamento da máquina havia sido compreendido pelo grupo, embora não representassem esse "funcionamento" através da linguagem matemática usual e sim por uma linguagem própria. Entretanto, no item *d,* em que era solicitada uma simbologia matemática, o grupo apresentou corretamente a função correspondente. Essa situação exemplifica que os significados atribuídos pelos alunos para a atividade algébrica nem sempre seguem os rigores da simbologia matemática.

Com a situação apresentada na Figura 46, o interesse era observar se os alunos perceberiam que a ordem de resolução alteraria o resultado final.

5) Gostando da idéia de máquinas, um aluno da turma resolveu fazer uma experiência maluca, usar duas máquinas e verificar o que aconteceria com os números após passarem por elas em diferentes posições:



a) Se colocarmos o número 2 na primeira máquina da posição 1 e na primeira máquina da posição 2, o número que sairá depois da segunda máquina será o mesmo para as duas posições?

SOMANDO O NÚMERO PRIMEIRO FICA MAIS ALTO PARA TRIPLICAR. | NÃO |

b) Complete as tabelas:

Posição 1

Número de entrada	Número de saída
-1	2
0	5
1	8
2	11

Posição 2

Número de entrada	Número de saída
-1	9
0	15
1	18
2	21

c) Faça a experiência com outros números e escreva suas conclusões:

$4 \times 3 = 12 + 5 = 17$

$5 + 5 = 10 \times 3 = 30$

d) Descreva uma regra para indicar o "número de saída" para as máquinas da posição 1.

$X \times 3 + 5 = Y$

e) Agora, descreva uma regra para as máquinas que estão na posição 2:

$X + 5 \times 3 = Y$

Figura 46 – Solução de aluno para problema envolvendo uso de variável como variável funcional
Fonte: P. E. S., 8º ano (2006)

Observa-se que, embora tenham percebido que a ordem das operações altera o resultado final e tenham representado suas conclusões utilizando uma escrita simbólica, no item *e* o grupo não fez uso dos parênteses na representação da função.

Booth (2003, p. 33) afirma que os alunos geralmente não usam parênteses "[...] porque acham que a sequência escrita de operações determina a ordem em que os cálculos devem ser efetuados".

De fato, quando foram questionados quanto ao não uso dos parênteses para representar a ordem das operações a serem realizadas, um aluno do grupo respondeu que bastava que eles soubessem como "funciona" e que eles explicariam oralmente aos demais colegas. A professora então fez o questionamento para o grande grupo: "qual é o resultado de $x + 5 \,.\, 3$, se $x = 2$?". Alguns alunos responderam que esse resultado era 17 e outros que era 21. Discutiu-se então como poderia haver resultados diferentes se o cálculo era o mesmo, e a conclusão obtida pela maioria da turma foi a de que seria necessário convencionar o que seria resolvido primeiro. A professora aproveitou a situação para explicar o porquê da necessidade do uso dos parênteses nessas situações.

SEGUNDA FASE: EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Na segunda fase deste experimento, foram utilizadas questões que remeteriam às operações entre expressões algébricas, bem como ao uso da linguagem simbólica. As questões também deveriam provocar a elaboração de hipóteses e a discussão entre os grupos.

O principal objetivo, nesta fase, era proporcionar aos alunos a produção de significados para as operações entre expressões algébricas e suas propriedades, com o intuito de que os alunos, posteriormente, manipulassem as expressões algébricas compreendendo e justificando os procedimentos utilizados.

Algumas situações-problema remetiam ao uso da adição (ou subtração), como a exemplificada no Quadro 6.

Quadro 6 – Atividade com o uso de operações – adição e subtração

1) Uma empresa de alimentos distribui seus produtos em cinco mercados da região. Um caminhão parte da empresa para fazer entregas em todos os cinco mercados. Sabe-se que:

– para ir da empresa até o primeiro mercado, o caminhão irá percorrer uma certa distância em quilômetros;

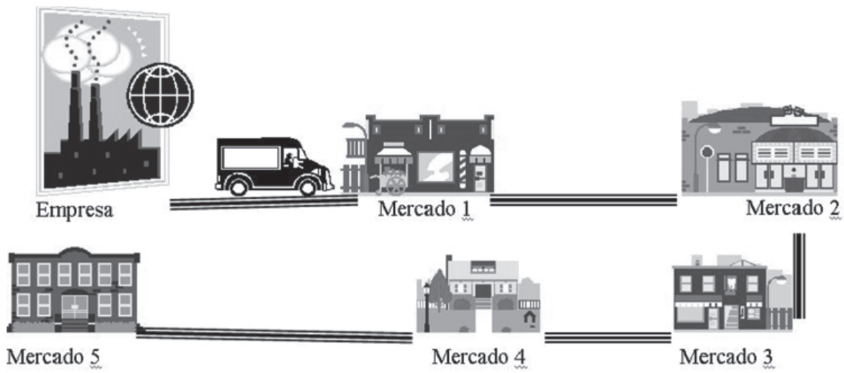
– para ir do primeiro mercado até o segundo, o caminhão irá percorrer 5 quilômetros a mais que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

– para ir do segundo mercado até o terceiro, o caminhão irá percorrer 3 quilômetros a mais que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

– para ir do terceiro para o quarto mercado, o caminhão irá percorrer 2 quilômetros a menos que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

– e, finalmente, do quarto mercado para o último, o caminhão irá percorrer o dobro do que percorreu para ir da empresa até o primeiro mercado.

Faça uma simulação da situação representando no esquema abaixo e responda as perguntas:



a) Como você poderia representar a distância total que o caminhão vai percorrer?

b) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa distância?

c) Se considerarmos a distância da empresa até o mercado 1 como sendo *x*, qual seria o valor de *x* se a distância total percorrida pelo caminhão foi de 15 km?

Fonte: Elaborado pela autora

Nesse tipo de atividade, observou-se certa dificuldade dos alunos quanto à representação e significação para uma "certa quantidade". Um dos grupos representou a situação (item *a*) da seguinte forma:

A distância percorrida foi $x + x + 5 + x + 3 + x - 2 + x + x$. Isso tudo é $x + 5 + 3 - 2$.

Questionados, os alunos justificaram a resposta dada dizendo que *x* era o valor desconhecido, e então a distância percorrida era "um valor" desconhecido mais os valores conhecidos. Nesse caso, o *x* na segunda expressão representaria a soma de todos os "xis" da primeira expressão. Após uma discussão entre os alunos do grupo e a interferência da professora – através de questionamentos – os alunos chegaram à conclusão de que não era possível utilizar a mesma letra *x* para representar a soma de todos os "xis" da expressão. O grupo, então, optou por representar tal soma como sendo $6x + 5 + 3 - 2$.

Outro grupo fez a seguinte representação: $x + x + 5 + x + 3 + x - 2 + x + x = J$.

A letra *J*, neste caso, representa um número que seria o resultado final desconhecido. Os alunos compreenderam a necessidade de somar as distâncias, mas não conseguiam aceitar a hipótese de que tal soma não resultaria em um valor específico (numérico) e contornaram a situação atribuindo uma incógnita a esse valor. Observa-se fortemente a necessidade de fechamento, isto é, não é aceito que o resultado da expressão não seja um valor determinado.

No momento da socialização das respostas com o grande grupo, houve um confronto de resultados e a discussão foi riquíssima, pois alguns grupos responderam que $x + x + 5 + x + 3 + x - 2 + x + x = 6x + 6$, um grupo pensou que a resposta apropriada seria $6x + 5 + 3 - 2$ e outro grupo respondeu que a expressão seria equivalente a um *J*. Após a discussão, os alunos concluíram que $6x + 5 + 3 - 2$ era equivalente a $6x + 6$, mas o *J* não tinha significado para a maioria dos grupos, exceto para o próprio grupo que havia dado *J* como resposta para a expressão. No final da discussão, tal grupo foi convencido, pelos demais, de que não poderiam atribuir outra letra para representar a soma dos "xis", elegendo como possível solução $6x + 6$.

Tendo em vista a possibilidade da produção de significados referentes às operações com expressões algébricas, a importância do uso de representações múltiplas e nas diferentes linguagens utilizadas (informal, simbólica ou algébrica, além da geométrica), buscou-se a utilização de materiais que pudessem proporcionar uma forma de representação das expressões com o intuito de auxiliar os alunos nas suas justificações.

A ferramenta, aqui chamada de material manipulativo, é uma adaptação feita a partir de alguns materiais comercializados: *Algebra Tiles* (*Cuisenaire*) e *Lab Gear* (*Creative Publications*)[36].

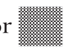
Algumas regras de utilização, propriedades dos materiais e peças utilizadas nas versões comerciais supracitadas foram modificadas, a fim de se obter uma adequação aos objetivos deste estudo.

Cabe advertir que a utilização de ferramentas que usam representações geométricas para produzir significado para sentenças algébricas como recurso didático é útil para lidar com certos tipos de operações entre algumas expressões algébricas e não com outras. Existem algumas ressalvas, como por exemplo, a de que tomando x como medida de comprimento, não é possível, com esse material manipulativo, representar geometricamente uma expressão como, por exemplo, $x^4 + x^5 + 2x^5 - 3x^4$.

36 Detalhes sobre esses materiais podem ser encontrados em Picciotto (2006).

Neves (1995, p. 51) afirma que "[...] devemos incentivar recursos didáticos desse tipo, entretanto não devemos esperar que isso resolva todas as dificuldades dos alunos com álgebra". Destaca-se que, neste estudo, essa não é a expectativa que se tem com o uso desse material manipulativo. Sua utilização é apenas a de um auxiliar na produção de significado para a atividade algébrica, com o intuito de fornecer subsídios para os alunos elaborarem suas justificações.

O material manipulativo é composto por retângulos e quadrados coloridos[37] feitos em papel cartão sendo:

- quadrados grandes de lados 5cm, na cor vermelha, representados aqui por ;
- quadrados médios de lados 3,5 cm, na cor preta, representados aqui por  ;
- quadrados pequenos de lados 1,5 cm, na cor amarela, representados aqui por  ;
- retângulos na cor rosa, de dimensões 1,5cm x 5cm, representados aqui por  ;
- retângulos na cor azul, de dimensões 3,5cm x 5cm, representados aqui por  ;
- retângulos na cor verde, de dimensões 1,5cm x 3,5cm, representados aqui por .

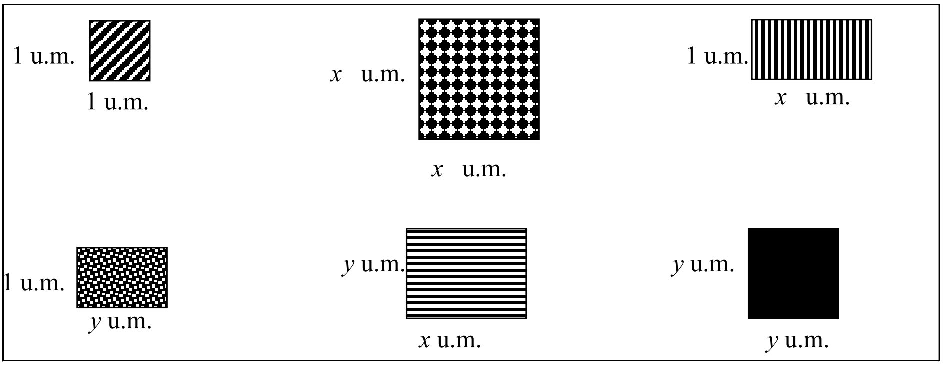
Para a utilização do material foram estabelecidas algumas combinações com os alunos, que são as seguintes:

- utilizar a área dos retângulos e quadrados em função da medida de seus lados;
- fazer convenções:

37 As cores e tamanhos aqui apresentados são apenas exemplos. As cores e medidas dos lados dos quadrados e retângulos podem ser alteradas conforme a necessidade, no entanto, é conveniente não utilizar medidas que possibilitem associações entre os lados, isto é, preferencialmente utilizar medidas de lados que sejam primos entre si. Por exemplo, se um quadrado tem lado 1 cm e outro tem lado 2 cm, o lado do segundo quadrado comporta exatamente dois do quadrado menor. Esse tipo de associação pode sugerir ao aluno conclusões **não** verdadeiras.

a) o quadrado menor será a unidade de área, tendo como medida do lado 1 u.m., o quadrado maior terá como medida do lado x u.m., o retângulo laranja terá altura 1 u.m e comprimento x u.m., o retângulo verde terá altura 1 u.m e comprimento y u.m., o retângulo azul terá altura y u.m e comprimento x u.m. e o quadrado médio terá como medida do lado y u.m. Portanto, o quadrado menor terá área 1, o maior terá área x^2 u.a. e o retângulo terá área x u.a., e assim por diante, como mostrado no quadro 7.

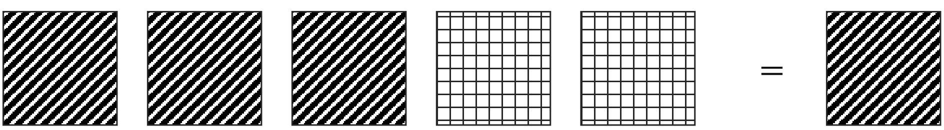
Quadro 7 – Material manipulativo



Fonte: Elaborado pela autora

b) O lado colorido será utilizado para a representação de valores positivos correspondentes às áreas dos quadriláteros e o verso de cada peça ( ) utilizado para representar o oposto desse valor, um valor negativo. Ou seja, – (+ 1) indica o oposto de + 1, que é – 1, e – (– 1) indica o oposto de – 1, que é + 1.

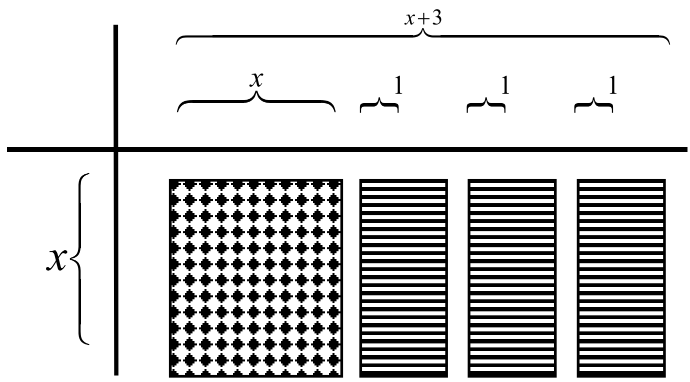
c) Cada positivo anula um negativo da mesma espécie. A subtração é considerada como a adição com o oposto, por exemplo, 5 – 2 é 5 + (–2).



d) Convencionou-se, com o material, que a área do retângulo cujo comprimento é um dos termos da multiplicação e cuja largura é o outro termo é obtida através da soma das áreas das figuras que compõem tal retângulo.

Por exemplo, o retângulo cujas dimensões são $x + 3$ e x possui uma área igual a $x^2 + 3x$, como pode ser observado na figura do Quadro 8.

Quadro 8 – Material manipulativo: multiplicação



Fonte: Elaborado pela autora

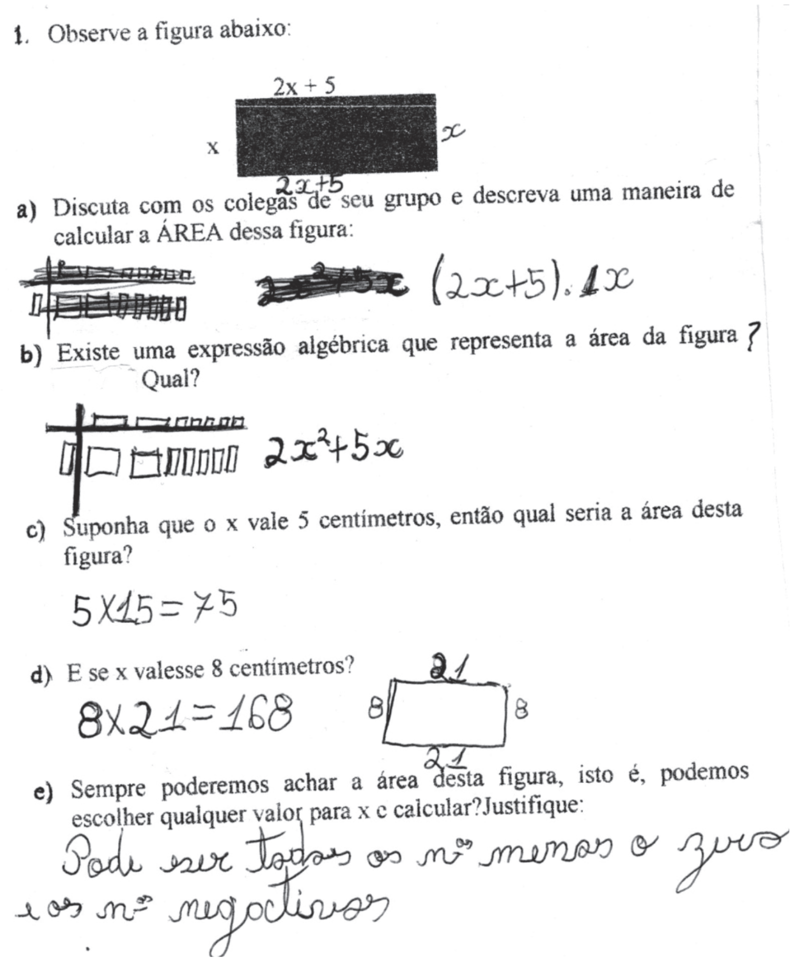
Convém ressaltar que devem ser considerados alguns detalhes quanto à disposição das peças para formar o retângulo:

- para que duas figuras sejam justapostas, os lados contíguos devem ter a mesma medida;
- quadrado grande não pode estar adjacente ao quadrado pequeno;
- quadrados pequenos devem estar sempre juntos e quadrados grandes também.

Salienta-se que esse material manipulativo apresenta algumas limitações:

1. somente pode representar situações em que apenas duas variáveis estão envolvidas;
2. restringe x e y a valores positivos ;
3. sugere que x e y são maiores do que 1, devido às dimensões das peças;
4. o material *não* é uma simulação de cada situação-problema em si, é apenas uma representação possível para a expressão algébrica obtida na situação-problema original.

Em algumas atividades, como a apresentada na Figura 47, o objetivo era o de que o aluno percebesse a possibilidade de representar a área de um retângulo através da multiplicação entre as expressões algébricas que representam as medidas de seus lados e de utilizar essa multiplicação para obter uma expressão equivalente ao produto.



1. Observe a figura abaixo:

2x + 5

x | x

2x+5

a) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA dessa figura:

$(2x+5) \cdot x$

b) Existe uma expressão algébrica que representa a área da figura? Qual?

$2x^2+5x$

c) Suponha que o x vale 5 centímetros, então qual seria a área desta figura?

$5 \times 15 = 75$

d) E se x valesse 8 centímetros?

$8 \times 21 = 168$

21

8 | 8

21

e) Sempre poderemos achar a área desta figura, isto é, podemos escolher qualquer valor para x e calcular? Justifique:

Pode ser todos os nº menos o zero e os nº negativos

Figura 47 – Solução de aluno para problema envolvendo atividade com o uso de operações – multiplicação
Fonte: F. R. S., 8º ano (2006)

Um fato que chama a atenção nesta atividade é o modo como os grupos resolveram os itens *c* e *d*, exemplificado na Figura 47. Todos, sem exceção, utilizaram a figura inicial como parâmetro para responder e substituíram o valor de *x* nas expressões algébricas associadas aos lados do retângulo. Nenhum grupo calculou as áreas substituindo o valor dado em cada item na expressão obtida no item *b*.

Interessante o significado atribuído para a propriedade distributiva e a maneira como certos grupos representaram, na atividade apresentada na Figura 48, as expressões, utilizando o material e procurando, concomitantemente, mostrar a solução através da distributividade. Na resposta ao item *c*, observa-se que a representação pelo material e a manipulação da expressão algébrica possuem significados diferentes para o aluno.

2. Complete a tabela abaixo:

Valor de a	Valor de b	Valor de c	a . (b + c)	a . b + c	a . b + a . c
1	3	5	8	8	8
2	1	3	8	5	8
0	4	1	0	1	0
–1	8	–2	–6	–10	–6
2	–1	3	4	1	4

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas três últimas colunas da tabela? Nós podemos afirmar que a primeira e a terceira são iguais só a segunda que é diferente

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na quarta coluna e na última? afirmamos que a na quarta e a última são totalmente iguais

c) Se não soubéssemos o valor de a, b e c, como você poderia representar a . (b + c)? poderíamos multiplicar tudo ex: a.(b+c) a·b + a·c ou então podemos fazer de outro jeito ex: a·b+a·c
poderíamos representar de forma algébrica ex: a+b+a+c = 2a+b+c

(Obs.: Atividade adaptada de: BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. Sétima série. São Paulo: FDT 2000)

Figura 48 – Solução de aluno para problema envolvendo atividade com o uso de operações – propriedades
Fonte: F. R. S., 8º ano (2006)

Na verdade, o **concreto** e o **formal** eram utilizados ao mesmo tempo, como representações diferentes de uma mesma atividade algébrica.

Convém ressaltar que as atividades sempre foram resolvidas em pequenos grupos, pois acredita-se que esse tipo de trabalho promova a interação entre os alunos, favorecendo o desenvolvimento oral e escrito das argumentações, explorando as habilidades de observação, descrição, explicação, questionamento e elaboração de hipóteses. Além disso, o que um aluno percebe pode ser percebido por outro de forma diferente, ou até nem ser percebido, o que serve como alavanca para despertar discussões entre os grupos. Isso é o que se entende por aprendizagem cooperativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Avaliando a aplicação da proposta, considera-se que os alunos avançaram no processo de produção de significados para a atividade algébrica e que houve progresso no conhecimento matemático, bem como em suas atitudes e autonomia no sentido de observar, formular hipóteses, tirar conclusões e justificar suas respostas.

Tendo consciência de que outras abordagens metodológicas também seriam possíveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico, acredita-se que a proposta didática abordada nesta pesquisa, qualitativamente, favoreceu o envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem, a formulação de hipóteses e argumentações, a cooperatividade entre os alunos, o processo de produção de significados para as operações entre expressões algébricas e, consequentemente, de conhecimento.

Além disso, a cooperatividade e a possibilidade de todos exporem suas hipóteses sem a preocupação com sua correção e precisão favoreceram a autoestima dos alunos.

Convém ressaltar que, na escolha das atividades a serem propostas, é importante perceber que as tarefas trazidas para a aula serão sempre transformadas pelos alunos, na medida em que eles criam significados próprios que dependem de seus objetivos. Assim, ao invés de enfatizar as tarefas em si e esperar que tenham um significado único e fixo, o professor precisa se preocupar em gradualmente aproximar os significados criados pelos alunos dos pretendidos pela tarefa. Cabe ao professor cuidar para que as discussões sobre a legitimidade ou não das operações não se encerrem com a justificativa dada pelo uso do material manipulativo ou pelas hipóteses apresentadas, propiciando a compreensão e a generalização do uso das propriedades envolvidas nas operações entre expressões algébricas, inclusive na sua representação simbólica e sem a dependência do material manipulativo.

Vale salientar que os questionamentos do professor foram importantes em todas as fases do desenvolvimento desse trabalho, mas, nos momentos de socialização com toda a turma das respostas obtidas por cada grupo, foram essenciais.

Quanto ao papel do professor, algumas preocupações são primordiais ao se propor uma abordagem pedagógica com os propósitos aqui apresentados:

- Primar pelo engajamento do aluno em atividades que inter-relacionem diferentes aspectos da álgebra associados à resolução de problemas e não somente manipulações mecânicas de expressões algébricas.
- Propor situações em que o aluno possa investigar, conjecturar e elaborar justificações, tanto em contextos numéricos e algébricos, como em representações geométricas, identificando suas estruturas para que possa descrevê-los simbolicamente.
- Proporcionar aos alunos momentos – orais e escritos – em que os mesmos possam apresentar as diferentes respostas encontradas, para que possam ser discutidas e corrigidas por toda a classe.

Nessa produção de significados em contextos algébricos, a primeira fase envolvendo os diferentes usos da letra foi fundamental para o trabalho posterior.

Entretanto, com base na experiência realizada, sugere-se que, após a primeira fase, seja realizada uma revisão quanto aos conceitos de área de retângulo e ao uso dos sinais, pois tais conceitos são fundamentais para o uso do material manipulativo, nas comparações das respostas e nas justificações dadas pelos alunos.

No transcorrer das tarefas, percebeu-se uma crescente familiaridade dos alunos com os elementos e processos utilizados na obtenção de expressões equivalentes – uso do material e o uso do algoritmo – em expressões numéricas e algébricas.

Com relação a possíveis questionamentos quanto à validade de um investimento no uso de um material que possui regras para sua utilização, observa-se que os alunos da Escola Básica, mesmo tendo um pensamento genérico relativamente desenvolvido, em muitos momentos necessitam de materiais manipuláveis para confirmarem suas hipóteses ou para convencerem seu colega de que sua hipótese está correta.

Este trabalho mostrou-se especialmente importante por ter sido realizado em uma escola pública e por comprovar que, sendo provenientes de um ambiente cultural em que a álgebra não está explicitamente presente, esses alunos aprendem álgebra, são capazes de formular conjecturas buscando justificá-las, aprimoram sua linguagem matemática, produzem significados para as atividades algébricas, compreendem operações e propriedades, desenvolvendo seu pensamento algébrico e suas habilidades matemáticas.

Concluindo, a investigação, a curiosidade, o pensamento organizado aliados à vontade de resolver os problemas são ingredientes essenciais para o progresso em qualquer domínio da atividade humana.

REFERÊNCIAS

BONADIMAN, Adriana. *Álgebra no ensino fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas.* 289 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007. Disponível em <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/11228>. Acesso em: 10 mai. 2009.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. *As idéias da álgebra.* Trad. Hygino H. Domingues.São Paulo: Atual, 2003. p. 23-37.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais* (5ª a 8ª série): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CASTRO, Monica Rabello de. Educação algébrica e resolução de problemas. *Boletim:* Salto para o futuro/TV Escola, 5 a 9 de maio de 2003. Disponível em <http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/eda/index.htm>. Acesso em: 17 mai. 2007.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas: Papirus, 1997.

MEIRA, Luciano. Significados e modelagem na atividade algébrica. *Boletim*: Salto para o futuro/ TV Escola, 2003. Disponível em: <http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/ eda/tetxt2.htm>. Acesso em: 10 jun. 2007.

NEVES, Paulo S. de O**.** *Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem da álgebra.* Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, 1995.

NOTARI, Alexandre Marques. *Simplificação de frações aritméticas e algébricas:* um diagnóstico comparativo dos procedimentos. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUCSP, São Paulo, 2002.

PICCIOTTO, Henri. *Algebra Manipulatives:* Comparison and History. 1993. Disponível em: <http://www.picciotto.org/math-ed/manipulatives/alg-manip.html>. Acesso em: 03 jan. 2006.

PICCIOTTO, Henri; WAH, Anita. A New Algebra: Tools, Themes, Concepts. *Journal of Mathematical Behavior,* v. 12, n. 1, mar. 1993. Disponível em: <http://www.picciotto.org/math-ed/new-algebra/new-algebra.html>. Acesso em: 01 out. 2007.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

TRIGUEROS, María; URSINI, Sonia. Integración de los distintos usos de la variable. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICAV, 2005, Porto. *Actas...* Porto: 2005. 1 CD-ROM.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. *As idéias da álgebra.* Trad. Hygino H. Domingues, p. 9-22. São Paulo: Atual, 2003.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York: Academic Press Inc, 1983. p. 127-174.

WHEELER, David. Backwards and Forwards: Reflections on different approaches to Algebra. In: BEDNARZ, N. et al. (Eds.). *Approaches to Algebra.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 317–325.

ROBÓTICA EDUCACIONAL COMO CENÁRIO INVESTIGATIVO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Karina Disconsi Maliuk
Francisco Egger Moellwald

Este capítulo apresenta a experiência da professora Karina Disconsi Maliuk com robótica nas aulas de Matemática da EMEF José Mariano Beck, desenvolvida durante os anos de 2007 e 2008. Nele são examinados o estudo da robótica educacional e as implicações da utilização desse recurso, principalmente na mudança de concepção dos papéis do professor e do aluno nas aulas de matemática. Este trabalho apóia-se na abordagem teórico-prática proposta por Ole Skovsmose (2008), cujos cenários para investigação são pensados em paralelo com a sala de aula tradicional. O estudo encerra-se com algumas relações entre a robótica e os conceitos matemáticos explorados por meio de atividades práticas. Também são pensadas algumas possibilidades futuras, e o leitor deste trabalho é convidado a experimentar a robótica como um possível recurso didático e a construir seu próprio roteiro de experiências.

CAMINHOS PERCORRIDOS PARA CHEGAR ATÉ AQUI: ENSAIOS?[38]

Fui nomeada para assumir aulas de Matemática na rede municipal de ensino de Porto Alegre em 2007, e assumi as turmas de oitavo e nono ano de escolaridade na EMEF[39] José Mariano Beck, Bairro Bom Jesus, periferia da Cidade de Porto Alegre.

Foi minha estréia na rede municipal. Não sou uma pessoa que teme mudanças, pelo contrário! Para mim, são as mudanças que tornam a vida interessante. Porém, fiquei muito abalada ao assumir esse novo compromisso, pois tive que enfrentar situações muitas vezes desesperadoras e até então desconhecidas para mim. Foi meu primeiro contato com uma vila de papeleiros e com as múltiplas formas de miséria que se desenvolvem nela.

38 Ao longo do capítulo, a primeira pessoa do singular refere-se à professora Karina Disconsi Maliuk, autora da dissertação que o originou. O professor Francisco Egger Moellwald acompanhou a professora Karina como orientador dessa dissertação.
39 Escola Municipal de Ensino Fundamental.

Mas eis que, em maio de 2007, surge um convite aberto a todos os professores da escola para participar de um treinamento promovido pela SMED[40] para trabalhar com robótica nas salas de aula da rede municipal. A escola, que já possuía um histórico de pioneirismo na utilização da robótica na rede, havia sido informada de que receberia oito kits de material para robótica e precisava ter pelo menos um representante para frequentar o curso. Como nenhum colega se ofereceu para participar desse treinamento, fui convidada pela direção a fazê-lo, o que aceitei imediatamente.

Curso concluído, em agosto de 2007, iniciei o trabalho com robótica em minhas aulas de Matemática. O material utilizado nas atividades foi o Kit 9793, LEGO Mindstorms[41].

É quase indescritível o efeito que a oportunidade de trabalhar com a robótica teve em minha vida profissional. Como bem define Bondía (2002), foi uma experiência no sentido de que algo realmente **aconteceu** e tocou fundo! Os alunos envolvidos no projeto, vistos como sujeitos da experiência, assim como eu, mostraram-se dispostos a receber de braços abertos a proposta e, ao recebê-la, tornaram-se um "espaço onde tem lugar os acontecimentos" (BONDÍA, 2002, p. 24).

Não há a intenção de afirmar que a robótica é a solução para todos os problemas que um professor de Matemática enfrenta em suas aulas. Mas é possível garantir que essa iniciativa foi uma resposta para muitos questionamentos e dúvidas, inseguranças e medos, que já estavam, inclusive, prejudicando o trabalho em sala de aula.

Este texto trata de uma experiência que funcionou com certo grupo de alunos, porém, talvez a mesma proposta não alcance os resultados esperados, quando aplicada em outro contexto, com um grupo diferente de alunos. Mas ainda assim, como bem aprendi, até o que "não dá certo" serve como objeto de análise e de discussão, com vistas à construção do conhecimento.

AS PRIMEIRAS CENAS DO TRABALHO COM A ROBÓTICA

O trabalho com robótica nas aulas de matemática desenvolveu-se na Escola Municipal de Ensino Fundamental José Mariano Beck, nos anos letivos de 2007 e 2008, quinzenalmente, contando com dois períodos seguidos de 50 minutos para cada encontro. O trabalho fez parte de um projeto maior, promovido pela Secretaria de Educação do Município de Porto Alegre, que disponibilizou kits de robótica para todas as escolas da rede que oferecem as séries finais do Ensino Fundamental e treinamento para os professores interessados em utilizar a robótica em suas aulas.

---

40 Secretaria Municipal de Educação de Porto Alegre.

41 Conheça mais sobre o material em: < http://www.edacom.com.br/>. Acesso em: 05 jul. 2011.

Neste caso, os períodos disponibilizados para o trabalho com a robótica aconteceram nos três períodos semanais regulares de matemática das turmas envolvidas, com o objetivo de integrar os conceitos matemáticos desenvolvidos nas aulas com as propostas de construção e programação dos robôs. O trabalho realizado pela via da robótica educacional mostrou-se inteiramente adequado às necessidades de integração e de motivação dos alunos, desde o início.

A EMEF José Mariano Beck localiza-se na periferia de Porto Alegre, no Bairro Bom Jesus. Pode-se afirmar que os alunos da comunidade vivem em uma zona de risco, onde acontecem conflitos armados periodicamente, principalmente em função do tráfico de drogas. A violência externa acaba se refletindo nas atitudes dos alunos: alguns mostram uma grande dificuldade em participar de trabalhos colaborativos e administrar conflitos de forma não violenta; a maneira que encontram para lidar com seus problemas é a agressão.

IMPLICAÇÕES DO TRABALHO COM ROBÓTICA PEDAGÓGICA

Diferentemente da robótica industrial, em que a finalidade de um sistema robótico é permitir que o trabalho feito pelo robô seja de melhor qualidade, realizado em menor espaço de tempo e com menos gastos do que aquele desenvolvido pelo homem, a robótica educacional visa o processo de construção e de elaboração do pensamento do aluno. Aqui, o objetivo não é apenas atingir o produto final, mas destacar o caminho percorrido até um determinado fim.

Durante a construção e a programação de um robô existe o pensar sobre o que se está fazendo, de forma lógica e ordenada. Uma peça, ao ser encaixada, deve estar de acordo com o objetivo da montagem e um comando dado deve estar vinculado ao que se deseja em termos de ação. Se não há lógica na montagem, não há robô, e se não há lógica na programação, não há programação, pois essa programação é feita sempre pela necessidade do próprio aluno de encontrar uma solução para um problema detectado por ele mesmo. Por meio de uma atividade lúdica, como montar/desmontar um robô e planejar/testar a programação, percebe-se que o aluno elabora uma rede de relações bastante complexa. Apenas conhecendo o funcionamento do dispositivo e tendo claro o objetivo a ser alcançado é que o aluno pode prever a ação e planejar, ou seja, programar o robô, e ele poderá, em seguida, testar o que foi planejado. Na tentativa de implementar um sistema inteligente e autônomo, o aluno procura nas suas ações anteriores uma condição de sequência do seu planejamento.

Em uma perspectiva de trabalho em que se considere o aluno como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizar a aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, o professor precisará escolher os problemas, que possibilitam a construção de conceitos e de procedimentos, e alimentar os processos de resolução que surgirem, sempre tendo em vista os objetivos que se propôs a atingir.

Outra função do professor é a de mediador, ao promover a análise das propostas dos alunos e sua comparação, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar e contestar. Nesse papel, o professor é responsável por arrolar os procedimentos empregados e as diferenças encontradas, promover o debate sobre resultados e métodos, orientar as reformulações e valorizar as soluções mais adequadas.

Como um incentivador da aprendizagem, o professor estimula a cooperação entre os alunos, tão importante quanto a própria interação professor-aluno. O confronto entre o que o aluno pensa e o que pensam seus colegas, seu professor e as demais pessoas com quem convive é uma forma de aprendizagem significativa[42], principalmente por pressupor a necessidade de formulação de argumentos – dizendo, descrevendo, expressando-se –, e de validá-los – questionando, verificando, convencendo (BRASIL, 1998).

Se o trabalho for dirigido pelo professor de forma que ele determine os passos a serem seguidos, de maneira a obter características e funções iguais a todos os modelos construídos pelos alunos, então não se está realizando uma atividade de robótica educacional. O trabalho deve ser desafiador; cada grupo de alunos deve montar o seu próprio robô e elaborar sua própria programação. Se o dispositivo realizar a tarefa proposta de acordo com o esperado, então é possível concluir que o modelo foi construído corretamente e a programação está adequada.

E se não funcionar? O aluno tenta uma hipótese, uma programação elaborada por ele e "não dá certo", o robô não funciona como o imaginado. Excelente! É aí que ele pode refletir sobre sua própria ação: "Por que não funciona?". Aqui se encontra a base das discussões apresentadas neste texto.

É importante deixar claro que não se está estimulando o aluno a errar. Chegar à programação adequada é desejável e deve ser aplaudido, sim. Porém, aqui, o erro não terá o aspecto punitivo muitas vezes visto nas aulas de matemática, em que aquele que erra recebe "nota vermelha" do professor e é taxado de "burro" pelos colegas. Aqui, o errar se mostrará uma experiência muitas vezes indissociável do processo de

42 Aprendizagem significativa, aqui, toma o sentido da compreensão de significados, relacionando-se às experiências anteriores e às vivências pessoais dos alunos, permitindo a formulação de problemas – de algum modo, desafiantes – que incentivem o aprender mais. O estabelecimento de diferentes tipos de relações entre fatos, objetos, acontecimentos, noções e conceitos desencadeia modificações de comportamentos e contribui para a utilização do que é aprendido em diferentes situações.

ensino-aprendizagem. A análise dos erros, muito mais do que dos acertos, traz à tona conhecimentos e relações que não se manifestariam se fossem esperadas e desejadas apenas as respostas corretas. Ao cometer um erro e tentar compreender o porquê desse erro, percebe-se o estabelecimento de conexões lógicas indispensáveis à construção do conhecimento.

Se o aluno é capaz de analisar uma situação, realizar um planejamento adequado às suas necessidades e empreender uma ação baseada em sua análise, ele é alguém com potencial de sucesso em todas as áreas. A cada nova hipótese formulada na tentativa de solucionar o problema, o aluno torna-se agente de seu próprio conhecimento e constrói o processo de aprendizagem. Baseado em situações por ele mesmo elaboradas, a partir da interação com uma proposta que lhe foi feita, ele busca a solução e pode avaliar de imediato se sua ação foi a mais adequada ou não, com isso ele aprende a aprender. Além disso, a robótica proporciona a possibilidade de (re)produzir estruturas cada vez mais complexas que vão desde a montagem de carrinhos básicos com uma programação simples até a construção de elaborados mecanismos com várias programações que, de acordo com a necessidade, interagem entre si ou com outros mecanismos.

Uma atividade, realizada em uma das aulas, que ilustra essa crescente complexidade nas construções e, consequentemente, no raciocínio, consistiu na adaptação de um motor a construções que não o possuíam. A atividade foi realizada com a moto e com a montanha russa[43]. Ambas as construções não apresentam motores em sua versão original. Porém, chegando ao término da construção orientada pela revista, foi proposto aos alunos que encontrassem um meio de incorporar um ou mais motores à sua construção, de maneira que o dispositivo funcionasse – realizasse movimentos – de forma automatizada.

Nos dois casos, foi muito gratificante observar os alunos aplicando seus conhecimentos sobre as montagens e sobre a programação de forma a alcançar o objetivo proposto. Percebia-se, por exemplo, que eles haviam compreendido perfeitamente a função principal das engrenagens e sabiam em que ocasiões elas eram apropriadas. Da mesma maneira, eles souberam incorporar esses mecanismos à programação, de forma a obter o movimento desejado.

Percebeu-se que essas atividades revelaram um ambiente que incentiva a autonomia dos alunos e a capacidade deles de produzir estratégias para resolver um problema. Também foi possível notar que tais atividades são apropriadas para se iniciar a discussão sobre o significado de "Cenários para Investigação".

43 As construções da moto e da montanha russa são propostas na *Revista Lego Zoom*, respectivamente na versão amarela, n. 2, p. 62, e na versão verde, n. 2, p. 42. Maiores informações sobre a Revista estão disponíveis em: <http://www.revistazoom.com.br/educadores/>. Acesso em: 05 jul. 2011.

APRESENTANDO OS CENÁRIOS

No texto "Cenários para Investigação", Ole Skovsmose (2008) descreve uma das conclusões do trabalho desenvolvido por Tonny Cotton em relação às salas de aula inglesas. A aula de matemática apresenta-se dividida em duas partes: "[...] primeiro, o professor apresenta algumas idéias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios selecionados" (SKOVSMOSE, 2008, p. 15).

Esse tipo de concepção de ensino de matemática acaba por formar cidadãos que não conseguem aplicar efetivamente conceitos matemáticos para resolver situações de seu dia a dia:

> Analisando o ensino tradicional verifica-se que a preocupação maior está na apresentação de conceitos contidos em um currículo. Esse enfoque curricular provoca um distanciamento entre o que é ensinado e a realidade dos fenômenos físicos, biológicos e sociais em que o aprendiz está inserido. Isto pode ser observado pelo significativo número de pessoas que sentem dificuldades em aprender conceitos de matemática, ciências ou biologia. Também é elevado o número de pessoas que, embora nunca tenham demonstrado problemas no aprendizado de tais conceitos, se mostram incapazes de aplicá-los de forma prática. (VALENTE; CANHETE, 1993, p. 1)

Por outro lado, atividades de planejar, projetar e criar estão presentes em quase todos os campos da atividade humana. Engenheiros projetam quando estão preparando uma obra, autores literários criam quando estão produzindo um livro ou artigo, administradores planejam, elaboram projeções e criam diferentes estratégias quando estão reestruturando uma organização. Portanto, é de se esperar que atividades que envolvam projetar, criar e planejar façam parte do ambiente escolar. O emprego da robótica em ambientes educacionais pode ser uma ferramenta adequada para o desenvolvimento de atividades que envolvam criar, projetar e planejar, favorecendo assim o processo de ensino-aprendizagem.

Apesar da pesquisa de Cotton (*apud* SKOVSMOSE, 2008) ter se realizado em salas de aula inglesas, pode-se muito bem transpor essa realidade para as salas de aula brasileiras. Grande parte dos professores de matemática deve se enxergar nessa descrição, classificada por Skovsmose (2008) como educação matemática tradicional, cujas situações de aprendizagem se enquadram dentro do chamado "paradigma do exercício".

Para Skovsmose (2008), o paradigma do exercício pode ter como contraponto uma abordagem de investigação que proporcione um ambiente rico em recursos para se fazer investigações.

CONHECENDO OS DIFERENTES AMBIENTES DE APRENDIZAGEM SEGUNDO SKOVSMOSE (2008)

Através da matriz a seguir, é possível visualizar cada um dos ambientes de aprendizagem propostos por Skovsmose (2008):

Quadro 9 – Ambientes de Aprendizagem

	Paradigma do Exercício	Cenários para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2008, p. 15)

Inicialmente, apresenta-se uma breve descrição e análise dos três ambientes relacionados ao Paradigma do Exercício. Seguem-se a essa apresentação as características de cada ambiente relacionado aos Cenários para Investigação.

O PARADIGMA DO EXERCÍCIO

O ambiente tipo (1) é aquele em que as atividades propostas são apresentadas no meio da "matemática pura", como por exemplo, os exercícios aritméticos e algébricos que não fazem referência a qualquer tipo de contexto.

Como exemplos, temos as infindáveis listas de exercícios do tipo:

Efetue: $5x + 4x - 2x =$

O ambiente tipo (3) é aquele em que os exercícios fazem referência a certa semirrealidade, muito comum nas aulas de matemática, já que frequentemente são usados exercícios referentes às mais diferentes semirrealidades para justificar a importância da matemática no "cotidiano".

Um exemplo de exercício adaptado de Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006, p. 93) e baseado em uma semirrealidade é dado a seguir:

> Duas transportadoras, A e B, cobram os seguintes valores para o preço de uma determinada entrega:
> Transportadora A: R$ 80,00 por quilômetro percorrido.
> Transportadora B: R$ 80,00 fixos mais R$ 60,00 por quilômetro percorrido.
> Qual das transportadoras é mais vantajosa para uma distância maior que 10 km?

Possivelmente, as ideias descritas no exercício são facilmente encontradas no dia a dia, e mais ainda na comunidade onde se localiza a EMEF José Mariano Beck. Desde cedo, os alunos estão acostumados a acompanhar os pais ou responsáveis na coleta, transporte e seleção de resíduos recicláveis. Porém, dificilmente a pessoa que construiu esse exercício fez alguma pesquisa sobre a forma como são transportados os materiais recolhidos pelos carroceiros da comunidade ou investigou qual a distância percorrida por eles para a coleta. A situação é artificial e o exercício está localizado em uma semirrealidade que existe apenas na imaginação do autor do problema.

O ambiente tipo (5) traz exercícios baseados na vida real como, por exemplo, diagramas representando as condições de trabalho em determinadas regiões, servindo de base para a elaboração das questões. Aqui, faz sentido questionar e suplementar as informações dadas pelo exercício, pois as situações são extraídas da vida real. Entretanto, as atividades ainda estão estabelecidas no Paradigma do Exercício, pois os alunos apenas analisam informações coletadas por outras pessoas, em realidades que, apesar de apresentarem informações verídicas, muitas vezes, não estão relacionadas com a sua vida. Os dados apresentados nas atividades são construções já prontas, cabendo aos alunos apenas utilizá-los para resolver os exercícios propostos, invariavelmente aplicando técnicas matemáticas pré-determinadas e, ainda, esperando sempre uma única resposta correta.

Ao contrário disso, a resolução de problemas na perspectiva dos Cenários Investigativos, como será visto a seguir, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e de procedimentos matemáticos, bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1998).

CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO

O primeiro ambiente descrito como Cenário para Investigação é classificado como tipo (2). Um exemplo de atividade que caracteriza o ambiente tipo (2) é apresentado por Skovsmose (2008) através de uma tabela de números:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	...						

Figura 48 – Tabela de Números
Fonte: Skovsmose (2008, p. 17)

A proposta é colocar um retângulo sobre a tabela, de modo que ele envolva seis números. Os números associados aos quatro vértices do retângulo são chamados *a, b*, *c* e *d*, a contar do canto superior esquerdo e no sentido horário. Calcula-se o valor de F da seguinte maneira:

$$F = ac - bd$$

Por exemplo, observa-se que, ao colocar o retângulo em duas posições diferentes (ver Figura 48), tem-se:

$$22.34 - 24.32 = -20 \quad e \quad 37.49 - 39.47 = -20$$

O retângulo pode ser transladado para outras posições e o valor de F pode ser recalculado. Vamos encontrar o mesmo resultado? O que acontece se girarmos o retângulo em 90º? E se escolhermos um retângulo maior e fizermos translações semelhantes? Isso apenas acontece com retângulos? E se usarmos as outras figuras?

Muitas outras perguntas podem ser propostas a partir dessa tabela de números, inclusive em diferentes disposições, quadriláteros e figuras com *n* lados.

O ambiente tipo (4), assim como o tipo (3), também contém referências à produção de exercícios, mas de uma maneira diferente. Nesse ambiente, que é um cenário para investigação, os exercícios aparecem como um convite para que os alunos façam explorações.

Um exemplo trazido por Skovsmose (2008) é a “Corrida de Cavalos”.

Nela, 11 cavalos – numerados de 2 a 12 – estão preparados na linha de partida. A pista de corrida é desenhada no quadro:

				X						
				X	X			X		
	X	X		X	X	X	X	X		X
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Figura 49 – Pista de Corrida
Fonte: Skovsmose (2008, p. 18)

Dois dados são jogados e, a partir da soma dos números tirados, marca-se um X no diagrama. Como mostra a Figura 49, a soma 6 ocorreu três vezes. O cavalo 6, portanto, é o vencedor, seguido pelos cavalos 7 e 10.

Uma nova corrida se inicia e os alunos já têm certo conhecimento sobre os cavalos – esses já não são mais anônimos. O número 2, por exemplo, é chamado de tartaruga. O número 6, que venceu a corrida anterior, é o favorito dos apostadores.

A próxima corrida, agora mais longa – com cinco casas – vai começar. Os alunos já estão criando hipóteses: será que o número 7 seria um bom candidato para uma corrida de longa distância? Por quê?

A lógica engessada que governa as semirrealidades do ambiente tipo (3) não está em vigor. Aqui, há uma semirrealidade localizada em um cenário para investigação, em que muitas descobertas estão esperando as crianças e também – por que não? – o professor. Estratégias estão para ser elaboradas, testadas e aperfeiçoadas.

Finalmente, o ambiente tipo (6) é aquele em que o cenário para investigação encontra um grau maior de realidade. Alguns exemplos desse cenário podem ser encontrados nos chamados **projetos**.

O projeto Energia, exemplo citado em Skovsmose (2008), enfocou ideias de entrada-saída de energia em uma fazenda da Dinamarca, concentrando-se nos modelos da agricultura. Os alunos visitaram e estudaram uma fazenda relativamente próxima da escola. Inicialmente, calculou-se a quantidade de energia em termos, por exemplo, do combustível usado na preparação de certo campo durante um ano. Depois, eles mediram a largura de diferentes instrumentos: arado, colheitadeira, etc. e, com isso, estimaram por quantos quilômetros o agricultor teria que dirigir o trator anualmente na preparação do campo. No campo pesquisado, cuja cevada havia sido plantada, foi calculada a quantidade de energia que havia na cevada colhida. Para esses cálculos, usaram-se informações estatísticas trazidas da agronomia e de outras áreas. De acordo com os cálculos dos alunos, o diagrama entrada-saída estava bastante lucrativo: a cevada colhida tinha seis vezes mais energia do que a energia gasta no campo.

Percebe-se que o projeto apresenta diferentes aspectos de um ambiente tipo (6). As referências são reais, a maioria dos dados foi coletada pelos próprios alunos, no ambiente de uma fazenda real. Isso possibilita aos alunos produzir diferentes significados para as atividades realizadas, e não apenas para os conceitos nelas envolvidos.

MOVENDO-SE ENTRE OS DIFERENTES MODELOS DE APRENDIZAGEM

É claro que a matriz do Quadro 9, que define os seis tipos de ambientes de aprendizagem, representa uma simplificação. A linha vertical que separa o paradigma do exercício dos cenários para investigação possibilita um terreno imenso de possibilidades.

Certos exercícios podem provocar atividades de resolução de problemas, os quais podem vir a se tornar genuínas investigações matemáticas.

Grande parte do ensino de matemática está focada nos ambientes (1) e (3), nesse sentido, o que fundamenta essa prática é a "tradição" da educação matemática. Entretanto, mesmo que muitos estudos apontem um quadro desolador sobre o que acontece na sala de aula de matemática tradicional, muitos professores nem sequer reconhecem a existência de outros possíveis ambientes de aprendizagem.

Não se pretende aqui defender que um ou outro ambiente de aprendizagem seja a única alternativa para a organização das aulas de matemática. A educação matemática deve sim mover-se entre os diferentes ambientes, pois a fluidez entre tais ambientes pode ajudar a atribuir novos significados para as atividades dos alunos.

Quando as turmas que trabalhavam com robótica resolveram organizar uma equipe para participar do campeonato de robótica[44], foi realizado um projeto que pode exemplificar um Cenário para Investigação, e, principalmente, a fluidez entre os diferentes modelos de aprendizagem.

O projeto foi idealizado pela Professora Luciana Tadewald e, inicialmente, os alunos da equipe foram convidados a realizar um *tour* pelo Centro Educacional e Ambiental (CEA)[45] "escolhido como um representante da comunidade" para conhecer e acompanhar o funcionamento de um centro de reciclagem real. Nesse momento, experimentou-se um Cenário Investigativo na perspectiva das Referências à Realidade, pois o CEA localiza-se ao lado da escola e é frequentado pela maioria dos alunos para lazer – acesso à internet, seções de cinema – e também por outros membros da família de nossos alunos, a trabalho.

44 Campeonato de Robótica Educacional: O Desafio Energético, Regional de Porto Alegre, ocorrido no ano de 2007, promovido pela Procempa Robotics.

45 Para mais informações sobre o CEA, consulte: <http://www.guimaraes.cim.br/comunidadesleste/cea.html>. Acesso em: 05 jul. 2011.

No CEA, os alunos aprenderam sobre como funciona a reciclagem e os materiais que podem e devem ser reciclados.

A seguir, passa-se a experienciar um momento no Paradigma do Exercício: Referências à Realidade. De volta à escola, procuramos na Internet informações referentes ao tempo de decomposição dos resíduos e escolhemos as informações mais adequadas a serem exploradas em sala de aula. A seguir, diversas questões foram resolvidas partindo dessas informações. A partir de uma tabela de dados reais, estimativas de consumo de alguns materiais foram realizadas, como por exemplo, o cigarro.

Calculou-se que, se uma única pessoa consome um maço de cigarros por dia, ela irá produzir 600 filtros de cigarro em um único mês. Em um ano, serão 7.200 filtros jogados no lixo.

Foi pesquisada a quantidade de fumantes na cidade de Porto Alegre e descobriu-se que nossa cidade é uma das capitais com maior porcentagem de fumantes no país[46]: 21,2%, ou seja, mais de um quinto da população da cidade é fumante.

Procurou-se uma estimativa atualizada da população de Porto Alegre e descobriu-se que, pelo censo demográfico realizado pelo IBGE em 2000[47], a população de Porto Alegre era constituída de 1.360.590 habitantes. Portanto, à época, quase 288.500 pessoas eram fumantes em Porto Alegre. A produção de lixo apenas com o consumo de cigarros na cidade, em um ano, atingia a marca surpreendente de 2.076.804.576 filtros de cigarro por ano.

Estima-se que, se cada filtro tem aproximadamente 2g de peso, eram produzidos 4.153.609.152g de filtros/ano, ou seja, mais de 4 toneladas de lixo/ano eram produzidas apenas com o consumo de cigarros no município de Porto Alegre.

Levando-se em conta que o filtro do cigarro leva cinco anos para se decompor, a população de Porto Alegre sempre tem que conviver com 20 toneladas de filtros de cigarro, pois assim que certa quantidade de filtros atinge cinco anos e se decompõe, haverá outros filtros despejados constantemente durante o processo de decomposição dos anteriores, cuja decomposição levará também cinco anos.

Ainda dentro do projeto, visando à construção da apresentação para o campeonato, foram analisadas as formas mais comuns de utilização de energia encontradas no CEA. A conclusão foi a de que a energia mais utilizada é a elétrica, em iluminação, em computadores, em projetores multimídia, em ar-condicionado, etc.

---

46 Mais sobre a pesquisa em: <http://noticias.terra.com.br/ciencia/interna/0,,OI1472567-EI298,00.html>. Acesso em: 22 jul. 2010.

47 Para maiores informações sobre o censo, consulte: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/censo2000/universo.php?tipo=31o/tabela13_1.shtm&paginaatual=1&uf=43&letra=P>. Acesso em: 22 jul. 2010.

Foram analisadas as formas de utilização das diferentes energias e o que se pode fazer, na prática, para contribuir para a utilização racional da energia. Foi elaborado um panfleto com as ações práticas que cada um pode fazer, na sua casa, para economizar energia. Esse panfleto foi distribuído, em um mutirão de alunos, para a comunidade do Bairro Bom Jesus.

A pesquisa culminou com a construção de um fogão solar, com materiais reciclados. Mais uma vez, estando em um Cenário Investigativo com Referências à Realidade, foi utilizada a reportagem do *Jornal Zero Hora*, do dia 28 de fevereiro de 2008, que ensinava a construir o referido fogão. Os alunos realizaram a construção e testaram seu funcionamento aquecendo água para o chimarrão, que foi degustado e aprovado por colegas e professores.

Em seguida, algumas pessoas da comunidade – pais, irmãos e demais parentes dos alunos – foram convidadas a vir até a escola para aprender a construir o fogão com os componentes da equipe. Para finalizar, os alunos da equipe foram a algumas casas na comunidade ensinar como se constrói e se utiliza o fogão solar.

Outra atividade que envolve aspectos dos diferentes ambientes de aprendizagem surgiu espontaneamente na turma C32 do ano de 2008. Um dos alunos da turma havia ficado paraplégico no ano anterior, ao levar um tiro acidental na coluna cervical, no interior de sua própria casa. Nesse caso, o grupo em que o aluno participava resolveu, em uma das aulas, construir uma cadeira de rodas. A construção foi realizada com base na *Revista Lego Zoom* Roxa, número 4 e, mais uma vez, a oportunidade dos alunos terem a autonomia de escolher qual montagem gostariam realizar foi essencial para que o grupo mostrasse como esse colega era importante para eles.

Outra situação que representa de forma interessante a fluidez entre os cenários para investigação foi a montagem do *buggies* e sua programação.

Foi proposta uma competição entre *buggies*, após todas as equipes estarem com o protótipo completo e funcionando. Todos os *buggies* ficavam alinhados na linha de partida e vencia aquele que chegasse mais próximo da linha de chegada, sem ultrapassá-la. Atente-se para o fato de que não era importante ser o *mais rápido*, e sim chegar *mais próximo*, independentemente do tempo que isso fosse levar.

Inicialmente, a estimativa temporal que as equipes usaram foi muito maior do que o tempo necessário. A maioria delas colocou na programação valores entre 6 e 10 segundos, o que levava o *buggy* muito além da linha de chegada. Os alunos ficaram extremamente surpresos em verificar como o tempo considerado por eles como “pequeno” poderia, nessa atividade, ser muito maior do que o necessário.

Após várias tentativas, uma das equipes constatou que, ao usarem o tempo de 5 segundos, o *buggy* ultrapassava muito pouco a linha de chegada. Ao diminuirem o tempo para 4 segundos, o *buggy* ficava longe da marca final, fazendo com que as outras equipes levassem vantagem. Como resolver o problema? Como representar um número entre 4 e 5? A resposta veio por meio de uma sugestão, ainda que em forma de questionamento, dos próprios componentes da equipe: “Dá para usar número com vírgula?”.

O mais interessante foi o tom de dúvida e de incredulidade que acompanhou a pergunta, como se números decimais não tivessem relação alguma com o trabalho que estavam desenvolvendo. A primeira tentativa, ao usarem decimais, foi 4,5 segundos, mas os próprios alunos perceberam que poderiam refinar esse valor, chegando inclusive a números com mais de uma casa decimal.

Imagina-se que alunos no nono ano de escolaridade já tenham contato com diferentes contextos e situações em que o uso de números decimais seja necessário. Porém, pela dúvida que manifestaram nessa atividade, pode-se supor que eles ainda não tinham segurança acerca das possibilidades de uso dos decimais. Sabe-se, por exemplo, que eles realizam corretamente operações básicas com decimais, via algoritmo, ou então colocam decimais em ordem crescente, mas não se percebia que, para eles, esses números e essas atividades tinham algum *significado*. No entanto, ficou claro, a partir do diálogo dos alunos, que essa simples atividade de robótica fez com que eles reconhecessem a necessidade dos decimais para resolver o problema.

É interessante comentar que não havia uma regra de que o *buggy* andasse apenas para a frente, a programação poderia ser elaborada como a equipe achasse melhor. Porém, a ideia de chegar primeiro ainda permanecia fortemente presente em todas as equipes, fazendo com que elas procurassem diminuir o tempo. Os alunos já haviam trabalhado com a potência dos motores e poderiam até mesmo testar uma potência menor para seus carrinhos de maneira que se ajustasse aos tempos disponíveis. Porém, nenhuma equipe procurou testar isso, não se sabe se por esquecimento ou propositalmente, pois eles temiam que, diminuindo a potência do motor, fossem atrasar seu carrinho em relação aos outros.

ROBÓTICA E CONCEITOS MATEMÁTICOS

As experiências selecionadas para serem apresentadas e discutidas neste estudo representam apenas uma gota no oceano de possibilidades do trabalho com robótica em aulas de matemática.

Várias outras atividades com robótica mostraram-se apropriadas para desenvolver e aprofundar diversos conceitos matemáticos, mas uma coisa todas elas têm em comum: para estarem abertas às diferentes possibilidades de aprendizagens, apresentaram-se sempre como Cenários de Investigação.

Uma das experiências que mostrou esse potencial de se tornar um cenário investigativo foi a solicitação para que os alunos desenhassem seus projetos. Nesses desenhos fica evidente o cuidado com que foram pensadas a relação luz/sombra e profundidade. O recurso do claro/escuro/*dégradé* mostra a intenção do desenhista: revelar o volume, bem como a sombra da iluminação sobre o objeto.

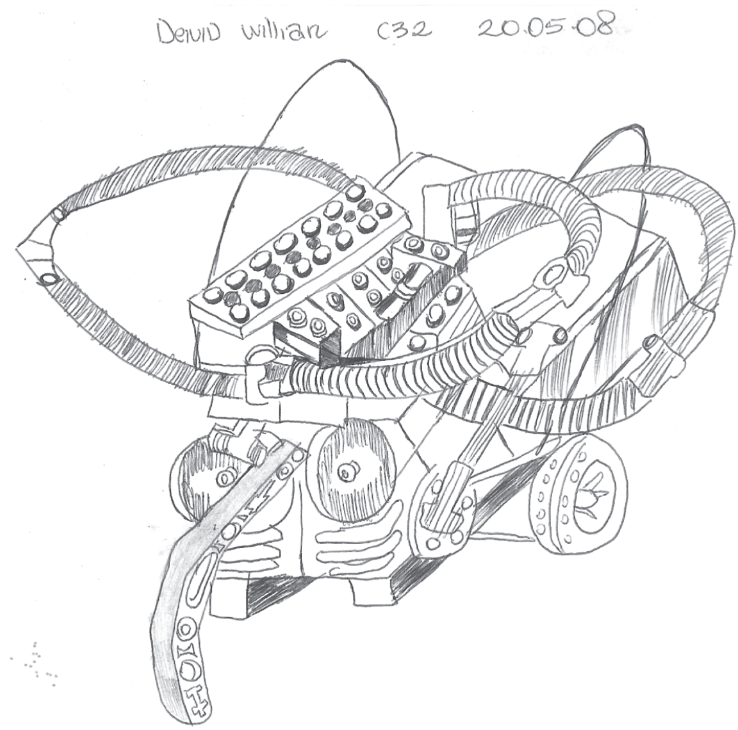


Figura 50 – Desenho da mosca
Fonte: Dissertação de Mestrado de Karina Disconsi Maliuk

Com a montagem de um carrinho com dois motores independentes, cada um acionando uma das rodas traseiras, foi estudado o movimento de rotação: o que é, como funciona, como fazer com que o carrinho gire. A partir daí, foram estudados ângulos – o que são, o que significa o carrinho fazer um giro de 90º, 180º e 360º, o significado de ângulo reto, raso, nulo – e a circunferência.

A partir do movimento do carrinho, foram analisadas trajetórias, medidas distâncias, calculados tempos. Foram construídos, comparados e analisados tabelas e gráficos. Programou-se o carrinho para realizar os mais variados deslocamentos, com diferentes potências de motor, e calculou-se a velocidade do carrinho para cada potência e cada percurso.

Com a construção de uma balança de pratos, a ideia de equilíbrio foi estudada, e as equações foram construídas e resolvidas. Também foram estabelecidas relações entre as peças, de modo a se poder comparar as massas de cada uma. Por exemplo, foi elaborada uma tabela em que a massa de cada peça maior (pneu, motor, roda) era medida a partir de uma unidade escolhida pelo grupo, como por exemplo, um bloco 2x1. A partir daí, determinava-se quantos desses blocos eram necessários para equilibrar a balança com cada um dos objetos maiores usados. Como cada grupo tinha liberdade de escolher a unidade de medida que quisesse, foi possível observar que cada unidade escolhida acabava por gerar um resultado diferente para a medida, mas a proporção se mantinha. O objeto mais pesado permanecia classificado, assim, independentemente da unidade utilizada.

CONVITE A OUTROS PROFESSORES: SUGESTÕES DE ATIVIDADES[48]

Seguem duas atividades realizadas nas aulas de Matemática utilizando recursos robóticos. Como a maioria das escolas não possui os kits Lego Mindstorms, as atividades foram reorganizadas de forma a serem realizadas com diferentes recursos robóticos. Para sugestões de materiais alternativos, consulte o trabalho de Prol (2006), intitulado *Diferentes materiais para uso na robótica educacional: A diversidade que pode promover o desenvolvimento de diferentes competências e habilidades*[49] ou o trabalho de César (2005), intitulado "Robótica Livre: Robótica Educacional com Tecnologias Livres"[50].

1) Calculando Velocidade (primeira versão):

a) construir um carrinho com apenas um motor;
b) programar o carrinho de forma que ele ande para frente, com o motor em potência 5, durante 5 segundos e pare;
c) posicionar o carrinho em uma marcação previamente estabelecida como ponto de partida;
d) pôr o carrinho em movimento;
e) com a fita métrica, medir a distância que o carrinho percorreu;

48 Para outras atividades realizadas e o vídeo gravado durante as aulas com a robótica, leia *Robótica educacional como cenário investigativo nas aulas de matemática*. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17426>. Acesso em: 14 jun. 2011.

49 Disponível em: <http://www.educacional.com.br/downloadlivros/livro1/Tomo5b.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2010.

50 Disponível em: <http://libertas.pbh.gov.br/~danilo.cesar/robotica_livre/artigos/artigo_fisl_2005_pt_final.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2010.

f) anotar o resultado na planilha fornecida pelo professor, com os itens: potência utilizada (5, 4, 3, 2, 1), Distância Medida, Cálculo da Velocidade;

g) refazer a programação, alterando a potência do motor para 4, 3, 2, 1, não modificar o tempo;

h) refazer as medições e a anotação da distância percorrida, para cada uma das potências utilizadas;

i) calcular a velocidade que cada potência proporciona ao carrinho, utilizando a relação Velocidade $= \frac{Distância}{Tempo}$.

2) Calculando Velocidade (segunda versão):

a) utilizar o carrinho construído na atividade anterior;

b) programar o carrinho de forma que ele ande para a frente, com o motor em potência 5, até chegar a uma linha previamente marcada a 5 metros de distância do ponto de partida, e pare;

c) verificar, na programação, qual foi o tempo necessário para que o carrinho atingisse exatamente o ponto de chegada;

d) anotar o resultado na planilha fornecida pelo professor, com os itens: potencia utilizada (5, 4, 3, 2, 1), Tempo Necessário, Cálculo da Velocidade;

e) refazer a programação, alterando a potência do motor para 4, 3, 2, 1, modificar a quantidade de tempo necessária para que o carrinho alcance o ponto de chegada, não modificar as posições da linha de partida e da linha de chegada;

f) anotar cada um dos tempos utilizados na programação;

g) calcular a velocidade que cada potência proporciona ao carrinho, utilizando a relação Velocidade $= \frac{Distância}{Tempo}$.

CENAS DOS PRÓXIMOS CAPÍTULOS?

Esta pesquisa não se encerra aqui. Acredita-se sim que aqui se encerre um capítulo dela, inicial, introdutório, que talvez dê uma ideia do que pode estar por vir, das possibilidades futuras.

Talvez ela sirva de estímulo para que professores de Matemática ou de outras áreas se interessem por experimentar a robótica como recurso em suas aulas. Talvez, algum professor fique motivado, a partir do que foi exposto aqui, a escrever as cenas de seu próprio roteiro de experiências. Talvez, talvez, talvez...

A maioria dos dicionários define “talvez” como incerteza, dúvida. Essas palavras, para algumas pessoas, podem gerar certo desconforto. Por isso, prefiro optar pelas definições que escolhem o termo **possibilidade**. Para mim, a possibilidade é concreta. O trabalho com robótica em minha escola continua a todo vapor, procurando oferecer oportunidades para que outros Cenários Investigativos se desenvolvam.

REFERÊNCIAS

BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES, Ayrton. *Matemática*: fazendo a diferença. 8ª série. São Paulo: FTD, 2006.

BONDÍA, Jorge Larrosa. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. *Revista Brasileira de Educação*, n.19, jan./abr. 2002.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf >. Acesso em: 05 jul. 2011.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1972.

LEGO Educational Division – Mindstorms for Schools. Disponível em: <http://mindstorms.lego.com>. Acesso em: 05 jul. 2011.

MALIUK, Karina. *Robótica educacional como cenário investigativo nas aulas de matemática*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/17426>. Acesso em: 05 jul. 2011.

SKOVSMOSE, Ole. *Educação matemática crítica*: a questão da democracia. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas: Papirus, 2001.

______. *Desafios da reflexão em educação matemática crítica*. Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo e de Jonei Cerqueira Barbosa. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas, Papirus, 2008.

VALENTE, José Armando; CANHETTE, Claudio César. Lego-Logo explorando o conceito de design. In: VALENTE, José Armando. (Org.) *Computadores e Conhecimento repensando a educação.* Campinas: NIED – UNICAMP, 1993. Disponível em: <http://www.nied.unicamp.br/publicacoes/publicacao_detalhes.php?id=53>. Acesso em: 05 jul. 2011.

PARTE III

NOVAS ABORDAGENS NO ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO SEXUAL: MODELAGEM DO FENÔMENO DA ABSORÇÃO/ ELIMINAÇÃO DE ANTICONCEPCIONAIS ORAIS DIÁRIOS

Marina Menna Barreto
Vera Clotilde Vanzetto Garcia

INTRODUÇÃO

Este texto traz resultados da dissertação *Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários*, centrada na articulação entre o ensino da Matemática e os Temas Transversais, em particular a Educação Sexual. O trabalho justifica-se por propor uma nova abordagem para o estudo das funções e variáveis no Ensino Médio, por meio de uma aplicação da modelagem matemática como metodologia de ensino. Por outro lado, foi motivado pela busca da contextualização da Matemática escolar e pela responsabilidade social a ela associada, especialmente nas questões relativas à Educação para a Sexualidade.

O texto original (MENNA BARRETO, 2008a, 2008b) disponibiliza três produtos para uso didático:

a) modelo matemático simplificado da absorção de anticoncepcionais de uso diário (ACO);
b) vídeo informativo sobre o uso de anticoncepcionais;
c) plano de ensino com sequência didática.

A experimentação se deu em sala de aula regular de uma escola pública de Porto Alegre e em situação de laboratório, com pequeno grupo de alunos do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Os resultados principais do estudo nos mostraram que os produtos didáticos desenvolvidos criam oportunidades para o aluno discutir e compreender melhor a sua sexualidade; explicam o mecanismo dos anticoncepcionais; dão ao estudante ferramentas matemáticas úteis também para a compreensão de outros fenômenos; proporcionam um ambiente de discussão; e favorecem a articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos matemáticos, garantindo maior significação para o aprendizado. A experimentação também demonstrou o potencial do vídeo para estimular o interesse e a discussão sobre a Educação Sexual e sobre a Matemática.

JUSTIFICATIVA

As preocupações referentes à contextualização da Matemática são mencionadas nos documentos de orientações curriculares propostos pelo Ministério da Educação (MEC) – PCNEM, PCN+ e Orientações Curriculares (BRASIL, 2002a, 2002b, 2006) – que sugerem um conjunto de competências a serem alcançadas pelas áreas de ciências. Uma delas é a contextualização sociocultural, com análise crítica das ideias e dos recursos de cada área e das questões do mundo, que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. As diretrizes, também, sugerem que, além dos conteúdos clássicos (Língua Portuguesa, Matemática, História, etc.), a escola inclua novos conteúdos, denominados "temas transversais", de caráter social, a serem desenvolvidos nas diversas disciplinas já estabelecidas.

Levando em consideração essas recomendações do MEC e as inquietações originadas da prática profissional das autoras, relativas às aplicações e à contextualização da Matemática, procurou-se, com a modelagem do fenômeno da absorção e eliminação dos contraceptivos orais, a contribuição da Matemática para a discussão de um destes temas transversais, "Orientação Sexual".

Do ponto de vista social, nossa proposta permite a discussão das questões relativas à gravidez na adolescência, contribuindo para o debate sobre a contracepção e exercício da sexualidade com responsabilidade. Do ponto de vista do aluno, o tratamento matemático da absorção e a eliminação de anticoncepcionais orais promove a interação em sala de aula, discussão e troca de idéias em torno de temas de interesse dos adolescentes, o que pode estimular a vontade de saber. Além disso, as análises e reflexões feitas sobre o modelo matemático e o caráter interdisciplinar do trabalho permitem que o aluno compreenda a responsabilidade social associada ao conhecimento matemático escolar. Do ponto de vista da Matemática, o modelo permite que sejam desenvolvidos diferentes tópicos desta disciplina, tais como o estudo de variáveis, funções e suas representações.

Desse modo criamos uma proposta de ensino justificada, contextualizada e bem fundamentada, que promove a articulação entre Educação Sexual e Ensino da Matemática e que pretende contribuir para mudanças positivas no ensino desta disciplina, na escola e na formação de professores.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação da proposta baseou-se: nos conceitos da modelagem matemática como metodologia de ensino (BASSANEZI, 2004; BIEMBENGUT; HEIN, 2003; BARBOSA, 2001a, 2001b); nas diretrizes teóricas da área da Educação Matemática para o ensino de funções (RADFORD, 1996; PONTE, 1990; MARKOVITS, EYLON; BRUCKHEIMER, 1995; DEMANA; LEITZEL, 1995; BOOTH, 1995); e na ideia de aprendizagem como resultado da interação e da conversação, presente no Construtivismo Social de Ernest (1999a, 1999b, 2003).

O Construtivismo Social ou Sócio-Construtivismo é um modelo teórico da Psicologia da Educação Matemática que procura privilegiar os aspectos sociais da aprendizagem da Matemática. Nessa teoria, segundo Ernest (1999a, 1999b, 2003), Matemática é construção humana: linguagem, pensamento, conceitos e técnicas criadas a partir do mundo, para auxiliar na compreensão do mundo. A pesquisa, o ensino e a aprendizagem de Matemática têm como base a conversação; ensina-se envolvendo os alunos em atividades de seu interesse e a aprendizagem ocorre na discussão, interação e troca de ideias.

Nossas hipóteses foram: aprender é um ato social que ocorre pela interação e apropriação do conhecimento; aprender é essencialmente relacionar; e o saber matemático compreende o domínio do sistema de representação e das regras próprias desta ciência. Ainda segundo o estudo teórico, destaca-se que, para que ocorra o aprendizado matemático, o aluno deve ser capaz de transformar informações (internas ou externas à Matemática) em saber matemático e que cabe ao ensino fazer a integração entre informação, conhecimento e saber. As dificuldades advindas da falta dessa integração podem comprometer a escola, na sua tarefa de promover a socialização do saber. Por outro lado, a criação de ambientes de aprendizagem e, mais particularmente, atividades com modelagem matemática podem ser caminhos para mudanças positivas no ensino e na aprendizagem

O ENSINO DE FUNÇÕES – IMPORTÂNCIA

A Matemática pode ser vista como um instrumento que permite descrever, explicar, prever e, algumas vezes, controlar fenômenos e situações das outras ciências. Essa concepção, por sua vez, está essencialmente vinculada à noção de função, já que um modelo matemático, muitas vezes se constitui na representação de um fenômeno que envolve relações funcionais entre variáveis.

O conceito de função envolve múltiplas representações e por isso se faz necessário compreender: o sentido que pode assumir em diferentes contextos; quais significados o aluno pode produzir; e de que formas isso se desenvolve no ambiente escolar. Por isso, destacam-se algumas características importantes que devem ser trabalhadas na escola média:

a) Natureza algébrica: deve-se priorizar a ideia de relação que está por trás do conceito de função, valorizando desse modo os aspectos mais intuitivos e relacionais e dando menor ênfase às equações e expressões algébricas. A natureza algébrica das funções também está diretamente associada à ideia de variável que, por sua vez, é um conceito amplo e que admite várias interpretações. Quando vista através de relações generalizadoras de informações numéricas, essa noção de variáveis se torna fundamental para a modelagem matemática.
b) Diferentes formas de representação: tabelas, gráficos, regras verbais, regras matemáticas e modelos. Essas múltiplas representações, quando desenvolvidas de forma articulada, levam a uma compreensão mais abrangente do conceito, do problema ou da situação que pode estar sendo representada.
c) Aplicação a problemas e situações da vida e de outras ciências: as funções são particularmente favoráveis às aplicações da Matemática em outros contextos, já que, como afirma Ponte (1990), são instrumentos por excelência para estudar problemas de variação e trazem consigo, de sua origem histórica, a ideia de instrumento matemático indispensável para o estudo qualitativo de fenômenos naturais.
d) Articulação com as progressões: tradicionalmente o ensino das funções inicia-se no primeiro ano do Ensino Médio, quando são desenvolvidas as funções lineares, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, e segue em continuidade no segundo ano, com as funções trigonométricas. Por outro lado, o ensino das progressões (aritmética e geométrica) tem sido ministrado como um tópico independente, com ênfase em técnicas e cálculos que fazem simples uso de fórmulas, dissociados da ideia de função e sem relação alguma com as aplicações. Diferentes autores (OLSON, 1988; PONTE, 1990; CARVALHO, 1996) sugerem que o ensino desses dois tópicos seja relacionado, pois as progressões nada mais são que funções de domínio discreto. Ponte (1990), em particular, sugere que, ao se considerar essas funções, sejam trabalhadas também sucessões definidas por recorrência.

Entendemos que a compreensão do conceito de variável, a capacidade de se mover nas múltiplas representações e de representar matematicamente as relações, assim como a capacidade de relacionar o conceito de funções a outras áreas, contextos e tópicos da Matemática, são competências importantes para uma compreensão ampla das funções. Esses aspectos relacionados ao ensino de funções na escola estão esquematizados na Figura 51.

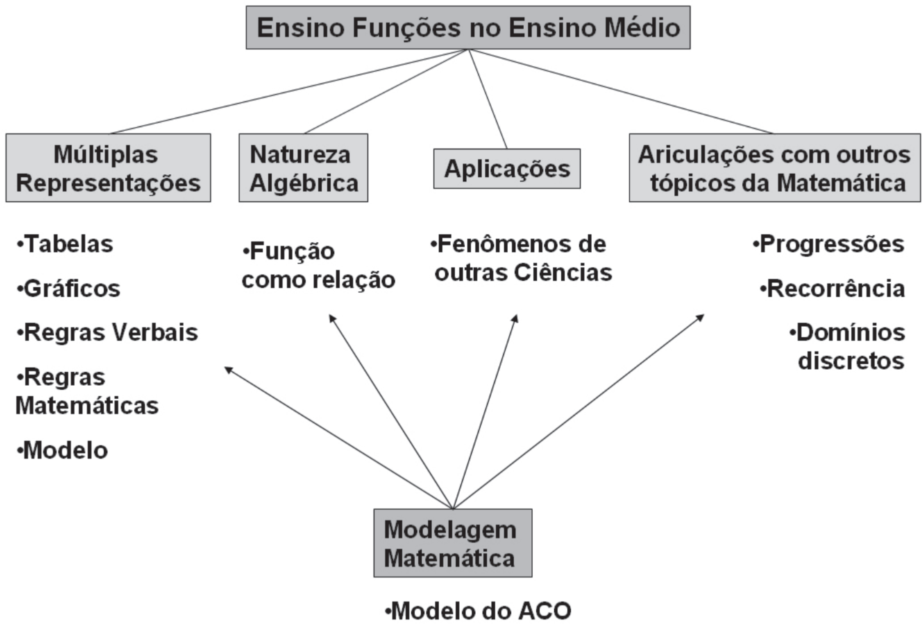


Figura 51 – Esquema destacando a relação do ensino das funções para o nível médio, a modelagem matemática e o modelo matemático do ACO.
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Marina Menna Barreto

A CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

A proposta didática fundamenta-se na ideia de que, para que ocorra a aprendizagem da Matemática, o aluno deve ser capaz de relacionar e transformar informações em saber matemático, num ambiente de interação e conversação. Teve como ponto de partida uma situação não matemática (funcionamento da pílula anticoncepcional) para criar um ambiente de modelagem matemática. As informações consistem no conhecimento prévio dos alunos das questões relacionadas à sexualidade e à contracepção e naquelas apresentadas no vídeo. Com auxílio do vídeo, essas informações são socializadas (compartilhadas na discussão entre alunos e professor) e submetidas a uma série de ações, para serem transformadas em conhecimento e em saber.

A proposta inclui três produções para uso didático, descritas a seguir. O **modelo matemático** simplificado parte do mesmo tema (fenômeno da absorção/eliminação de um anticoncepcional oral) e dos mesmos problemas (relativos à previsões sobre a concentração da droga no corpo) do modelo científico, desenvolvido e detalhado no texto original (MENNA BARRETO, 2008a), mas difere essencialmente no processo construtivo, nas ferramentas e na linguagem. O modelo simplificado do anticoncepcional para o Ensino Médio, não é uma mera tradução do modelo científico, é um novo modelo, o que pode ser explicado à luz do conceito de transposição didática. Segundo Pais (2002), transposição didática diz respeito às transformações (inclusões e exclusões) pelas quais passam os conteúdos de uma disciplina desde o momento de sua produção até o momento em que se materializam como saber escolar.

O **vídeo** (MENNA BARRETO, 2008b) consiste em uma conversa-entrevista com uma médica ginecologista que, ao explicar o funcionamento da pílula, indica com gestos a variação das concentrações hormonais do corpo de uma mulher, diferenciando essas variações para uma mulher que usa tal medicamento daquela que não o utiliza. Essa imagem gestual é representada em um gráfico animado, que mais adiante, marcará o início das atividades de caráter matemático. Esse gráfico é apresentado como um primeiro modelo matemático para o fenômeno absorção/eliminação de ACO.

O vídeo, como recurso didático, tem por objetivos: promover a discussão; criar a necessidade de entender o fenômeno da absorção dos ACOs (e/ou de outras drogas) no organismo humano; fazer perceber de que maneira a Matemática surge como ferramenta de análise do fenômeno. Também possibilita que algumas questões não matemáticas sejam levantadas e discutidas.

A **sequência didática** consiste em uma série de atividades que criam um ambiente de modelagem matemática (BARBOSA, 2001a), de tal modo que os alunos fiquem envolvidos na construção do modelo do ACO. Estas atividades tratam das funções, das progressões e de suas representações.

O MODELO MATEMÁTICO DO ANTICONCEPCIONAL PARA O ENSINO MÉDIO

Aqui serão discutidas algumas das etapas envolvidas na modelagem do comportamento de um contraceptivo oral, cujo nome comercial é Level[51]. Essas etapas, juntamente com o próprio modelo, estão esquematizadas na Figura 52.

51 Level é produzido por Biolab Sanus Farmacêutica Ltda. Sua forma farmacêutica de apresentação é uma caixa, que possui uma cartela com 21 comprimidos revestidos e que devem ser administrados diariamente. Cada comprimido contém 0,120 mg de substâncias ativas.

Etapa 1 – coleta de dados experimentais/ informações técnicas

Foram obtidos na bula do Level:

a) meia-vida (MV) de 12 horas (isto é, passadas 12 horas, a quantidade de fármaco no organismo fica reduzida à metade da quantidade inicial);
b) quantidade de substâncias ativas presentes em um comprimido: 120 μg; e
c) concentração da droga no organismo decorrente da ingestão de um único comprimido (calculada considerando que o volume de líquidos do corpo humano é, em média, 3 litros): 40 $\mu g/\ell$.

Etapa 2 – identificação das variáveis

Neste modelo, desenvolvido para o professor, estudou-se a variação da concentração da droga presente no organismo em função do tempo decorrido a partir do momento da ingestão do primeiro comprimido. A primeira dose, em $t = 0$, corresponde à concentração $c_0 = 40\ \mu g/\ell$. No modelo a ser desenvolvido com os alunos, em sala de aula, considerou-se que o conceito de concentração seria uma exigência desnecessária. A lógica do fenômeno é perfeitamente delineada utilizando-se como variável dependente a quantidade de fármaco em microgramas (μg), grandeza facilmente identificada pelos alunos, pois está presente na embalagem do produto. Assim, para fins didáticos, utiliza-se “quantidade” ao invés de “concentração”. Neste caso, $c_0 = 120\ \mu g$.

Etapa 3 – problematização

Os problemas inicialmente colocados foram: 1) O que ocorre se apenas um comprimido for ingerido? 2) Se os comprimidos forem ingeridos diariamente, é possível determinar a concentração do anticoncepcional no corpo, depois de alguns dias? 3) A concentração do anticoncepcional cresce indefinidamente, assumindo valores muito grandes, podendo causar sequelas ao organismo, ou atinge algum limite superior?

Etapa 4 – formulação de hipóteses e hipóteses simplificadoras

As simplificações feitas foram:

a) o anticoncepcional (administrado via oral) é imediatamente absorvido na circulação sanguínea, distribuído por todo o corpo, metabolizado e, finalmente, eliminado;
b) o intervalo entre as doses (entre cada pílula da cartela) é sempre o mesmo, ignorando-se pequenas variações de horas entre as doses;

c) a concentração da droga, presente no organismo, segue um padrão de eliminação que depende unicamente da meia-vida da mesma. Isso significa que, decorrido certo tempo *t*, a concentração *c(t)* do fármaco terá sido reduzida a uma taxa que depende da meia-vida da droga e que incide sobre a concentração existente.

Etapa 5 – resolução

As questões/problema foram respondidas aplicando-se a concepção de "álgebra como aritmética generalizada", ou seja, expressões algébricas foram obtidas a partir da generalização de um padrão construtivo, evidente na elaboração de tabelas numéricas que representam a relação entre as variáveis. As tabelas favorecem a generalização e o seu uso, na descrição de um fenômeno, é defendido por alguns pesquisadores. Numa atividade de modelagem, as múltiplas representações da função-modelo, que são tabela, gráfico e expressão algébrica, estão sempre conectadas, de tal modo que possa se falar em modelo gráfico, modelo aritmético (referindo-se aos dados tabelados) e modelo algébrico.

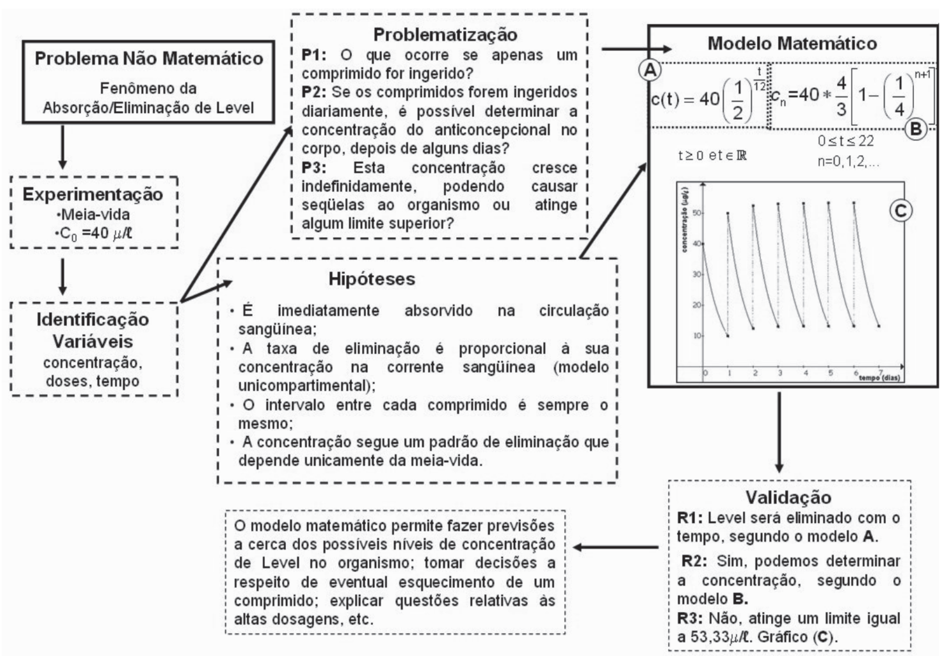


Figura 52 – Esquema das etapas da construção do modelo matemático do anticoncepcional Level para o Ensino Médio. A: modelo algébrico para a absorção/eliminação de um único comprimido; B: modelo algébrico para a absorção/eliminação de comprimidos ingeridos diariamente; C: modelo gráfico que representa o comportamento da concentração, com ingestão de 7 comprimidos, diariamente. Fonte: Elaborada pela Prof.ª Marina Menna Barreto

Etapa 6 – validação/aplicação

É possível usar este modelo para fazer previsões acerca dos possíveis níveis de concentração do anticoncepcional no organismo; tomar decisões a respeito de eventual esquecimento de um comprimido; explicar questões relativas às altas dosagens, como as sugeridas para contracepção de emergência, e entender as diferenças entre modelos quando se modificam a posologia e/ou a forma de administração.

MODELAGEM

O trabalho de modelagem seguiu a direção sugerida na problematização (Etapa 3). Foram propostas questões norteadoras para a construção do modelo. Para cada questão proposta foi desenvolvida parte do modelo. Ao final do processo de modelagem, todas as questões são respondidas, justificando o modelo construído.

MODELAGEM PARA RESPONDER À QUESTÃO 1

Inicialmente elaborou-se uma tabela representando o decaimento da concentração $c_0 = 40\ \mu g/\ell$ do anticoncepcional Level correspondente a apenas um comprimido (120 μg) em função do tempo *n* em unidades de meia-vida. A análise da tabela permitiu identificar um padrão construtivo que generaliza os dados, obtendo um termo geral para a sequência numérica. Observa-se que a sequência é uma progressão geométrica decrescente de razão 1/2. É uma função de variável discreta, cuja imagem é um conjunto de pontos isolados.

Sabe-se, no entanto, que o corpo humano age continuamente para a eliminação da droga. Desse modo é criado um novo modelo de variável contínua. Ao final, são encontradas três diferentes representações para o fenômeno que descreve a concentração do anticoncepcional ao longo do tempo, para a administração de um único comprimido: (1) um modelo aritmético, representado na forma de tabela; (2) um modelo algébrico (Figura 52B), expresso na forma de equação e que coincide com a função exponencial usual no ensino médio: $f(x) = a^x$; (3) um modelo gráfico.

Essa modelagem nos permitiu responder à Questão 1: sabendo que a concentração da droga se reduz a metade a cada 12 horas, calcula-se que se reduzirá a ¼, a cada 24 horas, ou seja, a concentração da droga reduz-se a 1/4 a cada dia. E tende a zero, ou seja, na prática, a droga será eliminada, com o passar do tempo, embora matematicamente isso não ocorra.

MODELAGEM PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES 2 E 3

Para responder a essas questões foi elaborada novamente uma tabela que representa a evolução da concentração das substâncias presentes no anticoncepcional Level, quando administrado a intervalos regulares de um dia, durante 21 dias (número de comprimidos de uma cartela) consecutivos. Dessa vez foi preciso atentar ao fato de que, ao longo de cada dia, o corpo elimina parte da substância até que uma nova pílula seja ingerida.

Obtém-se, dessa forma, uma sequência de eliminações diárias que corresponde a uma família de funções exponenciais contínuas, cujos modelos de decaimento são da mesma natureza que o deduzido na modelagem para a ingestão de um único comprimido (Figura 52B). Também foi elaborado um modelo gráfico desse comportamento mostrando os níveis de concentração do anticoncepcional Level por um período de sete dias, como é possível verificar na Figura 52C.

Essa modelagem permitiu que se respondessem às questões 2 e 3: com o modelo algébrico é possível calcular a concentração do anticoncepcional no corpo a qualquer momento futuro, quando se supõe a ingestão de um comprimido por dia. Pode-se, por exemplo, calcular a concentração máxima do anticoncepcional para o caso de uma mulher que tenha tomado 21 comprimidos. Também é possível afirmar que o limite superior (facilmente observado na representação gráfica) garante que a concentração não cresce indefinidamente e que, por isso, não deve causar intoxicação.

É interessante enfatizar a importância da tabela numérica nessa modelagem, já que ela torna evidente a presença da soma dos termos de uma progressão geométrica. Essa constatação permite criar uma função-modelo utilizando-se a fórmula conhecida para esta soma.

PLANO DE ENSINO

A modelagem foi a base de uma proposta didática, com uma série de atividades que tratam de conceitos tais como: comportamento linear, progressão aritmética, decaimento exponencial, progressão geométrica e sua representação gráfica e modelagem matemática. Entre as habilidades e competências, são listadas a compreensão de situações apresentadas em linguagem coloquial em representação matemática, por meio da construção de tabelas e gráficos, da identificação de padrões construtivos e da generalização das informações numéricas com a obtenção de uma expressão algébrica.

Os objetivos específicos do plano foram:

1) Desenvolver as noções de variável, domínio contínuo e discreto, função e progressão a partir da sua emergência como ferramentas importantes na modelagem do fenômeno absorção/eliminação de drogas.
2) Desenvolver a noção de variável relacionada com grandezas que variam, na evolução dos fenômenos não matemáticos ou de outras ciências.
3) Identificar, relacionar e destacar a importância das três representações mais usuais de funções: tabelas, gráficos e equações matemáticas.
4) Conceituar, comparar e destacar as diferenças entre função de variável discreta e de variável contínua, associando-as a fenômenos discretos e contínuos.
5) Tratar o termo geral de uma progressão geométrica como a generalização de um padrão que emerge na construção da tabela a partir dos primeiros termos, também desenvolvendo a expressão da soma dos *n* primeiros termos.
6) Desenvolver a ideia de função e de progressão como modelos matemáticos da realidade.
7) Ampliar os significados da Matemática, apresentando-a como ferramenta para modelar, analisar, compreender e fazer previsões em fenômenos reais.
8) Relacionar ideias matemáticas com uma variedade de contextos, dando novos significados à disciplina.
9) Envolver os alunos no processo de modelagem matemática.

EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

Detalha-se aqui parte da implementação da proposta, detalhada em Garcia e Menna Barreto (2009). A experimentação foi feita com um grupo de seis alunos do Colégio de Aplicação (Cap) da UFRGS de uma turma da segunda série do ensino médio, em sala da Universidade, horário extraclasse, em junho de 2008. O encontro foi parcialmente filmado e gravado, e o material produzido pelos alunos foi coletado e analisado. O experimento foi dividido em etapas chamadas de Episódios.

Episódio 1: O vídeo e as representações iniciais

O primeiro passo, no experimento, teve como objetivo coletar e explorar as representações espontâneas dos alunos frente ao vídeo, com o objetivo de dar início às discussões sobre o uso de anticoncepcionais e deixar emergir questões que desafiassem a imaginação matemática, com potencial para dar origem às atividades posteriores.

Episódio 2: Atividades Matemáticas

As atividades matemáticas (Anexo A) não estão muito distantes do conhecimento anterior do aluno e de seus esquemas já desenvolvidos para resolver situações ligadas aos conteúdos das funções e gráficos. O objetivo, nessa etapa, era analisar esses esquemas anteriores e as mudanças que ocorrem, à medida que são feitas as vinculações com o real.

Episódio 3: Discurso matemático

O momento final foi planejado para deixar emergir as interpretações dos alunos sobre o fenômeno e suas respostas para as questões propostas. Todos os alunos foram incentivados a explicar sua compreensão do fenômeno e a expor suas conclusões.

RESULTADOS DA EXPERIÊNCIA

O primeiro elemento extraído das análises diz respeito à riqueza que o mundo real pode oferecer para o estudo da Matemática, especialmente para o estudo das variáveis e de suas relações e das funções e das suas representações (tabular, gráfica, algébrica). Quando as aplicações ocorrem em um mundo que está próximo dos adolescentes e de seus interesses, a linguagem matemática adquire sentido porque é necessária para auxiliar na compreensão.

Perguntados, no início, sobre a evolução da quantidade de hormônio retido no corpo de uma mulher que toma anticoncepcionais diariamente durante, mais ou menos, dez anos, alguns mostraram com as mãos uma curva ascendente, crescendo sem limites e iniciando no zero. Perguntados sobre o que ocorreria se a mulher parasse de tomar, ou mesmo se esquecesse de tomar uma pílula, em um certo dia, os alunos mostraram uma queda brusca, imediata, para o nível zero. Essas imagens serviram para ilustrar o discurso matemático inicial, mostrando que havia uma representação intuitiva do fenômeno (errônea) e uma ausência de preocupação com a linguagem.

O segundo elemento diz respeito à análise do raciocínio dos alunos. A aprendizagem contextualizada, baseada em fenômenos reais, permite o desenvolvimento de procedimentos que diferem daqueles desenvolvidos no ensino usual. Na pesquisa, essas situações ocorreram quando os alunos tentaram traduzir para a linguagem matemática as informações verbais sobre o fenômeno real. Nesse momento, os esquemas anteriormente construídos para tratar com funções e gráficos mostraram-se insuficientes.

Será comentada uma situação que trata do **conceito de variável**, com um exemplo de como foi feita a análise. Em um dos momentos, ao iniciar-se a construção de um gráfico, surgiu a discussão sobre o significado do zero no eixo das abscissas.

Aluno: O gráfico começa no zero ou no 1?

Professora: O que é o dia nove?

Aluno: É o dia 9 do ciclo menstrual.

Professora: E o zero é o quê?

Aluno: É o dia zero do ciclo menstrual.

Professora: Tem dia zero?

Aluno: Não. É a primeira hora do primeiro dia.

Professora: Esse número 1 significa o quê, no teu gráfico?

Aluno: É o primeiro dia.

Nesse momento, o que estava em jogo era a diferenciação entre a variável discreta (dia 1, dia 2, dia 3...) e a variável contínua (tempo em dias, sendo que o número 1 indica que transcorreu um dia e o número zero corresponde ao início do dia 1). Esse diálogo traz à tona um conflito: no esquema do aluno, para traçar gráficos, em geral, não é necessário pensar nas variáveis. O sistema de eixos sempre se apresenta com o zero na origem e este é absoluto, não questionável.

O diálogo mostra também que a compreensão do fenômeno, construída a partir do vídeo e das discussões, ajuda a superar as dificuldades técnicas. Observa-se que a constante transição entre a Matemática e o fenômeno ajuda a responder às questões matemáticas proporcionando um conhecimento reflexivo.

Focaliza-se uma resposta interessante referente à atividade 2 (Anexo A). Observe na Figura 53 que na primeira curva, que mostra o decaimento exponencial de um único comprimido, o aluno marcou na origem do eixo das abscissas, a hora zero do dia em que a pessoa tomou a primeira pílula. Como ela ingeriu o comprimido às 20 horas, o gráfico inicia no segundo quadrante. O número 20 foi localizado na parte negativa do eixo das abscissas e o eixo foi segmentado em partes correspondentes a 24 horas. Em um certo momento, o aluno questiona o que está fazendo e os números são riscados, então, o esquema antigo é posto em dúvida.

Constata-se, em diferentes soluções, a mesma dificuldade que evidencia um esquema no qual não é usual pensar no significado das variáveis. Em geral, na construção de gráficos, na escola, o aluno recebe funções dadas na forma algébrica e é solicitado a traçar seus gráficos. Esse traçado inicia-se com dois eixos ortogonais padronizados, que são numerados com os números inteiros ou alguma variação com múltiplos de 5, de 10 ou de $\pi/2$, no caso das funções trigonométricas. Em qualquer caso, é absolutamente claro para eles que o número zero ocupa o ponto de origem do sistema, em que ambos os eixos se cruzam e não há questionamento sobre o significado do zero, do 1 ou do 2.

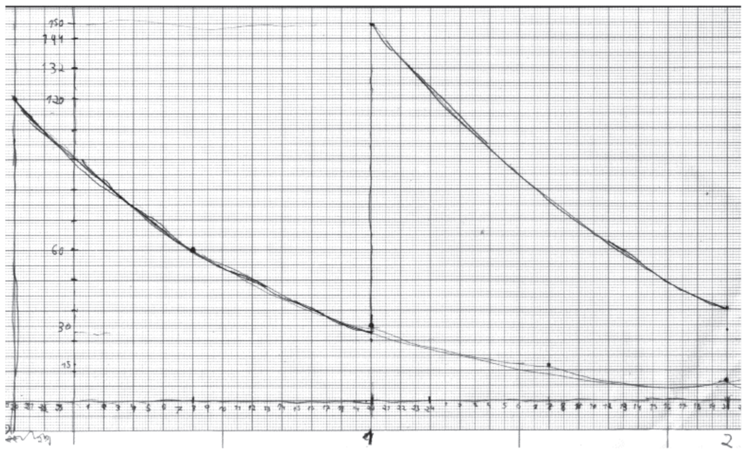


Figura 53 – Gráfico traçado por um aluno para expressar a variação da concentração de anticoncepcional presente no organismo em um período de 24 dias
Fonte: Elaborada pelo aluno A, 2ª série, ensino médio, Colégio de Aplicação, 2008.

Neste caso, o gráfico (Figura 53) não é decorrente de uma expressão algébrica, é uma representação de um fenômeno real. Como tal, o fenômeno parece bem entendido, pois as curvas são traçadas e as explicações verbais são corretas, mas há um conflito na relação que o aluno faz entre o início do processo – o primeiro comprimido é ingerido às 20 horas – e o início do gráfico ($x = 0$).

O primeiro passo para as representações matemáticas, nesse tipo de problema, é definir as variáveis. Quais são as variáveis desse fenômeno e em que conjunto elas variam? Sem essas respostas, não há como numerar os eixos.

O que falta, no esquema de raciocínio dos alunos, é perceber que essa definição é necessária. É preciso definir a variável independente, o tempo e o que significa o tempo ser igual a zero. Parece suficiente para eles (e para muitos professores) afirmar que o gráfico relaciona quantidade de hormônios e tempo, quantidade *x* tempo, mas de que tempo se está falando? Tempo decorrido a partir do momento em que o fenômeno inicia.

Pode-se perceber que a proposta que vincula conhecimentos de função com a necessidade de compreender e descrever um fenômeno real faz emergir esquemas prévios, causa conflitos e exige mudanças.

Outro elemento significativo que emergiu da pesquisa foi o desenvolvimento da percepção dos estudantes a respeito do fenômeno e o desenvolvimento do vocabulário matemático utilizado para explicá-lo. No começo do estudo, os estudantes forneceram representações e interpretações intuitivas e errôneas, ao final utilizam uma linguagem mais precisa e matemática.

> *Professora: Se toma uma pílula só, a quantidade cai. E se toma todos os dias?*
>
> *Aluno: Então sobe e cai, sobe e cai (faz gestos, oscilando a mão).*
>
> *Professora: A concentração de droga pode ir para 500? Para 1000?*
>
> *Aluno: Não vai, porque vai crescendo cada vez menos. Após muito tempo, quase não cresce mais* (mostra um gráfico semelhante ao da Figura54, a seguir) *tem uma assíntota aqui em cima: um limite que não vai ser ultrapassado.*

Esse diálogo mostra que o aluno consegue utilizar um discurso matemático para explicar o fenômeno, utilizando termos como "assíntota" e "limite", em um sentido adequado e coerente[52]. O gráfico que ele imagina (sem considerar a dificuldade da numeração do eixo das abscissas) é muito semelhante ao gráfico que representa o modelo científico para absorção e eliminação de drogas no organismo (Figura 54).

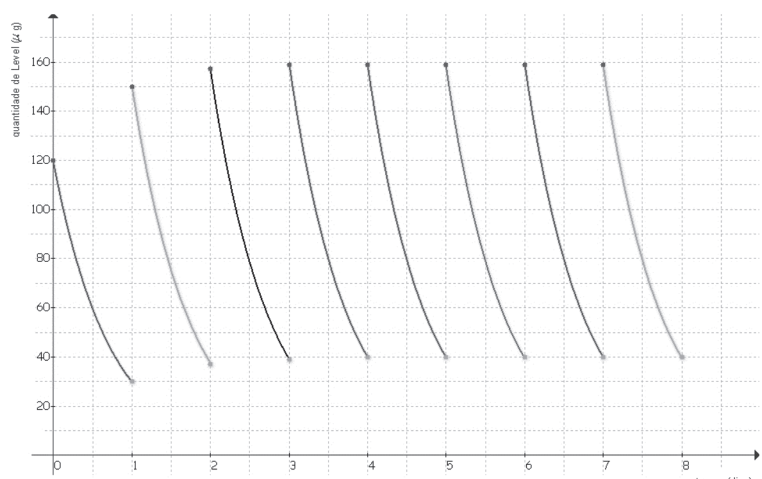


Figura 54 – Gráfico que representa a variação da quantidade de Level, no organismo, para a ingestão de sete comprimidos. A sequência de pontos superiores representa a quantidade de anticoncepcional a cada comprimido ingerido. A sequência de pontos inferiores representa a quantidade de anticoncepcional presente no organismo imediatamente antes da ingestão do comprimido seguinte. Fonte: Elaborada pela Profª. Marina Menna Barreto

52 Neste caso, há uma reta *assíntota* horizontal, isto é, uma reta da qual os pontos do gráfico se aproximam, à medida que os valores das abscissas aumentam.

Tal experimento foi fundamentado na produção de pesquisadores da área de Educação Matemática. Resultados (BOOTH, 1995; RADFORD, 1996; URSINI, 2000) confirmam a dificuldade dos alunos, na compreensão do conceito de variável, em lidar com expressões algébricas e, ainda mais, em expressar relações generalizadas, pois comumente não sentem a necessidade de generalização.

Com vistas a enfrentar essas dificuldades, outros autores (PONTE, 1990; MARKOVITS; EYLON; BRUCKHEIMER, 1995; DEMANA; LEITZEL, 1995) sugerem que o estudo das funções deva se iniciar a partir de representações numéricas, gráficas e contextualizadas, que são mais intuitivas e possuem um apelo mais visual. Para eles, os métodos algébricos e os aspectos de formalização devem ser reservados para um segundo momento. Alguns autores (DEMANA; LEITZEL, 1995) ainda defendem a ideia de que uma situação, um problema ou um fenômeno deve ser descrito no começo verbalmente, sem nenhuma linguagem formal e com o tempo deve se fazer uso de variáveis para representar relações funcionais. Além disso, os autores indicam o uso das tabelas, pois elas favorecem a generalização, já que as informações numéricas da tabela se resumem na última linha.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho mostra apenas parcialmente os resultados de estudo mais detalhado, desenvolvido, com foco em três mundos: o mundo dos fenômenos biológicos, de absorção e eliminação de drogas, em geral, e de anticoncepcionais, em particular; o mundo das práticas sociais, em que os adolescentes estão convivendo com sua sexualidade; e o mundo da Matemática e do ensino da Matemática.

O estudo iniciou motivado por inquietações originadas na prática profissional das autoras, sobre como despertar o interesse dos alunos e como criar ambientes de interação e discussão, em torno da Matemática e de suas aplicações, com objetivo de favorecer o processo de ensino e de aprendizagem. A contextualização dos conteúdos escolares surgiu como uma boa possibilidade.

Uma atividade acadêmica cuidadosa de modelagem permitiu a investigação, a indagação e a reflexão sobre o fenômeno da absorção e eliminação de anticoncepcionais orais, possibilitando compreender o funcionamento dessas drogas, de uso diário, do ponto de vista das flutuações hormonais; fazer previsões acerca dos possíveis níveis de concentração do anticoncepcional no corpo; tomar decisões a respeito de eventual esquecimento de um comprimido e dar explicações a questões relativas às altas dosagens.

Esta atividade de modelagem foi base para elaboração de uma proposta pedagógica, bem fundamentada nos aportes de autores da área de Educação Matemática. A proposta teve como atividade central a criação de um ambiente de aprendizagem interativo, com debate das questões ligadas ao tema sexualidade e com o desenvolvimento de diferentes conteúdos matemáticos da grade curricular.

Todas as questões colocadas e discutidas ao longo da experimentação da proposta didática contribuíram para desencadear o estudo da Matemática que a fundamenta. As atividades potencializaram a reflexão sobre a Matemática, sobre o processo de modelagem e também sobre o seu significado social. Os alunos, ao final, perceberam que os modelos matemáticos auxiliam a compreender a realidade, assim como perceberam o papel social da Matemática.

Este trabalho traz uma possibilidade de articulação entre a disciplina de Matemática da escola e temas transversais e mostra a importância que uma abordagem, do ponto de vista da Matemática, pode trazer para questões sociais e a importância da presença dessas questões na sala de aula de Matemática.

É possível acreditar nas possibilidades de aplicação dessa proposta, pois a análise da prática permitiu concluir que o material traz em si um bom potencial para desencadear curiosidade, discussões e interações (condições básicas para que qualquer aprendizagem ocorra); e pode propiciar mudanças positivas nas concepções do aluno, sobre Matemática (de corpo de conhecimento estático para um modo de compreender o mundo) e sobre o conceito de função, das funções elementares e de suas representações (modelos para fenômenos dinâmicos). E mais do que isso, pode mudar as concepções do próprio professor a respeito da Matemática, do ensino, do planejamento e da organização da sua sala de aula. Fica aqui o desafio. Por que não experimentar?

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24ª, Caxambu, 2001. *Anais...* Caxambu: 2001a. 1-CDROM. Disponível em: <http://joneicb.sites.uol.com.br>. Acesso em: 20 ago. 2007.

______ . Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação**.** *Bolema,* Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001b. Disponível em: <http://joneicb.sites.uol.com.br/bolema.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2007.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática:* uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. *Modelagem Matemática no ensino.* São Paulo: Contexto, 2003.

BOOTH, Lesley . Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur; SHULTE, Albert. (Ed.). *As idéias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.

BRASIL. MEC. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *PCNEM:* Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC, 2002a.

______ . *PCN+:* Ensino Médio - orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002b.

______. Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio:* Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Um problema "doméstico". *Revista do Professor de Matemática* (RPM), Rio de Janeiro, SBM, n. 32, p. 1-9, 1996.

DEMANA, Franklin; LEITZEL, Joan. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: COXFORD, Arthur; SHULTE, Albert (Ed.). *As idéias da Álgebra*. p. 70-79. São Paulo: Atual, 1995.

ERNEST, Paul. What is Social Constructivism in the psychology of mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, n. 12, 1999a. Disponível em: <http://www. people.ex.ac.uk/PErnest/>. Acesso em: 10 mai. 2008.

______. Is Mathematics discovered or invented? *Philosophy of Mathematics Education Journal*, n. 12, 1999b. Disponível em: <http://www.ex.ac.uk/~Pernest/>. Acesso em: 10, maio, 2008.

______. Conversation as a metaphor. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, n. 17, 2003. Disponível em: <http://www. ex.ac.uk/~Pernest/>. Acesso em: 10 mai. 2008.

GARCIA, Vera Clotilde; MENNA BARRETO, Marina. Experimento didático: uma pesquisa para investigar mudanças cognitivas no processo de modelagem matemática. *Cadernos do Aplicação* (UFRGS – Porto Alegre), n. 21, p. 1-15, 2009.

ANEXO A – ATIVIDADES MATEMÁTICAS DA EXPERIÊNCIA

Atividade 1: Os gráficos a seguir foram elaborados na área médica. O primeiro indica a relação entre o nível hormonal da mulher que não toma anticoncepcional e o seu ciclo menstrual.

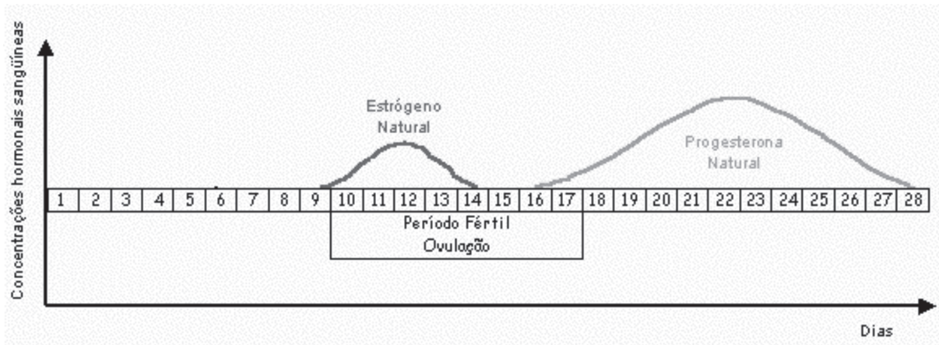


Figura 55 – Gráfico extraído e adaptado de livro de farmacologia , mostrando o comportamento da concentração de estrógeno e progesterona em um ciclo menstrual normal de 28 dias.
Fonte: THOMAS; JONES (1979, p. 338)

Com o uso diário de anticoncepcional o gráfico se transforma, e, no lugar dos picos de estrogênio e progesterona, temos um nível estável de tais hormônios, de maneira que a ovulação fica impedida de acontecer.

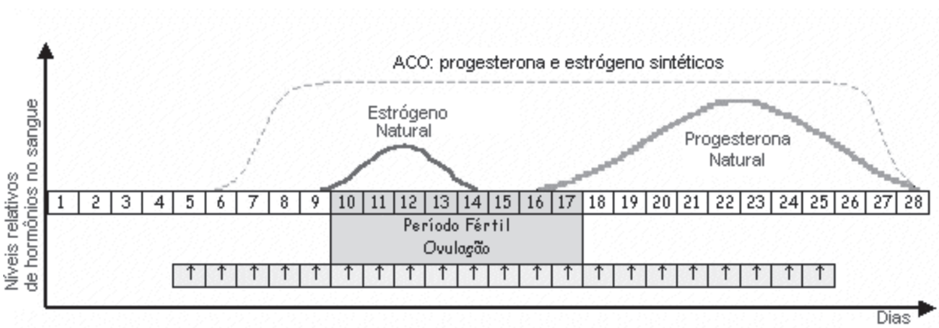


Figura 56 – Este gráfico ilustra o mesmo comportamento da concentração hormonal da Figura 7.1 comparando-o com a concentração hormonal de quando se faz uso do anticoncepcional oral. As setas indicam a ingestão diária de ACO, que inicia no quinto dia do ciclo e tem duração de 21 dias.
Fonte: THOMAS; JONES (1979, p. 338).

A) Usando a linguagem gráfica usual da matemática, refaça o gráfico. Para isso determine quais são as variáveis utilizadas e defina cada uma delas. Qual é a unidade de medida usada para cada variável?

B) No eixo horizontal, o que significa o zero do gráfico? E o 1? E o 2? E o número 28?

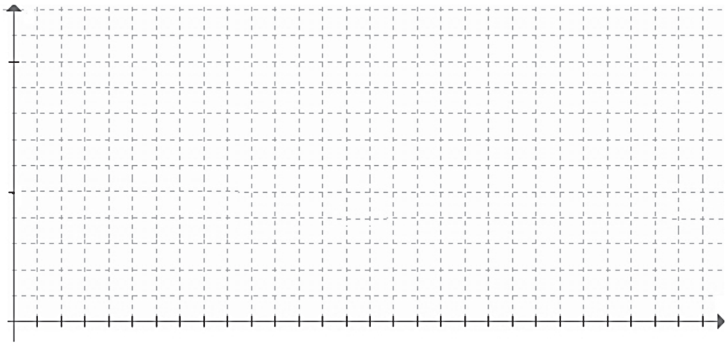


Figura 57 – Sistema de eixos coordenados
Fonte: Elaborada pela Prof. Marina Menna Barreto

Atividade 2: Algumas situações reais admitem representações gráfica e algébrica – é o que chamamos de modelo matemático.

Na seguinte situação, elabore gráfico, tabela e encontre uma expressão algébrica.

Uma pessoa tomou um comprimido de anticoncepcional às 20h. Sabemos que a concentração da droga no sangue decai com o tempo, reduzindo-se à metade a cada 12 horas. Elabore um gráfico para expressar o decaimento dessa concentração, num período de 1 dia. E num período de 3 dias? Encontre uma equação para a variação da concentração da droga, no sangue, em função do tempo.

Vamos, agora, criar um modelo para o fenômeno da absorção de anticoncepcionais de uso diário.

Atividade 3

A) Uma pessoa tomou um comprimido de anticoncepcional às 20h. A bula do remédio informa que a quantidade de hormônio presente em cada pílula é de 120 microgramas e que essa quantidade decai com o tempo, reduzindo-se à metade a cada 12 horas. Às 20h do dia seguinte, ela toma um novo comprimido.

Elabore um gráfico para expressar a variação dessa quantidade, num período de 2 dias.

B) E se a pessoa tomar um comprimido às 20h, durante 22 dias consecutivos, e só aí parar:

a) Elabore um gráfico para expressar a variação dessa concentração, num período de 24 dias;

b) Elabore uma tabela descrevendo o fenômeno;

c) Encontre uma expressão matemática generalizadora.

MODELAGEM MATEMÁTICA NA INICIAÇÃO CIENTÍFICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO TÉCNICO

Morgana Scheller
Marilaine de Fraga Sant'Ana

INTRODUÇÃO

Este trabalho é parte da pesquisa realizada na dissertação de mestrado da primeira autora, sob a orientação da segunda autora. Nesta pesquisa, consideramos Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem no qual os estudantes são convidados a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade, conforme a definição de Barbosa (2001). Entendemos por ambiente de aprendizagem todas as condições de aprendizagem disponibilizadas aos educandos, incluindo: ambiente físico, recursos, propostas metodológicas, etc., de acordo com Skovsmose (2000).

Skovsmose (2000) classifica os ambientes de aprendizagem segundo dois paradigmas: do exercício e dos cenários para investigação. O primeiro é centralizado na ideia de resposta única e exata, no qual o professor fornece todos os dados utilizados pelos estudantes para a conclusão de uma tarefa. Já o segundo propõe uma abordagem investigativa, visando instigar os educandos à discussão e ao questionamento.

O autor ainda classifica os ambientes de aprendizagem segundo as referências a que se referem, dividindo-os em: referências à matemática pura, relativas aos ambientes em que a matemática é estudada sem contextualização; referências à semirrealidade, relativas aos ambientes em que a Matemática aparece em situações de contextualização criadas pelo professor; referências à realidade, quando são abordadas situações do cotidiano ou de outras ciências por meio da Matemática. Skovsmose (2000) representa a combinação dos dois paradigmas e das três referências na matriz expressa no Quadro 10.

Quadro 10 – Matriz de representação dos ambientes de aprendizagem

Paradigma Referências	Exercício	Cenário para Investigação
Matemática	(1)	(2)
Semirrealidade	(3)	(4)
Realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000, p.77)

Barbosa (2001) aborda a divisão de tarefas no ambiente de Modelagem Matemática, que mostramos no Quadro 11. Segundo o autor, as atribuições do professor podem variar desde a elaboração da situação a ser abordada, com coleta e simplificação dos dados necessários, como no Caso 1, até o papel de orientador do processo, compartilhando todas as tarefas com os alunos, como no Caso 3.

Quadro 11 – O aluno e o professor na Modelagem Matemática

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração da situação-problema	Professor	Professor	Professor/Aluno
Simplificação	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
Dados qualitativos e quantitativos	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
Resolução	Professor/Aluno	Professor/Aluno	Professor/Aluno

Fonte: Barbosa (2001, p. 9).

Abordamos uma situação classificada como Caso 3, em que professor e alunos trabalham conjuntamente em todas as etapas da Modelagem Matemática, inserida no paradigma do cenário para investigação, no qual a partir da problematização de um assunto e do aceite/interesse dos alunos, o contexto da aprendizagem é, de certa forma, transferido para fora da sala de aula.

O CONTEXTO E O TEMA

Abordamos o Projeto de Iniciação Científica (PIC)[52] em nível de Ensino Médio desenvolvido na Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul (EAFRS)[53], atual Instituto Federal Catarinense – Campus Rio do Sul, Santa Catarina. A participação no PIC é obrigatória, mas a presença ou não da Matemática é opção dos alunos. No caso específico desse grupo, os dois alunos, aqui chamados de F e M (no meio do projeto M sai da escola e H entra no grupo), guiados por seu interesse, foram convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações que surgiram da área técnica em agropecuária, optando pela Zootecnia, particularmente a atividade de bovinocultura leiteira.

52 O Projeto de Iniciação Científica será mencionado no texto apenas pela sua sigla: PIC.

53 A Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul será mencionada no texto apenas pela sua sigla: EAFRS.

ELABORAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

O projeto referente à lactação de vacas holandesas começou a se desenhar no início de agosto de 2007, quando os projetos de iniciação científica dos vários grupos de cada turma começavam a ser definidos. Os alunos possuíam um interesse pelo estudo de animais de grande porte e já haviam conversado com o professor responsável pelo setor de Zootecnia III.

O interesse pela utilização da Matemática no trabalho ficou evidente na voz de F quando ele expõe o seguinte:

> Professora, nós gostaríamos de colocar matemática no trabalho e queríamos ver se é possível e como. O que pretendemos é identificar a influência da alimentação das vacas leiteiras da EAFRS para a manutenção da quantidade de leite no período de inverno. Será que dá pra botar matemática nisso? Temos interesse em estudar um tema da área técnica, afinal fazemos um curso de técnico em agropecuária, mas se a matemática fosse envolvida ficaria melhor, mais interessante.(F).

Nessa fala, o aluno interessa-se por envolver Matemática no estudo do tema de seu interesse, mas sente dificuldade em visualizar possibilidades. Nesse cenário, o convite, descrito por Barbosa (2001), em sua definição de Modelagem, teve o seu sentido invertido. Os alunos é que se mostraram interessados em convidar a professora para investigar o tema, o que não descaracteriza o ambiente de aprendizagem. Ficou então decidido que o trabalho seria orientado por um professor da área técnica e pela professora de Matemática, primeira autora deste trabalho.

No primeiro encontro entre estudantes e orientadores, o professor orientador da parte técnica, após ouvir a sugestão do grupo, descartou a viabilidade da realização da primeira ideia, ou seja, a influência da alimentação das vacas leiteiras para a manutenção da quantidade de leite no período de inverno, alegando ser um tema complexo, e que levaria anos para se chegar aos resultados, pois a EAFRS não continha dados já tabulados.

Após o levantamento de diversas ideias, o grupo pensou então em analisar as lactações das vacas da EAFRS, visto que havia registros desses dados desde 2006. Decidido o tema, levantou-se neste mesmo encontro um possível problema merecedor de estudo dentro do tema. Nessa mesma oportunidade foi rascunhado também um cronograma, ficando como tarefas para o grupo a descrição da justificativa, a definição real do problema, o objetivo, as hipóteses, a metodologia de trabalho a ser utilizada e uma pequena fundamentação acerca do tema com base em leituras de livros e de revistas. Esses primeiros ensaios de registro foram orientados por meio de indagações como: o que lhe parece incômodo no estudo de lactações das vacas e que merece estudo? Quais suas inquietações a respeito do tema? Por que vocês querem estudar sobre esse assunto? O que pode surgir de respostas para suas indagações? Como você vai proceder para responder suas indagações e quando?

Skovsmose (2000) coloca que atividades desse porte têm referência na realidade e estão associadas à investigação. A própria investigação é o caminho pelo qual a indagação se faz. É uma atividade que não conhece procedimentos *a priori*, podendo comportar a intuição e as estratégias formais. O espaço oportunizado pelo PIC torna-se propício ao exercício da investigação e essa característica faz com que a Modelagem Matemática assuma a associação ao ambiente de aprendizagem (6).

Outro aspecto que convém destacarmos está relacionado ao papel do professor nesta investigação. De acordo com Vygotski (1998), o professor age como um mediador ou um direcionador ao estimular a investigação por meio dessas indagações, agindo na zona de desenvolvimento proximal dos educandos, indicando mecanismos para a resolução de problemas, como podemos ver nas falas da professora a seguir:

> ... sua pretensão é somente analisar a influência da alimentação na produção de leite? Nenhuma outra curiosidade ou inquietação vocês têm a respeito do tema... (professora)
>
> Não é interessante, de repente, investigarmos se os animais possuem lactações parecidas? Vocês podem compilar dados a respeito de uma raça de gado leiteiro apenas... (indicação de mecanismos que podem ser usados). (professora)
>
> Vocês apontaram, no cronograma, que o trabalho de compilar os valores da produção de cada animal levaria um mês para sua execução, mas não detalharam como realizarão essa tarefa nem como registrarão os resultados. É preciso deixar registrado na metodologia (questionamentos a respeito das informações já registradas). (professora)

Decorridos cerca de 20 dias, um novo encontro foi marcado em função da constatação da dificuldade dos alunos nos registros, evidenciada nas falas seguintes:

> O que a gente quer é estudar sobre a curva de lactação das vacas. (F).
>
> Mas o quê? Pretendem ver sua forma? Querem verificar se elas são iguais para as diversas raças? Pretendem identificar se várias lactações apresentam o mesmo comportamento? (Professora).

Nesse encontro, percebemos como a intervenção da professora ajuda seus alunos a expressarem o que desejam realizar. As indagações foram suficientes para, ao final do encontro, definirem: problema, objetivo, justificativa, metodologia e cronograma, confirmando a afirmação de Vygotski (1998) sobre existirem coisas que o indivíduo não consegue fazer sozinho, mas que pode realizar mediante instrução de alguém mais capaz. Na continuação do encontro, também se discutiu a respeito da curva de lactação e da relação com a alimentação das vacas. O grupo iniciava neste momento os pequenos ensaios sobre como a Matemática seria utilizada, ocorrendo a visualização do que é uma curva de lactação. Elaboramos alguns questionamentos que poderiam favorecer a Modelagem Matemática no projeto, como: "As lactações das vacas holandesas da EAFRS obedecem ao padrão descrito nos livros de bovinocultura leiteira? Essas curvas possuem o mesmo comportamento de uma lactação para outra? Essa curva pode ser descrita por um modelo matemático relacionando a produção de leite com o período de lactação?"

Após definir-se o problema e os demais itens já citados, os alunos registraram toda essa produção em arquivos digitalizados e, depois de vários encontros com os orientadores, o material ficou definido e organizado. Ocorreu uma resistência do grupo para estruturar os trabalhos, já que faltava iniciativa para trabalharem a sós. Foi preciso acompanhar todos os passos para que fossem realizadas as primeiras leituras e os primeiros registros. Isso evidencia a ausência do hábito de estudar, registrar e também de lidar com ações não comuns à sua realidade escolar.

Finalmente, o trabalho desenvolvido pelo grupo objetivava verificar se as curvas de lactação de seis vacas holandesas da EAFRS obedeciam a um padrão pré-estabelecido ou se poderiam ser descritas por um modelo matemático, que seria utilizado para determinar o pico de lactação e o período em que ocorreria. Tratava-se de um tema ligado à área técnica, com um problema que de fato os inquietava.

PESQUISA BIBLIOGRÁFICA E COLETA DE DADOS

Como passo seguinte, na continuação do segundo semestre de 2007, o grupo produziu uma pesquisa bibliográfica sobre o tema para maior familiarização. Realizaram leituras de artigos, reportagens, capítulos de livros e documentários disponíveis na rede mundial de computadores. Esse trabalho durou cerca de três meses, com duas aulas semanais de PIC.

Nesse período, o grupo já havia visualizado como se desenhava uma curva de lactação e, em uma aula de Matemática, em meio ao estudo sobre gráficos, e do entendimento dos parâmetros das funções e dos elementos da parábola, o aluno F fez uma colocação que relacionava a Matemática ao tema que estava estudando:

> Essa curva aí, professora, virada pra baixo [referia-se a uma parábola com a concavidade voltada para baixo] é parecida com um pedaço da curva de lactação, né?... É possível achar a função que descreve esta parábola? Mas deve ser difícil! (F).

Esse foi o primeiro momento em que o grupo expressou a possibilidade de uma relação com o que se estudava em Matemática e o tema de estudo do projeto: o desenho da curva de lactação. Segundo Barbosa (2001, p. 6), “[...] a indagação não se limita à explicitação do problema, mas uma atitude que permeia o processo de resolução”. As indagações do aluno já sinalizavam seu pensamento em busca das estratégias a serem realizadas para a resolução do problema. Estava em processo, nesse momento, a formação de suas funções psicológicas superiores mediatizadas por um instrumento: o desenho da curva. Verificamos a ocorrência do processo de estímulo resposta descrito por Vygotski(1998).

Logo após esse episódio, F interrogou a professora sobre a possibilidade de utilizar mais de um tipo de expressão matemática para descrever a curva de produção de leite. Tendo como resposta uma afirmativa, apresentou então, uma nova barreira:

> Vai ser difícil encontrar tal modelo (que ele chamou de função) para descrever a curva de lactação dos animais, né? Mesmo dividindo em mais pedaços, não vai dar não. (F).
>
> Encontramos uma expressão de 1º grau que continha alguns pontos determinados, na aula de matemática, não foi? Foi difícil ou foi algo novo? ... Mesmo aqui sendo diferente, deve ter uma maneira, teremos que pesquisar é claro. Que tal pesquisar em seu livro de matemática para ver se te ajuda alguma coisa! (Professora).

Nas palavras do aluno percebemos a tradução de um sentimento de impossibilidade de realizar algo que não está em seu nível de desenvolvimento real. Esse aluno, conforme ressalta Bassanezi (2006, p. 37), representa o aluno que está “[...] acostumado a ver o professor como transmissor de conhecimentos [...]”, o aluno que apresenta dificuldades “[...] quando colocado no centro do processo de ensino-aprendizagem [...]”. A dinâmica da Modelagem Matemática é um obstáculo para o aluno, pois foge da sua rotina. Já, nas palavras da professora, percebemos que ela demonstra contornar a situação e, como mediadora, aponta mecanismos intermediários que podem ser utilizados para resolver o problema, amenizando o obstáculo criado pelo aluno e não oferecendo no ato uma resposta, mas sim provocando uma nova reflexão com outra indagação.

O semestre terminou com a coleta dos dados organizada parcialmente em forma de tabela. A demora ocorreu porque os registros das lactações encontravam-se em valores diários e os alunos então os organizaram em médias mensais. O grupo realizou a compilação dos dados, utilizando tabelas em rascunhos e calculadora. Orientados pela professora, eles passaram a utilizar as ferramentas do *software Excel*[54], que até então desconheciam.

---

54 Microsoft Office Excel é um programa de planilha eletrônica de cálculo escrito e produzido pela Microsoft.

Após a primeira tabulação, a professora, observando suas dificuldades em apresentar informações um pouco mais elaboradas ou com mais formalidade, chamou a atenção do grupo para o cuidado na elaboração de quadros, tabelas e gráficos de modo que se tornassem autoexplicativos, elencando apenas as informações necessárias. Assim foi elaborada a Tabela 11, com a média de produção diária de um animal.

Tabela 11 – Produção de leite do animal 248 da EAFRS

Média de produção diária (kg)		
Tempo (em dias)	Lactação 1 (início em 06/01/2005)	Lactação 2 (início em 15/01/2006)
30	35,4	23,6
60	32,7	24
90	27,1	24,8
120	20,6	22,6
150	20,3	22,3
180	20,1	24,9
210	18,4	26,6
240	16,5	23
270	18,2	20,5
300	19,1	22,6

Fonte: Scheller (2009, p 65)

Com algumas orientações, os alunos compilaram os dados de maneira mais eficiente, aplicando ferramentas do *Excel*. Cenas como esta, de acordo com Vygotski (1998), mostram que a instrução apenas é boa quando faz prosseguir o desenvolvimento, isto é, quando desperta funções que estão em processo de maturação ou na zona de desenvolvimento proximal. Mas, logo após a tabulação, novamente a presença da professora, como mediadora, foi necessária. Vejamos o diálogo a seguir:

> Professora, dá pra perceber na tabela que a produção de leite não tem aumento ou diminuição constante, não é sempre o mesmo valor a variação (F se referindo ao valor da variação na produção de leite). Portanto a curva não poderá ser representada por uma função de 1º grau. Não conheço uma expressão cujo gráfico tenha uma curva como esta aí. (F apontando para a curva encontrada na literatura). (F).
>
> Então teremos que procurar mais informações sobre ajuste de curvas em outras fontes. (Professora).

Percebemos nesta fala que os estudantes se depararam com algo além do seu nível de desenvolvimento real. Havia uma incapacidade momentânea, provavelmente presente em seu nível de desenvolvimento potencial.

RESOLUÇÃO, VALIDAÇÃO E MODIFICAÇÃO DO MODELO

No primeiro semestre de 2008, ocorreu a troca de um membro da dupla devido à transferência de M da EAFRS; H, colega de F, integrou-se ao grupo para colaborar no trabalho em andamento. Depois de finalizadas todas as tabelas de controle de produção de leite por no mínimo duas lactações dos seis animais escolhidos, o grupo iniciou a elaboração das representações gráficas das curvas de lactação. Como eles desconheciam o uso das ferramentas do *Excel* e do *Graphmática* para a realização desta atividade, inicialmente a fizeram em papel milimetrado. Escolheram a produção do animal 240 e, ao finalizar o esboço gráfico, observaram que uma das curvas não correspondera ao resultado que desejavam encontrar.

Após um estudo dirigido com o professor de informática, H assumiu a atividade e realizou todo o trabalho de elaboração dos gráficos utilizando o *Excel*. A finalização da atividade ficou como tarefa para o próximo encontro e os resultados de duas dessas representações gráficas estão descritos nas Figuras 58 e 59.

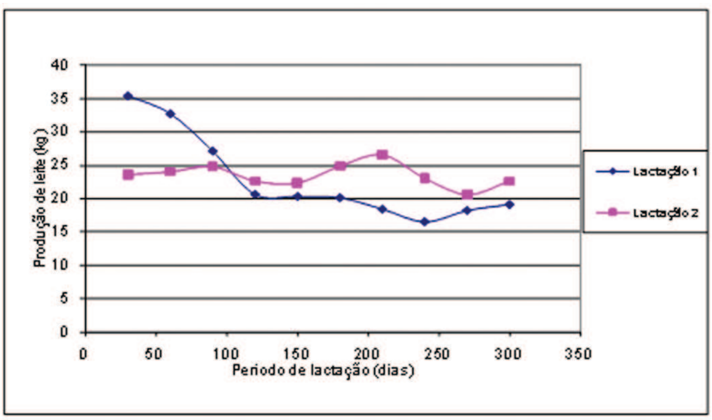


Figura 58 – Representação gráfica da curva de lactação do animal 248 da EAFRS
Fonte: Scheller (2009, p 67)

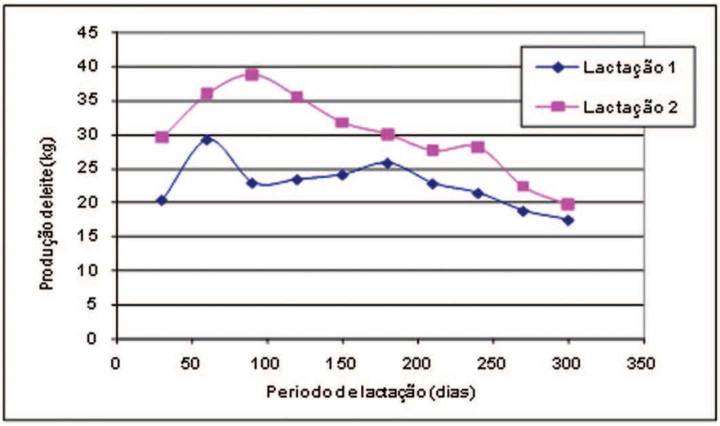


Figura 59 – Representação gráfica da curva de lactação do animal 240 da EAFRS
Fonte: Scheller (2009, p 67)

Após representarem 13 curvas de lactação, F ficou decepcionado com o resultado e pensou que todo seu trabalho tinha sido em vão.

> Professora, não acredito que tanto trabalho não serviu pra nada! Olha aí, deu tudo errado! Vamos ter que pensar em outra coisa pois isso daí não deu nada certo.(F).
>
> Baseado em que você afirma que deu tudo errado? (Professora)
>
> Olha essas curvas, tão todas diferentes daquelas que vimos no livro e no artigo. (F).
>
> Não há curvas com a semelhança esperada? (Professora).
>
> Ter tem, tem duas. Mas o que é duas para tudo isso? (F).
>
> Mas F..., esses modelos que vocês obtiveram não ajudam vocês a responderem nada a respeito do trabalho? O que vocês podem concluir então sobre as curvas de produção de leite desses animais? Como se comportaram as curvas de um mesmo animal? O que pode ter acontecido com os animais que não tiveram comportamento de lactação similar ao estabelecido pela literatura? (Professora).

Após alguns instantes de frustração, a professora pediu que relessem novamente os objetivos, então, H afirmou:

> Professora, nós pensávamos que todas as curvas iriam obedecer ao padrão estabelecido no livro e como não deu, achamos que nosso trabalho tinha dado errado. Vendo estes gráficos, dá pra concluir que as lactações das vacas holandesas aqui da EAFRS não apresentam o mesmo comportamento na lactação e também dá diferença de uma lactação pra outra no mesmo animal. (H apontando para as curvas dos animais 109 e 248). (H).

Percebemos nas falas dos alunos a decepção frente à diferença entre a realidade local e o que foi visualizado em livros de bovinocultura leiteira. O fato de não ocorrer aquilo que esperavam fez com que obstáculos pedagógicos surgissem. Para os alunos parecia ser tudo muito difícil e o entusiasmo em buscar por soluções/respostas diminuiu. Esse sentimento fez com que a atenção deles não se reportasse ao objetivo do trabalho, que acabava de ser atingido: a conclusão de que os animais não possuem curvas de lactação com mesmo comportamento e que lactações de um mesmo animal apresentaram comportamentos diferentes.

É necessário que o professor esclareça aos alunos que nem sempre os resultados dos objetivos são atingidos plenamente e que os dados de um experimento podem ser diferentes de outros experimentos já efetuados, mas que tudo o que foi realizado explica a natureza da investigação. O professor deve ter segurança na maneira de conduzir o processo de Modelagem Matemática, não deixando seus alunos inseguros ou desestimulados, o que exige conhecimento do tema, da dinâmica e dos conteúdos matemáticos envolvidos, segundo Burak (1994).

A professora orientou a dupla para que escrevessem no relatório todas as considerações que perceberam após a análise das curvas para discussão com o orientador da área técnica. Ao final, a professora sentiu-se satisfeita com a produção dos alunos, pois haviam elaborado o primeiro modelo matemático do trabalho: os esboços das curvas de lactação. Suas angústias compõem o que Bassanezi (2006) chama de processo de validação do modelo. Os alunos optaram por continuar a investigação de duas das curvas que apresentaram comportamento parecido com o que havia sido estudado na revisão bibliográfica; o passo seguinte foi buscar uma expressão para ajustar o modelo.

Nessa etapa, a mediação deixou contribuições significativas para o trabalho que estava sendo desenvolvido, pois os alunos já haviam identificado anteriormente que o modelo poderia ser elaborado com uma expressão composta por mais de uma sentença, uma para cada intervalo. Observando a curva do animal 240 em sua lactação 2, F sugeriu:

> Professora, pelo que já vimos nas aulas de matemática e na curva de lactação do livro, eu acho que dá pra dividir a curva em dois intervalos. Um compreendendo os primeiros 150 dias e outro intervalo para os últimos 150 dias da lactação. A primeira parte parece uma parábola virada pra baixo e a segunda parte é parecida como a reta da função afim. Encontrar uma expressão para representar o segundo intervalo nós já vimos, mas para achar a função de 2º grau, aí não sei não! (F).

O que ainda não sabiam era encontrar as expressões das duas sentenças, mas o domínio já estava definido. H afirmou que, no segundo intervalo, a produção de leite possuía uma variação quase constante, então os pontos poderiam ser interpolados visando uma sentença de 1º grau, como já sabiam das aulas de Matemática. A professora então sugeriu pesquisas sobre ajuste polinomial.

A Modelagem Matemática sem determinação *a priori* permite mudar o foco, dependendo dos apontamentos e informações levantadas, mas é importante que a postura do professor seja flexível, respeitando as opções dos alunos, sem induzi-los a uma escolha. Quando F escolheu o intervalo para o modelo da curva, ele formulou, segundo Kaiser e Maaß (2007), sua própria solução que está diretamente relacionada com sua capacidade de traçar estratégias e formas para resolver problemas.

Como a maioria das aulas acontecia no laboratório de informática, o cenário para investigação foi constituído por leituras dos textos retirados dos livros de Estatística e artigos sobre ajuste, o que permitiu que o grupo identificasse métodos para realizar o ajuste desejado através do *Excel*. Para verificar sua confiabilidade, resolvemos realizar os ajustes também utilizando o método dos mínimos quadrados presente em livros de Estatística. Os alunos sentiram dificuldade nesta etapa, em alguns momentos, eles pensaram em não mais prosseguir. Na entrevista realizada com o grupo após o término do trabalho, eles revelaram que *"[...] a principal dificuldade esteve em entender o conteúdo novo para a realização do trabalho [...]. Também destacamos a utilização de programas para encontrar fórmulas e fazer gráficos e tabelas"*.

Essa etapa foi lenta e de trabalho exaustivo, pois exigiu que os alunos se familiarizassem com o uso do *software* para realizarem o ajuste para cada um dos intervalos. Em seguida, eles preencheram tabelas a fim de obter o modelo, seguindo as etapas previstas para o ajuste parabólico e linear do método dos mínimos quadrados e posterior comparação com o modelo obtido pelo *Excel*. Esse trabalho exigiu cerca de oito aulas, pois os cálculos foram trabalhosos e exigiram estudo sobre determinantes e sistemas lineares. Para visualização dos cálculos, ver Scheller (2009).

O modelo foi composto por duas sentenças: a primeira parte da curva foi descrita pela função quadrática, pois, segundo os alunos, essas funções podem ser utilizadas sempre que *"[...] tem-se uma curva em forma de parábola e pretende-se calcular o máximo da função que será o pico de lactação [...]"*; a segunda parte foi descrita por uma função de 1º grau que possui *"[...] variação constante"*, com y expressando a produção de leite em quilos e x o período de lactação do animal em dias.

$$y = \begin{array}{l} -0{,}00289x^2 + 0{,}559333x + 8{,}14, \text{ onde } 0 < x < 150 \\ -0{,}054x + 35{,}18, \text{ com } 150 < x < 270 \end{array}$$

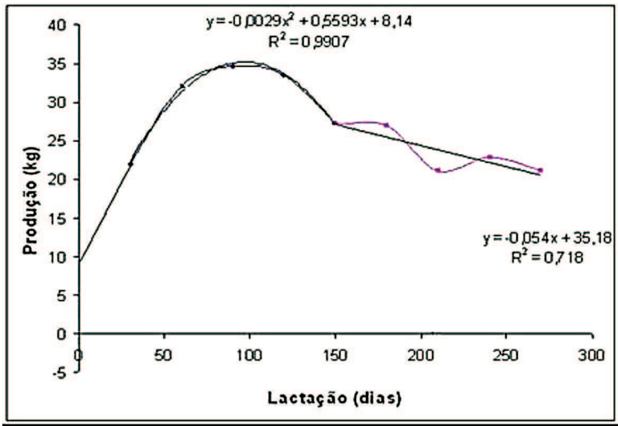


Figura 60 – Modelo da Lactação 2 do animal 109, da raça Holandesa Pura, do setor de Zootecnia 3 da EAFRS, em quilos de leite
Fonte: Scheller (2009, p. 71)

A professora direciona o cenário para algumas considerações a respeito do modelo, a fim de verificar se os alunos realmente conheciam o significado do que acabavam de realizar, como é possível observar no diálogo a seguir.

> Vocês sabem o que significa cada um dos parâmetros presente nas expressões do modelo? Falo isto, referindo-me às informações que esse modelo pode fornecer a respeito da lactação do animal. (Professora).
>
> Ah, conseguimos ver o pico (apontando para sua localização). (H).
>
> E qual foi o valor da produção de leite no pico? Em que período ele ocorreu? ... (Professora)
>
> O pico, nós já estudamos e se refere ao vértice da parábola, não é?! Para encontrar não é só fazer o "x do vértice e o y do vértice"?
>
> $$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0{,}5593}{2.(-0{,}0029)} = 96{,}7 \quad e \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a} = 35{,}2kg$$
>
> O pico ocorreu por volta do dia 97 ou no período de 30 dias que antecede esta data[55]. A produção máxima foi de 35,2 kg. E olhando a tabela, os dados parecem próximos. (F).
>
> E os parâmetros do modelo encontrado, explicam a situação analisada? (Professora)

55 O aluno quer dizer que o pico de lactação poderia ter ocorrido antes do dia 97, devido aos erros decorrentes do modelo, por causa do intervalo entre os dados coletados para o ajuste.

Como assim os parâmetros, professora? (F).

Refere-se aos coeficientes a, b e c do termo geral da função do 2º grau ($y = ax^2 + bx + c$) e dos coeficientes a e b da função de 1º grau ($y = ax + b$). O que eles representam para o teu tema? (Professora).

O coeficiente angular, assim, professora? Ele tem valor de – 0,054, né!? (H).

E o que ele significa no seu trabalho, para a produção de leite dos animais? (Professora).

Esse valor indica que a produção de leite está diminuindo constantemente, pois tem valor negativo. E isso é confirmado pela curva, olha só (apontando para a segunda parte da curva). Na primeira sentença do modelo, o valor do "*a*" indica que a concavidade da parábola está virada pra baixo e o "*c*" é o coeficiente linear. (H).

O que esses valores têm a ver com a produção de leite? (Professora). (pausa)

Será que estes valores querem dizer que a produção de leite no início da lactação foi de cerca de 8 litros? (apontando o parâmetro "*c*" no modelo da primeira sentença) Pois é ali que começa a lactação. Se for isso, o 0,559 sendo positivo, indica que a produção de leite aumenta após o início da lactação. Acho que é isso. (F).

As falas evidenciaram o caráter de validação do modelo, então, percebemos indícios de integração da Matemática com outra área do conhecimento. Por meio de indagações, os alunos interpretaram o modelo analisando as implicações das soluções apontadas e, após determinados os valores do pico de lactação através do vértice, realizaram a verificação da adequação do modelo. Para isso, utilizaram o modelo encontrado para calcular a produção de leite em certos períodos, comparando com os resultados coletados no trabalho a campo. Em seguida, analisaram os modelos das duas curvas analisadas quanto ao pico e à produção de leite ao longo do período de lactação.

No relatório do trabalho desenvolvido (SCHELLER, 2009) no ambiente de aprendizagem, os alunos registraram os resultados de sua pesquisa contendo a exploração matemática do tema e considerações sobre seus objetivos. O resultado final rendeu-lhes conhecimento da área de bovinocultura leiteira, entendimento de parte da história do setor de Zootecnia da Escola, além de conhecimentos matemáticos que lhes eram desconhecidos. As contribuições do trabalho somente foram reconhecidas por eles após a finalização, quando realizaram as socializações. Até então, para F era mais um trabalho escolar que exigia muito estudo, dedicação e comprometimento.

A SOCIALIZAÇÃO

A socialização dos resultados do trabalho foi realizada na escola, com a presença de público externo, na mostra de projetos desenvolvidos pelos alunos que a EAFRS promove anualmente, no mês de agosto, denominada FETEC, para os alunos que finalizaram seus projetos de Iniciação Científica. Os alunos são convidados a realizarem a socialização e sua aceitação também depende do aval do professor orientador. Para a exposição, é elaborado um material com slides que contêm a identificação, justificativa, objetivos, metodologia, teoria que fundamenta o tema, dados coletados e resultados do trabalho. Outro elemento presente no momento da socialização é o relatório do projeto desenvolvido, que segue normas técnicas abordadas nas aulas do PIC, conforme Scheller (2009).

Ao apresentarem seus trabalhos, os integrantes mostraram: o tema, os reais motivos que geraram a investigação, os objetivos, a coleta de dados, até a apresentação dos modelos. Os alunos fizeram interpretações utilizando-se da matemática e relacionando os resultados com o que ocorre em um ambiente especifico para a produção. Eles destacaram as dificuldades enfrentadas e responderam questionamentos de colegas e de professores de Matemática.

Na exposição do trabalho, os próprios alunos sentiram que o empenho foi válido e, mais do que um certificado de participação, essa oportunidade foi muito importante para sua vida escolar e de iniciantes na pesquisa básica, como é possível observar na fala a seguir:

> Agora que acabou a pesquisa percebemos que a concepção da utilização da matemática em resolução de problemas na área técnica não é a mesma que no início. Vimos que podemos usar a matemática em muitas coisas, na forma de auxílio à agropecuária. Podemos usar como exemplo nosso trabalho que ajudaria muito em uma propriedade rural. Os produtores de leite poderiam acompanhar a produção de seus animais vendo até que ponto seria rentável ficar com eles na propriedade [...].
>
> [...] Houve vontade de desistir em muitas ocasiões, mas agora vimos que valeu a pena aquele trabalho todo. Ainda bem que a professora sempre [nos] incentivou a continuar no trabalho. (F e H).

Após a primeira socialização, o grupo participou de dois outros eventos similares (Feira Regional e Feira Catarinense de Matemática). Sua visão do trabalho e da importância de tê-lo desenvolvido foi reforçada ainda mais, pois foram novos ambientes, com públicos diferenciados, que prestigiaram os trabalhos.

> Nas Feiras de Matemática, no início dava um frio na barriga, mas depois de apresentarmos umas duas ou três vezes, já passava. Devia ser porque nós sabíamos que a maioria dos adultos que ali estavam entendiam muito bem de Matemática, pois o foco principal era a Matemática e não o projeto como um todo. Na Feira Catarinense esse sentimento parecia menor devido aos vários comentários positivos dos nossos trabalhos. Foi bem legal ouvir diversas vezes: "Mas foi vocês mesmos que fizeram isto tudo? Ficou muito bom, parabéns pelo que conseguiram fazer! Parabéns, vocês dominam muito bem o trabalho! Vocês deveriam participar do FEBRACE, está muito bem organizado o trabalho, parabéns!" (Grupos 1 e 2).
>
> Ouvir aquilo, enchia a nossa bola como se diz, e a gente se sentia muito bem valorizado e agradecido pelas vezes que a professora não deixou a gente desistir. (Grupo 1).

O grupo apresentou facilidade na exposição do trabalho, pois seus integrantes dominavam os modelos encontrados e justificavam o porquê de os terem elaborado. Depois de finalizado o trabalho, o grupo observou que o resultado alcançado foi além do que eles pensavam e perceberam que, mais do que um trabalho, aquilo era o resultado de vários conhecimentos articulados e passíveis de compreensão.

CONCLUSÕES

Ao optarmos por um trabalho na área de Modelagem Matemática, procuramos identificar contribuições desse ambiente de aprendizagem, nos cenários para investigação, para a análise, discussão e resolução de problemas por meio da integração das disciplinas de Matemática e do Ensino Técnico em Agropecuária, motivados pelas potencialidades da Escola com o Projeto de Iniciação Científica. A Modelagem Matemática não foi utilizada com o sentido de estratégia de ensino, mas sim como um ambiente em que, professora e alunos aceitaram o convite e investigaram um tema não matemático.

A utilização da Modelagem Matemática no trabalho com os Projetos de Iniciação Científica proporcionou não apenas a exploração da Matemática e a aprendizagem de novos conteúdos/conceitos da disciplina, mas também privilegiou indagações sobre o próprio conteúdo utilizado, outras investigações relacionadas ao tema, discussões a respeito do trabalho como um todo e sua relação na sociedade em que se insere, bem como da importância da socialização do conhecimento.

Nesse cenário, a Modelagem Matemática contribuiu para um tipo de trabalho diferente, modificando a dinâmica que, geralmente, não começa pelo problema. Tanto a professora quanto os alunos assumiram novas posturas ao compartilharem as tarefas. De um lado, a professora, atuando como mediadora, criando oportunidades para atuar na zona de desenvolvimento proximal, com vistas ao favorecimento de funções psicológicas superiores ainda não desenvolvidas em seus alunos; de outro, os alunos realizando tarefas compartilhadas com alguém mais capaz. Nessa interação "professora x aluno" e "aluno x aluno", acabaram adquirindo novos conceitos, tanto matemáticos quanto zootécnicos.

Tratou-se de dificuldades existentes no processo de Modelagem Matemática e que podem se transformar em obstáculos para esta atividade. Os estudantes destacaram que a presença da professora orientadora, incentivando-os e discutindo todas as etapas, foi essencial para que eles finalizassem o trabalho, evidenciando o quanto a postura do professor é importante para a Modelagem Matemática. Não se trata de um professor que fornece diretamente as informações realiza as tarefas, mas que compartilha as atividades, levando os alunos a refletirem sobre suas ações ou opções feitas. Os alunos revelaram que não perderam nada em desenvolver o trabalho, pois contribuiu para que tivessem outro tipo de experiência, ampliando os conhecimentos, mudando as concepções sobre a utilidade da Matemática.

As socializações deixaram evidentes que as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas no decorrer das aulas possibilitaram aos alunos o estudo de temas que não pertenciam necessariamente à disciplina de Matemática. Envolvidos com sua professora na formulação de hipóteses, a simplificação de conceitos que se relacionavam aos modelos, a análise e validação desses modelos e a realização de mudanças, quando necessário, fizeram com que o cenário para investigação com referência à realidade, se tornasse real. Mais do que aplicar a Matemática, essa experiência serviu para ampliar a compreensão sobre o papel dos modelos matemáticos no ambiente em que vivem. Foi uma oportunidade de interpretarem e agirem sobre uma situação social, em um contexto real. Nesse caso, a Modelagem Matemática passou a ter um caráter de geradora de algum tipo de crítica. As reflexões surgidas em diversos episódios se situam na dimensão do conhecimento reflexivo (SKOVSMOSE, 2001) e se referem às indagações surgidas no decorrer do processo a respeito da obtenção e validação do modelo.

Percebemos que a Modelagem Matemática contribuiu para o desenvolvimento de habilidades como criatividade, observação, reflexão perante os resultados e a resolução de problema. Desenvolveu também capacidades como: buscar informações nas mais diferentes fontes; utilizar recursos diversos, promover comparações entre os resultados obtidos; analisar as possíveis soluções e decidir pela mais adequada; avaliar os resultados obtidos e suas consequências, comparando-os com as hipóteses iniciais.

Também foi possível observar que três tipos de conhecimentos foram contemplados: o conhecimento tecnológico, diagnosticado, por exemplo, nos episódios em que necessitaram da utilização de *softwares* para construir e validar o modelo; o conhecimento reflexivo, que se refere à natureza dos modelos e aos critérios utilizados para sua construção, aplicação e validação, que pode ser visualizado tanto na elaboração do material (relatório final) como nas exposições do trabalho; e o conhecimento matemático que surgiu como decorrência dos outros dois.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24. 2001, Caxambu. *Anais...* Caxambu: ANPED, 2001. Disponível em: <http://sitesuol.com.br>. Acesso em: 20 dez. 2007.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BURAK, Dionísio. Critérios norteadores para adoção da modelagem matemática no ensino fundamental e secundário. *Zetetiké,* Campinas, UNICAMP, ano 2, n. 2, p. 47-60, 1994.

KAISER, Gabriele; MAAß, Katja. Modelling in Lower Secondary Mathematics Classrooms – Problems and Opportunities. In: BLUM, Werner; GALBRAITH, Peter; HENN, Hans-Wolfgang; NISS, Mogens. (Eds.). *Applications and Modelling in Mathematics Education*. Nova York: Springer, 2007. p. 99-108.

SCHELLER, Morgana. *Modelagem matemática na iniciação científica*: contribuições para o ensino técnico médio. 228 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br/handle/10183/17711>. Acesso em: 01 jun. 2010.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. *Bolema,* Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

_______. *Educação Matemática Crítica*: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

VYGOTSKI, Lev Semenovitch. *A formação social da mente*. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

TECNOLOGIAS DIGITAIS NA SALA DE AULA PARA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: MANIPULAÇÕES NO *SOFTWARE* GRAFEQ

Ricardo de Souza Santos
Marcus Vinicius de Azevedo Basso

APRESENTAÇÃO

Este estudo aborda a utilização de recursos disponibilizados pelas tecnologias digitais no ensino-aprendizagem de Matemática[56]. Mais especificamente, o objeto de estudo é a introdução do *software* GrafEq[57] no ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio da Escola Básica. Para verificar o alcance das contribuições que a proposta trouxe ao ensino de Geometria Analítica, foi implementada uma sequência de atividades em duas turmas do segundo ano do nível médio em uma escola da rede privada de Porto Alegre. A análise dos resultados foi obtida de forma empírica utilizando-se, como método, o estudo de caso. Para isso, o estudo foi fundamentado nas teorias de James Kaput (1992) sobre introdução das tecnologias digitais na Educação Matemática. Os resultados encontrados apontam para o uso de tecnologias digitais como uma possível contribuição no ensino-aprendizagem de Geometria Analítica, a qual se constitui em um importante tópico de Matemática do Ensino Médio.

VALOR DA GEOMETRIA ANALÍTICA

A Geometria é parte importante dos currículos de Matemática da Educação Básica, pois ela pode desenvolver no estudante capacidades como compreensão, espírito de investigação, representação e resolução de problemas – habilidades importantes e inerentes ao Ensino de Matemática, também contempladas nas

56 Este texto foi construído a partir de dissertação de Mestrado (SANTOS, 2008), submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, sob orientação do Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

57 *Software* gráfico que permite construções de curvas e regiões no plano através de igualdades e desigualdades algébricas, com coordenadas cartesianas ou polares. Disponível em: <www.peda.com/grafeq>. Acesso em: 10 abr. 2011.

Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006). Essa matéria se desdobra em vários ramos, mas, para efeito deste estudo, trataremos da Geometria Analítica, que tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. Nesse âmbito, o estudante pode perceber outros modelos que explicam o espaço de forma mais elaborada com linguagens e raciocínios diferentes dos utilizados na geometria euclidiana.

O lugar de destaque que a Geometria Analítica ocupa como ramo da matemática se dá por um motivo simples – a relação Álgebra-Geometria. O ganho real para a ciência Matemática fica por conta do fato de que problemas geométricos podem ser resolvidos por métodos algébricos, muitas vezes simples, e mais ainda, propriedades algébricas podem ser facilmente verificadas geometricamente. Isto representa um avanço para uma ciência calcada em provas e demonstrações de seus resultados. Em suma, a Geometria Analítica estabelece uma equivalência entre enunciados geométricos e proposições relativas a equações ou a desigualdades algébricas. Também é preciso registrar que a importância desta não está apenas em seus estudos avançados, pois já no Ensino Médio têm-se abordado conceitos de grande valor como as igualdades e desigualdades lineares, base do estudo para um ramo das matemáticas aplicadas – a Programação Linear – com aplicações na Economia e para a Teoria dos Jogos.

REALIDADE DO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Contrastando com a riqueza do método analítico e contrariando os atuais padrões mundiais de ensino, há uma séria deficiência na rede de ensino brasileira em relação à aprendizagem desses conteúdos. Este fato pode ser constatado estudo através de exemplos bem claros. Os resultados obtidos pelo Brasil - abaixo da 50ª posição (entre 56 países) - no Programa para Avaliação Internacional de Alunos (PISA, 2006) e uma análise crítica dos principais livros didáticos que estão nas salas de aula brasileiras, realizada por Elon Lages Lima (2001), são dois deles.

Na sua análise, Lima (2007) diz que, além de ignorar a existência de calculadoras e computadores, os livros, que servem como guia para os professores, e, por conseguinte, determinam a qualidade de ensino deles, são carentes de situações-problemas que ressaltem a aplicabilidade e a importância da Matemática. Em geral, no tópico de Geometria Analítica, o autor vê uma série de falhas. Primeiramente, existe uma demasiada fragmentação do conteúdo, tornando complicado o seu entendimento mais global. Existe também o excesso de problemas de caráter mais manipulativo e de fórmulas (problemas estritamente algébricos), contrastando com a falta de demonstrações de resultados importantes. É importante salientar que esses livros simulam o conhecimento matemático difundido nas escolas brasileiras.

Percebemos então o quanto está prejudicada a Educação Matemática, resumida nela mesma e na preparação ao vestibular, como nas palavras de Lima (2001, p. 370):

> [...] as escolas ocupam boa parte do tempo adestrando seus alunos para o exame vestibular [...] Como já dissemos antes, isso contribui para fortalecer no aluno (e, por extensão, na sociedade) a crença de que a Matemática que se estuda na escola serve apenas para passar no exame vestibular. Na verdade, do modo como as coisas estão, essa crença é bastante justificada. Mas não deveria ser assim.

Um terceiro exemplo que ilustra a realidade do ensino nas escolas é a vivência do primeiro autor desse artigo, representada pela verificação nos livros oferecidos pelas editoras nas escolas da rede privada de ensino de Porto Alegre e na sua prática como professor de Ensino Médio e de cursos pré-vestibulares. Estes últimos propiciam uma troca de experiências com estudantes provenientes de diversas realidades escolares, ampliando a representatividade das reflexões.

O quadro se resume em uma falta de conexão entre as representações algébrica e geométrica, desqualificando o ensino-aprendizagem de Geometria Analítica e resumindo-o a memorizações de fórmulas. Dessa forma, em grande parte dos casos, os estudantes que possuem algum conhecimento estão limitados à reprodução de fórmulas sem ter ideia de como essas soluções algébricas se refletem em um plano coordenado. Talvez uma causa plausível para a formação desse quadro seja a dificuldade em, por métodos como giz e quadro-negro, régua e compasso etc., proporcionar um ambiente que torne natural esta via álgebra-geometria e que a evolução dos estudantes no domínio da Álgebra, da Geometria e das equivalências entre elas se torne expressivo. Portanto, é necessária uma proposta, para o estudo de Geometria Analítica, que contemple um real aprendizado das relações entre curvas no plano e suas representações algébricas.

CONTRIBUIÇÃO COMPUTACIONAL PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – *SOFTWARE* GRAFEQ

A pertinência do uso da tecnologia informática é justificada por diversos fatores. A disponibilidade de recursos como internet e *softwares* educacionais abrem um leque de possibilidades didáticas, modificando as relações entre professor e aluno. D'Ambrosio e Barros (1990) acrescentam que essas mudanças causam grandes impactos na sociedade, gerando reflexos conceituais e curriculares na Educação Básica e na Educação Superior. À Matemática cabe o papel de desenvolver nos estudantes, também nesse âmbito, habilidades como selecionar e analisar informações, tomar decisões, resolver problemas e transcrevê-los em linguagem correta.

Dessa forma, nos deparamos com a necessidade social gerada pela evolução de tais tecnologias. Cada vez mais os indivíduos precisam aumentar sua interação com as máquinas, conhecendo suas vantagens e limites, utilizando-as em benefício do aprender e do trabalho. Assim, não podemos ignorar a intersecção entre estas duas áreas: Educação Matemática e Informática, objetivando o Ensino de Matemática para a utilização dos recursos tecnológicos, de forma racional e vinculada ao saber matemático.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 2006) determinam, para a Educação Matemática e os recursos tecnológicos, uma relação de reciprocidade. A Matemática deve servir para o aluno entender e se apropriar das tecnologias digitais, assim como as tecnologias devem ser ferramentas para entender a Matemática. Outra habilidade contemplada é a utilização adequada de calculadoras e computadores, reconhecendo suas limitações e potencialidades. Mais especificamente sobre computadores, há a sugestão de utilizarmos *softwares* matemáticos, que caracterizem e influenciem o pensar matemático, e a internet.

Porém, o uso das tecnologias digitais na sala de aula deve ser antecedido por reflexões consistentes sobre o alcance dessas tecnologias e o papel da escola. Uma questão levantada por Kaput (1992) refere-se à utilização do verdadeiro potencial das tecnologias computacionais no Ensino de Matemática. É preciso rever os processos de ensino de Matemática que visam à aquisição de técnicas aritméticas e à aplicação demasiada de fórmulas para chegar a valores numéricos sem significado, desprezando o real fazer matemático. Devemos oportunizar ao aluno a chance de ele desenvolver e utilizar o raciocínio lógico para testar e validar suas hipóteses – evolução natural do conhecimento matemático, "escondido" pela escola atual.

Com base na importância do estudo de Geometria Analítica e das dificuldades no ensino ressaltadas anteriormente, propomos neste artigo uma análise da aplicação do *software* gráfico GrafEq como recurso didático no estudo de Geometria Analítica, analisando, por meio de testagem no contexto de uma sala de aula normal no Ensino Médio, a alternância entre as representações geométrica e algébrica. Para esta investigação, entre os recursos informáticos disponibilizados atualmente, escolhemos o software GrafEq pela sua interface apurada e pela didática quanto à disponibilidade de equações e sinais algébricos - em contraponto a *softwares* como Maple ou Derive, que funcionam como ferramentas de computação para matemática e estão distantes, na sua forma, dos estudantes do Ensino Médio.

O *software* escolhido coloca os estudantes em situações que permitem a exploração de acordo com a sua necessidade (descoberta dos menus, modificação/sobreposição de cores ou alterações nas configurações dos eixos, por exemplo) e a semelhança da escrita das equações com a escrita no caderno. O dinamismo encontrado no uso do GrafEq é notado quando o estudante altera os parâmetros da relação algébrica e verifica diferenças na representação geométrica equivalente. Entretanto, a clareza para digitar equações e verificá-las no plano cartesiano (também há a opção de se utilizar coordenadas polares), o acréscimo de um menu especial com expressões e funções conhecidas e outras atribuições, parece garantir, servindo aos objetivos desta pesquisa, uma navegação rápida e prática, por parte do usuário, pelas relações entre as equações (Álgebra) e suas representações gráficas (Geometria).

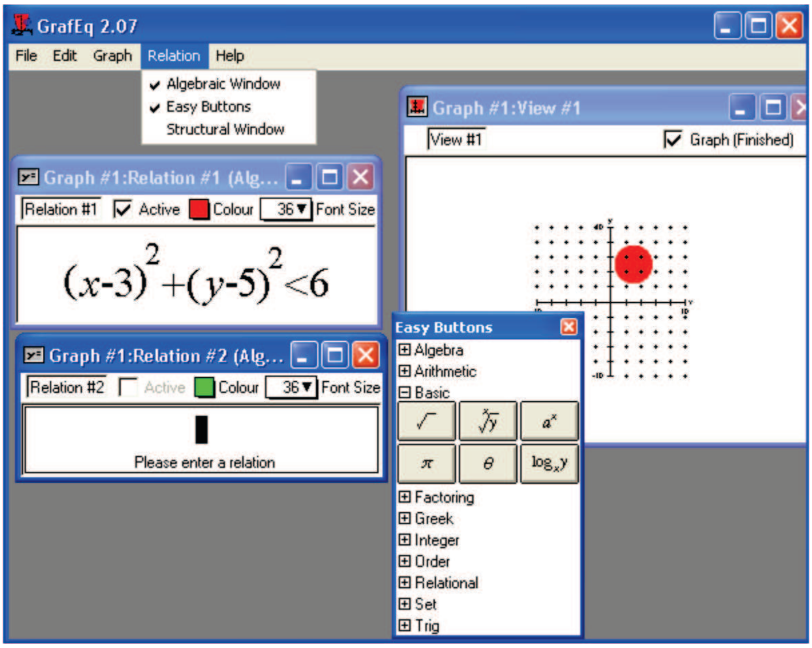


Figura 61 – Interface do GrafEq
Fonte: Santos (2008)

Isso pode ser constatado, por exemplo, quando o estudante começa a fazer inferências, alterando e refletindo sobre uma relação algébrica $R(x)$ e suas variações como $R(x) + c$ (onde c é uma constante qualquer) ou $c.R(x)$, verificando as translações e simetrias nas representações gráficas. A visualização dos resultados obtidos com o uso do *software* retorna informações a partir do manuseio de expressões algébricas e suas equivalências geométricas e sobre o próprio conhecimento do estudante.

A principal contribuição do GrafEq é a possibilidade de alteração das equações já utilizadas, dando a chance ao aluno de ir revendo, durante o processo de construção, o que mais se ajusta à resolução do problema proposto, trabalhando simultaneamente com conceitos geométricos e algébricos.

Não podemos nos esquecer de que na escola está arraigado um sistema de ditar do mestre e de escrita manuscrita do estudante junto a algum material impresso (apostila, livro, etc.). É preciso levar em conta esses fatores, pois fazem parte da cultura dos nossos estudantes de Ensino Médio – e até mesmo nesse aspecto a escola tem responsabilidade, pois os estudantes já nasceram na era da informação e ainda estão habituados com essa rotina de avançar nos estudos. Assim, este trabalho visa a auxiliar os estudantes a raciocinarem (neste caso, sobre matemática) com o uso da máquina, situação comum no mercado de trabalho hoje e que aumenta com a velocidade da era da informação, mercado esse que já não aceita indivíduos desprovidos de tais habilidades.

ATIVIDADES/ANÁLISE DA TESTAGEM

A seguir, temos exemplos de atividades utilizadas na coleta de dados em uma escola de Ensino Médio da rede privada de Porto Alegre. São extratos das produções de dois estudantes e estão acompanhadas de comentários acerca da sua evolução nas linguagens algébricas representativas de situações no plano cartesiano. Por motivos éticos, os nomes dos estudantes foram trocados por siglas. As atividades ou exercícios propostos em Santos (2008) compôem o apêndice no final deste artigo.

1 Estudante DAG

O estudante DAG demonstrou desde o início bastante interesse em realizar as tarefas – motivação suscitada pela utilização do computador. Durante as atividades nesta modalidade de aula, que privilegia as construções individuais dos estudantes, DAG, recém-chegado dos Estados Unidos e ainda aprendendo o português, não encontrou as dificuldades de compreensão identificadas em sala de aula. Na atividade 1 (construção de retas, inequações lineares), o estudante não entendeu como deveria salvar o arquivo e então usou o comando *print screen* e enviou, por *e-mail*, a imagem da tela com a atividade feita. Essa saída encontrada por ele é um exemplo da autonomia de que os estudantes dispõem sobre suas construções nesta estrutura de aula e, além disso, a interação com tecnologias permite o uso de várias ferramentas (KAPUT, 2007) – neste caso, DAG utilizou um *software* para tratamentos de imagens (possivelmente o MS Paint[58]) para salvar a imagem com a sua construção (Figura 62) e a internet para enviá-la.

58 *Software* criado pela Microsoft para desenhar/criar imagens.

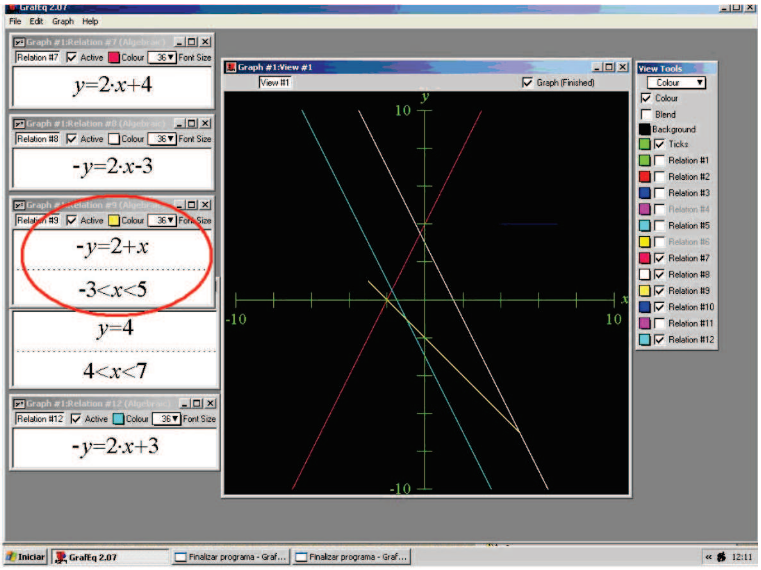


Figura 62 – Atividade 1
Fonte: Santos (2008)

Nesta atividade, com o objetivo de permitir aos estudantes um aprendizado das principais ferramentas do *software* (via manipulações), DAG precisava construir retas com diferentes inclinações, retas paralelas e segmentos de reta. Como podemos notar na figura enviada por ele, a atividade foi realizada com sucesso. Na relação circulada (e em outras relações da figura), que é referente ao segmento amarelo no gráfico, notamos que o estudante utilizou equações lineares sem preocupações com a forma (note que a variável *y* aparece precedida do sinal de "menos") que lhe fora apresentada no primeiro ano. Essa foi a sua maneira de trabalhar com equações lineares, demonstrando que o clima da aula era propício às produções individuais, incentivadas tanto pela conduta do professor-pesquisador, como pela interface do GrafEq. Também percebemos uma boa utilização de restrições de domínio como $-3<x<5$ para construir o segmento de reta. Isso também é possível perceber na atividade 2, como podemos notar na figura a seguir (Figura 63).

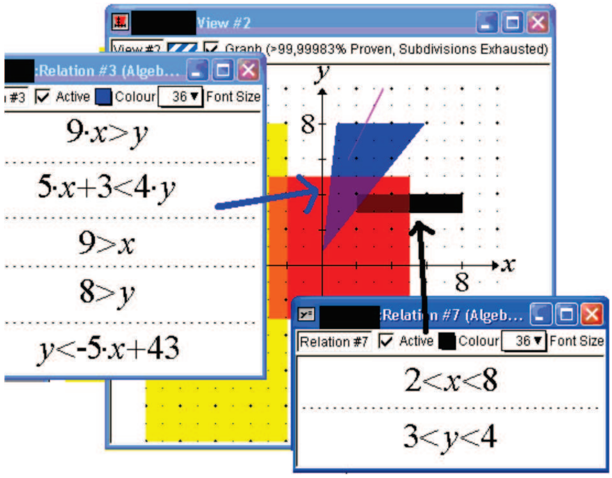


Figura 63 – Atividade 2
Fonte: Santos (2008)

É possível perceber também que ele apresenta despreocupação em colocar a variável *y* no primeiro membro das (in)equações, pois isso não faz diferença alguma para ele e nem para o *software*.

Na atividade 3, que requer a construção de discos, DAG acaba de conhecer a equação da circunferência e já mostra, novamente, compreensão do sinal de desigualdade para conceber discos ou regiões fora deles. O fato é que, com naturalidade, ele utilizou um novo conhecimento (equação da circunferência) aliado à noção de regiões no plano desenvolvida na atividade anterior. Durante esta atividade, foi gerado um pequeno vídeo em uma câmera digital. Podemos analisar as imagens a seguir capturadas do vídeo e, a seguir, a sua explicação acerca da sua construção.

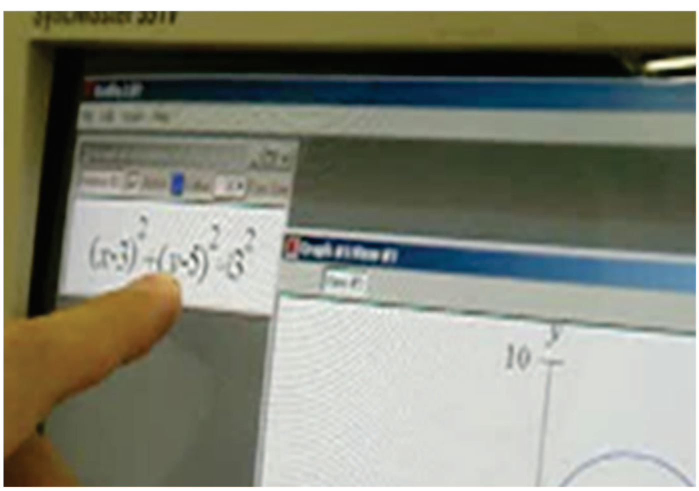


Figura 64 – Atividade 3 imagem 1 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

Na imagem anterior, DAG aponta a equação e identifica, como ele mostra no quadro abaixo (à esquerda), as coordenadas do centro da circunferência. À direita, mostra conhecimento da definição de raio, girando os dedos sobre a equação e dizendo que os pontos estão a uma mesma distância do ponto central.

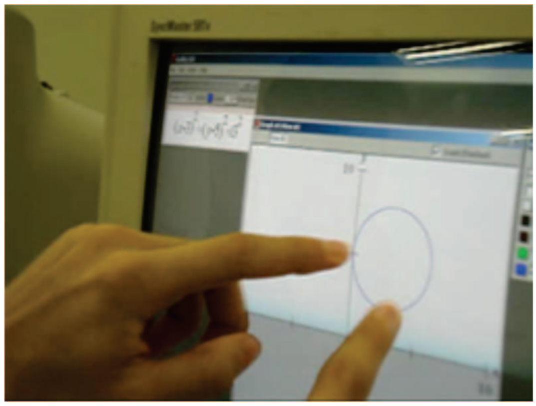


Figura 65 – Atividade 3 (imagem 2 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

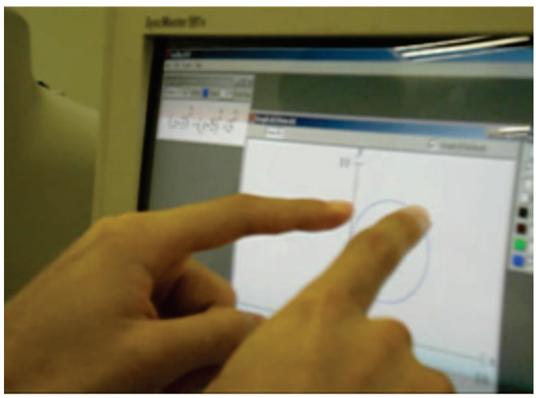


Figura 66 – Atividade 3 (imagem 3 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

DAG fez este comentário antecipando sua próxima ação, que foi a de operar com as desigualdades. A ação foi capturada na figura a seguir:

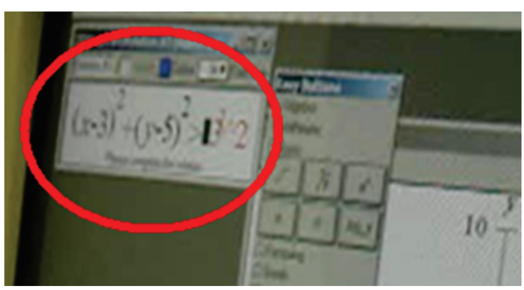


Figura 67 – Atividade 3 (imagem 4 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

A seguir, temos fotos do momento em que DAG explica os resultados encontrados. Nesse momento, o estudante utiliza uma linguagem que, embora imprecisa, permite que ele se faça compreender, identificando que as regiões estão “fora e dentro do raio”. Esse vídeo demonstra o quanto DAG alterna com desenvoltura entre as representações algébrica e geométrica, demonstrando compreender a ideia-chave da Geometria Analítica.

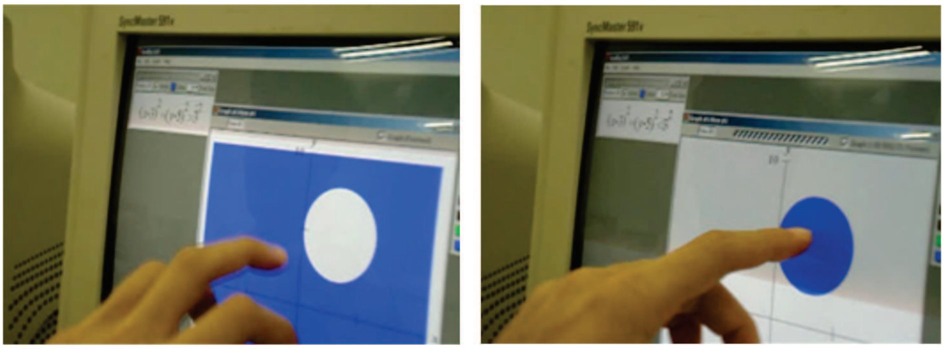


Figura 68 – Atividade 3 (imagens 5 e 6 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

A atividade 4 propõe aos estudantes a construção de quatro figuras pré-definidas (uma cruz, uma casa, um sol sobre o mar e um carrinho – ver o apêndice). Para fazer a cruz, DAG sobrepôs dois retângulos, que ele já fazia na atividade 2, e para construir a casa, o desafio de fazer um triângulo apareceu novamente. A figura original do sol sobre o mar era retangular, mas o estudante, demonstrando criatividade, avanço no domínio das inequações e autonomia sobre sua construção, a construiu na forma ilustrada na figura a seguir (veja as relações).

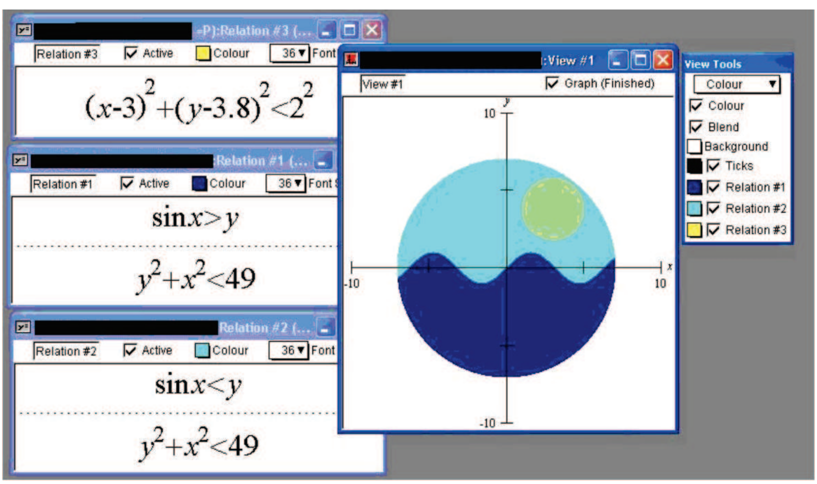


Figura 69 – Atividade 4 – Sol e mar
Fonte: Santos (2008)

Na construção do carrinho, a criatividade e o fator lúdico impulsionaram novas descobertas matemáticas. Neste momento, o estudante começou a variar expoentes na sua inequação e encontrou uma roda especial para o carro. Veja:

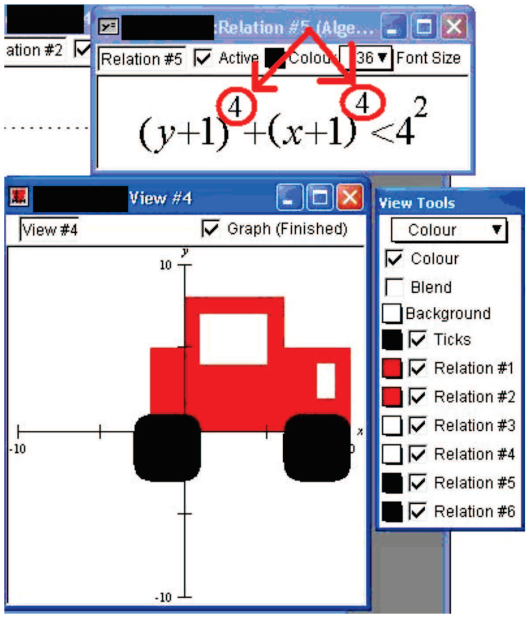


Figura 70 – Carrinho
Fonte: Santos (2008)

Esse tipo de descoberta é comum em um meio que permite manipulações dos objetos. Nesse caso, para melhorar sua construção, DAG encontrou a inequação de outra região no plano, que lembra um disco achatado. Questionado sobre a atividade mais interessante, DAG respondeu o seguinte:

> O fato mais interessante nas atividades era como o gráfico mudava com as mudanças na fórmula como mudando um negativo para positivo, um quadrado para cúbico. A atividade que mais me interessou foi aquela de criar o mar com o sol, porque isso demonstrou, com as ondas, como uma pessoa pode usar ou construir essas fórmulas de tal jeito para ter tanto liberdade da forma ou estrutura do gráfico.(DAG, 2010).

Nessa transcrição percebemos a reflexão que DAG fez acerca das transformações obtidas nas representações geométricas, através de suas manipulações nas expressões algébricas. Isso ilustra e sugere uma percepção correta do estudante, em relação à Geometria Analítica e sua essência.

2 Estudante PAC

Para efeito da análise proposta neste artigo e como ponto alto da produção deste estudante, ilustrando a apropriação de conceitos em geometria analítica, vamos considerar a sua construção de polígonos na atividade 6, com olhar específico na construção do triângulo equilátero. Quando PAC nos chamou para dizer que o arquivo estava finalizado, foi solicitado que ele salvasse o trabalho e, em seguida, foi registrada a imagem a seguir.

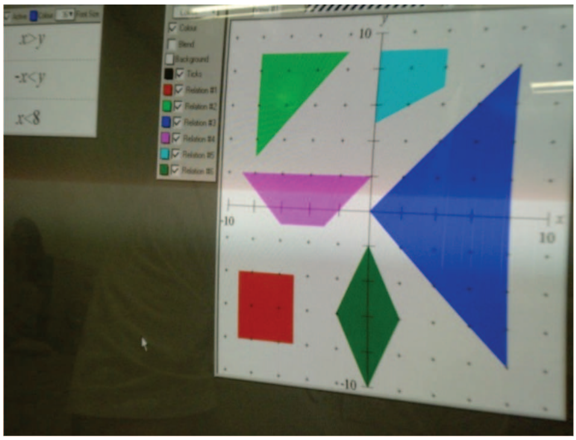


Figura 71 – Atividade 6 – arquivo salvo
Fonte: Santos (2008)

Depois disso, perguntamos a ele se o triângulo azul era realmente equilátero e ele revelou estar convencido de que não era, mas que tinha algumas ideias para uma melhor aproximação. A explicação da sua estratégia gerou um pequeno filme, cujos extratos e transcrições de fala serão vistos a seguir. Na próxima tabela, PAC aponta com a seta do *mouse* o seu triângulo (indicando como resultado de "relações de *x* com *y*") e a relação utilizada.

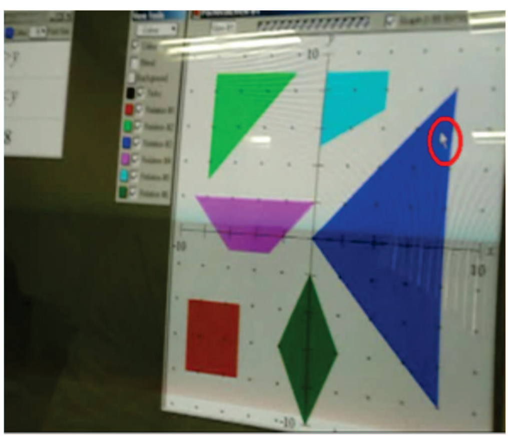


Figura 72 – Atividade 6 (imagem 1 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

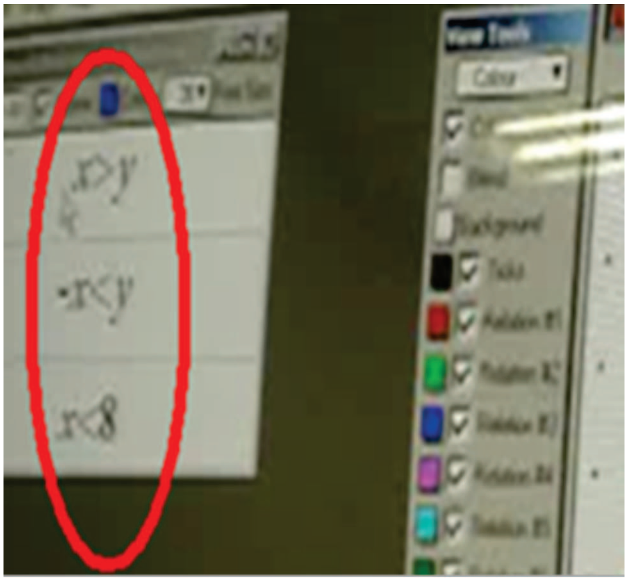


Figura 73 – Atividade 6 (imagem 2 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

Neste momento, PAC inicia uma série de variações nos coeficientes angulares das retas (que ele chama de “o número que multiplica o *x*”), como pode ser visto na próxima imagem.

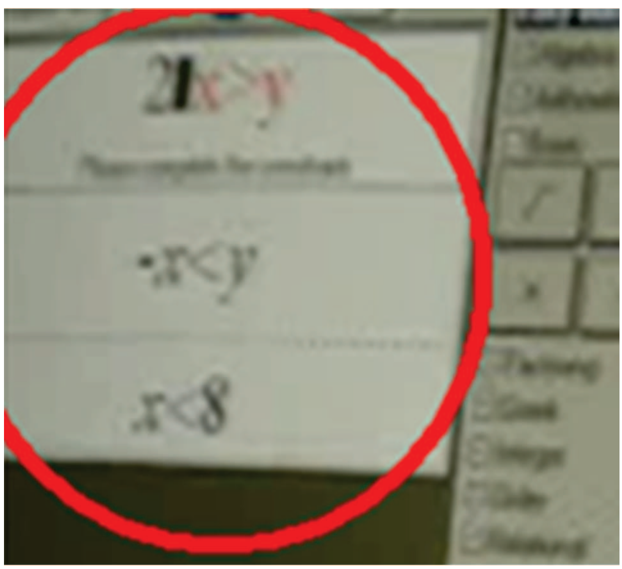


Figura 74 – Atividade 6 (imagem 3 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

Com a mudança do coeficiente angular de 1 para 2, o estudante chega à seguinte conclusão: “ele (o triângulo) aumentou!”.

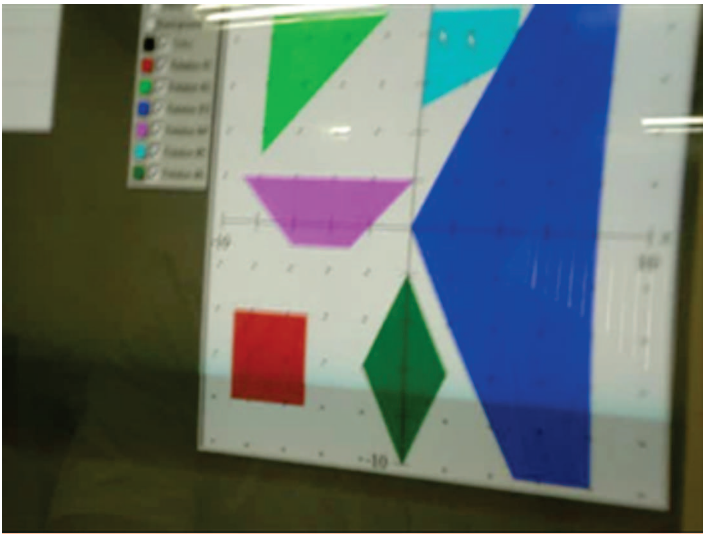


Figura 75 – Atividade 6 (imagem 4 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

Assim, PAC deduz que precisa de um coeficiente angular menor do que 1. A sua próxima tentativa, captada na imagem a seguir, é do coeficiente angular igual a ½ (0,5), obtendo o triângulo indicado na Figura 76.

Figura 76 – Atividade 6 (imagem 5 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

Com isso, pela sua estratégia de aproximação, ele utilizou 0,75 (0,5<0,75<1) e chegou ao seguinte triângulo:

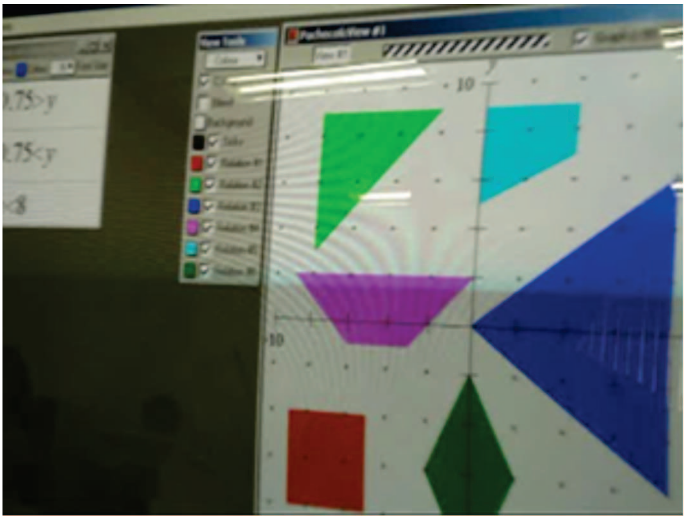


Figura 77 – Atividade 6 (imagens 6 e 7 do vídeo)
Fonte: Santos (2008)

A conclusão do estudante, nas suas próprias palavras, é a seguinte:

> Vendo pelos lados não ficou equilátero, mas se aproximou. Aí tem que descobrir qual o número que multiplica o *x* para (...) até fechar equilátero.

Notoriamente, ficou claro para PAC que existe um número real (coeficiente angular) que determinaria, na relação, uma região limitada por um triângulo equilátero. Um pouco depois disso, já encerrada a gravação, ele descobriu uma ferramenta do *software* para verificar a aproximação do seu triângulo em relação a um triângulo equilátero – essa ferramenta fornece as coordenadas e a distância entre dois pontos quaisquer do gráfico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando a produção dos estudantes ao longo das atividades, identificamos diversos aspectos de aprendizagem em Matemática. Entre eles, está a aquisição de conceitos em Geometria Analítica por parte dos alunos, manifestada no estabelecimento de relações entre conceitos tratados de forma algébrica e geométrica. Também foi perceptível, durante a coleta de dados, a constatação e/ou construção de resultados algébricos e geométricos da sua vida escolar anterior e o desenvolvimento de aptidões inerentes à Matemática. Desenvolveram-se habilidades como elaboração de estratégias para resolução de problemas, formas diferentes de visualizar uma situação-problema, alternância entre linguagens matemáticas distintas e experiência com o erro – no sentido da obtenção de resultados obtidos via aproximação. Tais habilidades, além de típicas para um estudo em Matemática, são importantes para a formação profissional, acadêmica e pessoal do estudante. Nas produções de alguns estudantes vimos, com frequência, a formação de raciocínios anteriores às ações, denotando um bom grau de abstração.

Equações de reta e de circunferência, bem como seus parâmetros, são exemplos do campo conceitual da Geometria Analítica que foram largamente discutidos pelos estudantes na realização das atividades propostas. Em meio a esses tópicos está o estudo do plano cartesiano que, cumprindo com o objetivo da proposta, faz com que os estudantes liguem a álgebra à geometria de forma sólida e com significado. Outro fator importante alcançado com a implementação da proposta foi a diferenciação entre equações e inequações, com suas respectivas equivalências no plano cartesiano. Em suma, a riqueza do estudo se deu nas reflexões dos estudantes que ora eram feitas sobre as expressões algébricas para obtenção de representações geométricas, ora se davam com o uso dessas representações para buscar inferências acerca dos parâmetros e dos padrões das igualdades e das desigualdades algébricas. Isso também resultou em um reforço, para os estudantes, do ato de comunicar-se matematicamente.

Ponderando sobre as construções de todos os estudantes envolvidos na pesquisa, identificamos a presença de duas importantes características do estudo matemático. A primeira diz respeito aos tópicos de Matemática em si, que surgiram na produção de alguns estudantes, como as cônicas e as coordenadas polares ou situações algébricas não comuns em sala de aula, como sistemas com desigualdades duplas. Por outro lado, temos o exercício de uma importante ferramenta própria da Geometria Analítica e defendida por Lima (2001) – a escolha de um sistema de eixos conveniente para a resolução de um problema geométrico. Isso se traduziu nessa proposta na medida em que os estudantes estabeleciam a origem do sistema cartesiano como centro para as suas construções (ou os eixos coordenados como eixos de simetrias). Essas ações pormenorizam as relações algébricas equivalentes e facilitam sua manipulação.

A respeito das contribuições das tecnologias digitais implementadas nessa proposta, precisamos destacar dois possíveis caminhos. Primeiramente, identificamos o desenvolvimento e as habilidades mais gerais desenvolvidas pelos estudantes como a apropriação de ferramentas potentes para o estudo, matemático ou não. O uso de correio eletrônico e a utilização da máquina para a (re)organização de ideias no processo de construção, modificando padrões de ensino-aprendizagem de conteúdos, são exemplos cada vez mais frequentes na atualidade.

Mais especificamente, a implantação do GrafEq no estudo de Geometria Analítica ampliou a percepção dos estudantes sobre os objetos algébricos, geométricos e as equivalências entre eles. De acordo com a teoria de Kaput (1992), o distanciamento existente entre as estruturas de pensamento dos sujeitos (estudantes) e os objetos de estudo (neste caso, expressões algébricas e representações gráficas) foi reduzido. Dessa forma, a utilização do *software* gráfico aumentou a capacidade de exploração dos estudantes. Isto é, a visualização quase que imediata da representação geométrica de uma expressão algébrica, com a possibilidade de modificar e verificar parâmetros nesta última, aproxima ações sobre o objeto estudado às operações mentais dos sujeitos – modificando a forma como o estudante estrutura o seu juízo sobre o problema que está à sua frente.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:* Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

D'AMBROSIO, Ubiratan; BARROS, Jorge Pedro Dalledonne de. *Computadores, Escola e Sociedade.* São Paulo: Editora Scipione, 1990.

KAPUT, James. Technology and Mathematics Education. In: GROUWS, Douglas A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Library Reference, 1992. p. 515-556.

KAPUT, James; HEGEDUS, Stephen; LESH, Richard. Technology Becoming Infrastructural in Mathematics Education. *In*: *Foundations for the Future in Mathematics Education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2007. p. 173-191.

LIMA, Elon Lages. *Análise de Textos.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. Disponível em: <http://www.ensinomedio.impa.br>. Acesso em: 30 dez. 2007.

PISA. *Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* OECD - Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico, 2006. Disponível em: <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/59/2/39732471.pdf>. Acesso em: 26 dez. 2007.

SANTOS, Ricardo de Souza. *Tecnologias Digitais na Sala de Aula para Aprendizagem de Conceitos de Geometria Analítica:* manipulações no software GrafEq. 135f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – UFRGS, Porto Alegre, 2008.

APÊNDICE – ATIVIDADES UTILIZADAS NA TESTAGEM (SANTOS, 2008)

ATIVIDADE 1

01. Construa uma reta crescente que cruze o eixo y no valor 4.

02. Crie duas retas paralelas e decrescentes.

03. Construa um segmento de reta qualquer.

04. Construa o segmento da reta $x + y - 2 = 0$ com extremidades em $x = -3$ e $x = 5$.

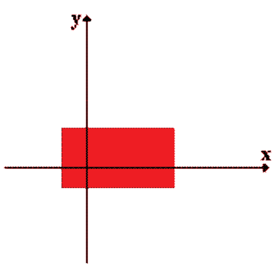
05. Construa duas retas que se intersectam no 2º quadrante.

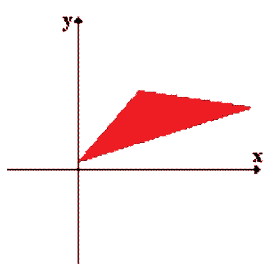
06. Determine as regiões representadas pelos seguintes sistemas de inequações e explique-as com suas palavras.

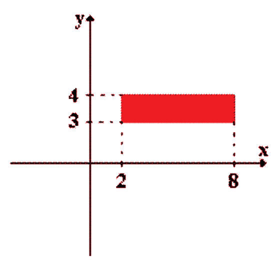
$$\begin{cases} x+y>0 \\ x-2x+6>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+1>0 \\ x-2y-2>0 \\ 2x-y-4>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-1>0 \\ x-y+3>0 \\ 2x+y-12<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-1>0 \\ -x-y+2>0 \\ 2x+2y+3>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-y>0 \\ -4x+2y>0 \\ x+y>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-1<0 \\ x-y+3<0 \\ 2x+y-12>0 \end{cases}$$

ATIVIDADE 2

01. Construa as seguintes figuras no GrafEq:

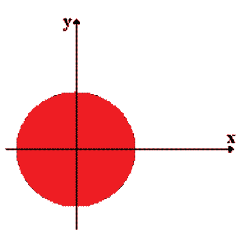


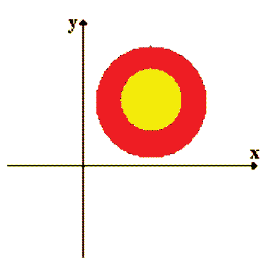


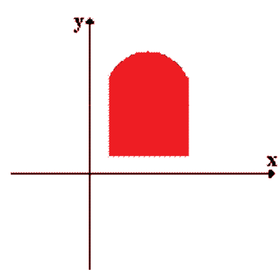


ATIVIDADE 3

01. Construa as seguintes figuras no GrafEq:

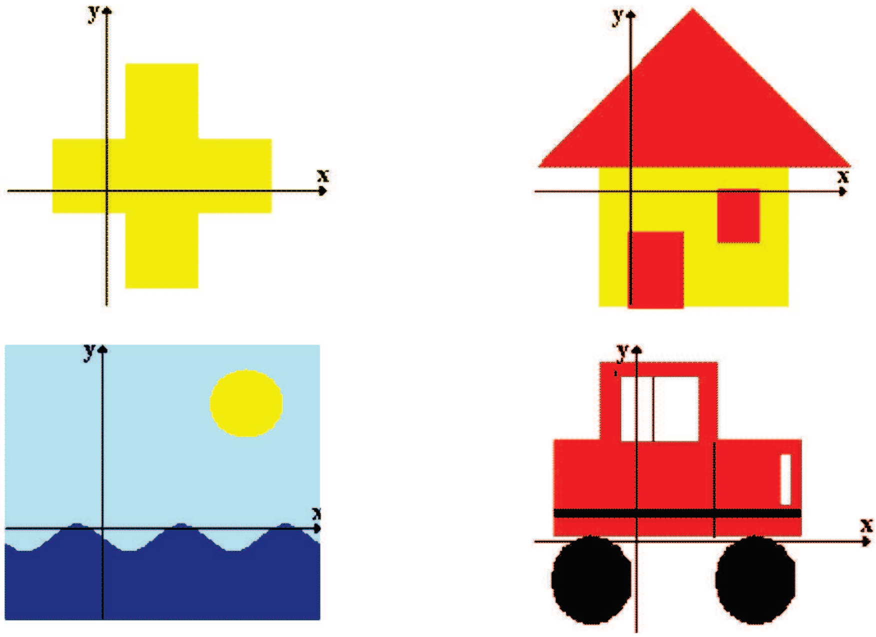






ATIVIDADE 4

01. Construa as seguintes figuras no GrafEq:



ATIVIDADE 5

01. Construa quatro discos. Um em cada quadrante.

02. Construa um disco com centro no 3º quadrante e que não possua partes de sua região no 1º quadrante, mas invada os 2º e 4º quadrantes.

03. Crie as três possibilidades de uma reta em relação a uma circunferência (reta secante, reta tangente e reta externa à circunferência.).

ATIVIDADE 6

01. Construa:

a) um quadrado	b) um triângulo retângulo	c) um triângulo equilátero
d) um trapézio	e) um trapézio retângulo	f) losango

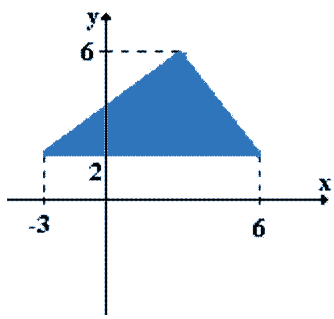
ATIVIDADE 7

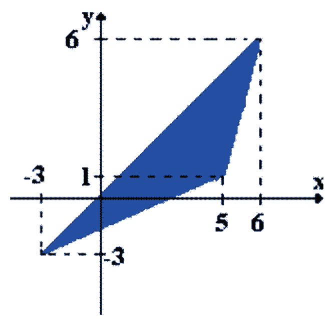
01. Realize uma construção no GrafEq com um mínimo de 5 relações diferentes.

02. Escolha uma figura ou imagem (internet, livro etc.) e reproduza o mais fiel possível, no GrafEq.

ATIVIDADE 8

01. Construa as seguintes figuras no GrafEq:





ATIVIDADE 9

01. Arte abstrata. Escolha um quadro de arte abstrata (pode-se pesquisar na internet) e reproduza-o no GrafEq.

GEOMETRIA ANALÍTICA COM O *SOFTWARE* GRAFEQ

Juliana Bender Goulart
Maria Alice Gravina

INTRODUÇÃO

Muitas pessoas encontram dificuldades no estudo da Matemática e, consequentemente, não gostam dessa ciência. Acreditamos que uma das causas dessas dificuldades é a maneira como a Matemática é apresentada aos estudantes do Ensino Fundamental e Médio – de forma desinteressante e sem maior relação com a vida prática, parecendo ser um estudo que servirá apenas para concluir uma etapa estudantil.

A Matemática é vista como complicada e parece que nela se estudam números e fórmulas que são vistos apenas na escola. Esse tipo de pensar acaba provocando uma aversão sobre o assunto. Como fazer para eliminar esse sentimento? Se utilizarmos situações que se apresentem como desafios, os alunos se sentirão mais motivados e mais curiosos em relação ao que estão estudando?

No ano de 2004 a professora Juliana[59] iniciou sua trajetória profissional no Ensino Médio Regular (primeiro e segundo anos), na qual utilizou alguns dos conhecimentos adquiridos durante sua formação docente. Em 2006 e 2007, deparou-se com turmas do terceiro ano do Ensino Médio e com a tarefa de ensinar Geometria Analítica. Sentiu que os momentos de aula eram muito cansativos para todos, pois consistiam de muita exposição do professor e a participação dos educandos era bem pouca. Naquele momento, consultando alguns livros didáticos também constatou que, no geral, a Geometria Analítica é desenvolvida em contexto quase puramente algébrico, com poucas referências aos seus aspectos geométricos.

Foi com essas inquietações que, em 2007, a professora Juliana iniciou o Mestrado Profissional no Ensino de Matemática, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E foi no segundo semestre do curso, durante a disciplina "Tecnologias em Educação Matemática", que conheceu as possibilidades de uso da tecnologia

59 A professora Juliana é a primeira autora deste trabalho e realizou a sua dissertação de mestrado sob a orientação da segunda autora.

informática. Em uma das aulas dessa disciplina foi apresentado o *software* GrafEq[60], com o qual é possível trabalhar expressões analíticas e gráficos de curvas no plano cartesiano. Já nas primeiras explorações no software, foi possível perceber as possibilidades para um ensino da Geometria Analítica diferente daquele que vinha sendo desenvolvido. E foi assim que realizou uma primeira experiência com os alunos e constatou o entusiasmo com que trabalharam nas tarefas propostas que deveriam ser aplicadas com o *software* GrafEq. A visualização imediata, na tela do computador, dos gráficos e regiões correspondentes às diferentes equações, funções e relações exploradas, nas atividades, realmente fascinou os educandos.

A partir do sucesso dessa primeira experiência, iniciou-se então a elaboração de um projeto de pesquisa, tendo como objetivo responder à pergunta: "Como explorar conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio utilizando o ambiente informatizado, em particular o *software* GrafEq?"

Do processo de concepção, implementação e validação da proposta pedagógica resultou um material didático, consistindo em uma sequência de atividades que atendessem às recomendações dadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Nessa sequência de atividades, teve-se o cuidado de tratar as equações da reta e círculo como casos particulares de uma equação geral. Para isso foi construída uma fundamentação matemática[61], na qual os conjuntos de pontos $P = (x, y)$, que constituem retas, círculos, elipses, hipérboles ou parábolas, são identificados, através de deduções matemáticas, com os possíveis conjuntos-soluções da equação de grau dois em duas variáveis $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$.

A TECNOLOGIA E A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA

A pesquisa desenvolvida tomou como referência a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget , que nas palavras de Campos (2009) assim é explicitada:

> A construção do conhecimento ocorre quando acontecem ações físicas ou mentais sobre objetos que, provocando o desequilíbrio, resultam em assimilação ou, acomodação e assimilação dessas ações e, assim, em construção de esquemas ou conhecimento. Em outras palavras, uma vez que a criança não consegue assimilar o estímulo, ela tenta fazer uma acomodação e após, uma assimilação e o equilíbrio é, então, alcançado.

---

60 O GrafEq é produzido por Pedagoguery Software Inc., no Canadá, sendo os direitos do programa, de registro e ajuda do autor Greg Kochaniak. Está disponível para download no site: <http://www.peda.com/grafeq>. Acesso em: 18 ago. 2007.

61 A dissertação completa (GOULART, 2009) está disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/18805>. Acesso em: 15 ago. 2010.

No âmbito dessa teoria, o educador torna-se um incentivador, um questionador, um organizador de situações que levem o educando a refletir sobre suas ações e seus erros, a partir dos quais ajusta o seu processo de aprendizagem.

Para apontar de que forma o uso da tecnologia informática pode favorecer o processo de construção de conhecimento, especialmente no contexto da Educação Matemática, foram trazidas as reflexões de alguns autores. Segundo Ponte (*apud* BORRÕES,1986, p.1):

> O computador, pelas suas potencialidades em nível de cálculo, visualização, modelação e geração de micromundos, é o instrumento mais poderoso de que atualmente dispõem os educadores matemáticos para proporcionar experiências aos seus alunos.

E, segundo Gravina (1999), no final dos anos noventa, já era grande a oferta de recursos informáticos para processos de ensino e aprendizagem que quisessem contemplar as ações dos alunos. E a autora caracteriza estes recursos como sendo os softwares onde os alunos podem modelar, analisar simulações, fazer experimentos, conjeturar.

Os autores referidos acima (BORRÕES, 1986; GRAVINA, 1998) indicam o quanto a informática na educação favorece as ações e as experiências dos alunos. E sabe-se que um aluno motivado compromete-se com seu processo de aprendizagem e, assim, procura novos conhecimentos e desenvolve novas habilidades.

Com a introdução das tecnologias no meio educacional, é preciso repensar o ambiente escolar quanto à participação do professor e às mudanças metodológicas referentes às práticas docentes (RICHIT, 2005). Vale ressaltar que o professor não é substituído pelo computador, pois cabe a ele projetar atividades e situações que têm como objetivo a construção de determinado conhecimento. Também cabe ao professor fazer as conexões entre o conhecimento produzido pelo aluno, nas suas explorações no ambiente informatizado, com aquele conhecimento matemático institucionalizado e que é o foco de ensino.

Em consulta aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), foram encontradas recomendações para o ensino da Geometria Analítica no sentido de que a valorização da memorização de equações seja substituída pelo ensino que valoriza a investigação a explicação, a articulação entre os aspectos geométricos e algébricos. Trata-se da compreensão da Geometria Analítica como um conhecimento que cria competências para interpretar e resolver problemas. Foi procurando tirar o máximo proveito da tecnologia, no que diz respeito ao processo de aprendizagem da Matemática que valoriza os aspectos mencionados acima, que foi escolhido, para uso nesta experiência, o *software* GrafEq. Esse *software* pertencente à classe dos "ambientes de exploração" (GRAVINA, 2001), o que significa ser um programa com recursos que provocam o processo que caracteriza o pensar matematicamente, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas (BRASIL, 2006).

O *software* GrafEq é um programa que explora funções e relações matemáticas, permitindo trabalhar com inequações e com famílias de funções. As possibilidades de múltiplas representações – expressões algébricas e representações gráficas – viabiliza as explorações que articulam diferentes conhecimentos. A escolha desse *software* também justifica-se pela sua facilidade de manuseio – o aluno digita na janela de "Relações" a expressão de uma função ou de uma inequação e de imediato tem no sistema de coordenadas as representações graficas. Outro fator importante na escolha do *software* foi a opção de trabalhar em intefaces com diferentes idomas – na execução de nossa pesquisa foi escolhido o idioma Espanhol, por ser mais acessível aos alunos. Na Figura 78, é possível observar a interface do *software*.

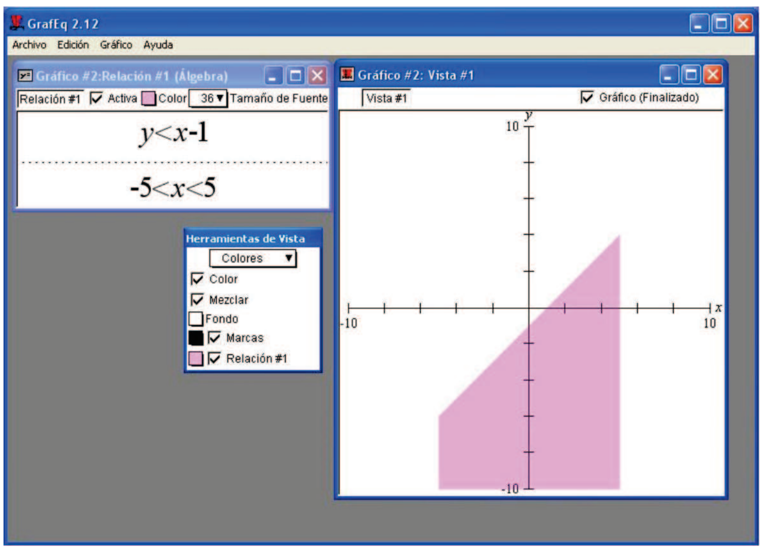


Figura 78 – Interface do *software* GrafEq
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

A possibilidade de trabalhar com desigualdades algébricas no *software* GrafEq é aspecto fundamental na nossa proposta didática. A representação gráfica do conjunto-solução de uma desigualdade algébrica produz figuras que vão dar conta do aspecto estético de uma das atividades que foi proposta aos alunos. Trata-se da construção de réplicas de obras de arte da natureza geométrica, através da linguagem matemática. Esse tipo de trabalho teve uma primeira realização no ano de 2003, com alunos de Ensino Médio, participantes da Oficina "Matemática e Arte"[62], ofertada no âmbito

62 Para deduzir a equação, os alunos utilizaram o teorema de Pitágoras em triângulo retângulo.

das atividades do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Na dissertação de mestrado de Diogo (2007), com proposta de ensino por meio de problemas geradores, a reprodução de obras de arte com o GrafEq é utilizada como um "problema gerador", mas sem que haja a preocupação de construção de conhecimento sistemático em Geometria Analítica.

Em Santos (2008), a dissertação de mestrado também apresenta uma proposta de ensino que faz uso do *software* GrafEq. Nessa pesquisa, os alunos utilizaram o *software* para explorar relações algébricas e efeitos geométricos, e a análise do autor indica que os conteúdos explorados foram a equação da reta e a do círculo.

A CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA

Esta pesquisa foi norteada pela questão formulada na Introdução e, agora, será apresentada de forma mais precisa:

a) Usando um meio informatizado é possível trabalhar, com alunos que estão cursando o Ensino Médio, a resolução da equação $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$, de modo que entendam que retas, círculos, elipses, hipérboles e parábolas são soluções possíveis desta equação?
b) Em um meio informatizado, momentos de trabalho que contemplam a exploração empírica – no caso, a observação de relações entre mudanças de parâmetros nas equações e efeitos gráficos – podem contribuir para a construção de conhecimento em Geometria Analítica?

Para responder a essas indagações tomou-se a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Segundo Douady (1995), a Engenharia Didática designa uma sequência de ensino concebida, organizada e articulada no tempo, de maneira coerente, por um "professor-engenheiro", com a finalidade de realizar um projeto de aprendizagem para um determinado grupo de alunos. Ainda segundo essa autora, a Engenharia Didática é um produto resultante de uma **análise *a priori*** e um processo em que o professor aplica o produto projetado, adaptando-o, mesmo ao longo da experimentação, ao seu grupo de alunos.

Através da Engenharia Didática, o professor reflete e avalia a sua ação pedagógica e, por meio dessa reflexão, ele é capaz de redirecionar o trabalho que desenvolve. O professor busca entender as dificuldades encontradas pelos alunos em sala de aula e, através delas, é capaz de refletir sobre sua ação.

A construção da proposta didática resultou em sequência de atividades para sete encontros de 90 minutos. Procurou-se desenvolver, por meio da sequência, um gradativo processo de exploração e de dedução das equações das diferentes curvas. As primeiras explorações foram feitas com o sistema de coordenadas posicionado, em relação às curvas, de forma a obterem-se as equações mais simples; em um segundo momento, consideraram as translações das curvas em relação ao sistema de coordenadas. Nas atividades foram contempladas as desigualdades no plano, a equação de reta, as condições de paralelismo e a perpendicularidade, a equação do círculo e as equações das curvas cônicas.

Em cada encontro, a exploração inicial consistiu na observação das mudanças nas representações gráficas quando alterados os parâmetros da equação em estudo. Ou seja, usando o *software* GrafEq, mesmo sem conhecer a correspondência entre as curvas e as suas equações, empiricamente os alunos fizeram observações de "causa e efeito" – por exemplo, a alteração do parâmetro b na equação foi identificada como "um movimento na reta $y = 2.x$ que mantém o paralelismo"; ou mudança no parâmetro a da equação $y = a.x^2$ com $a > 0$, foi identificado como "abrir ou fechar a curva". Após a construção desse conhecimento, de natureza empírica, foi feita, com o apoio do professor, a dedução da equação sob exploração.

Nas primeiras atividades dos encontros, os efeitos gráficos resultantes da mudança dos parâmetros de uma determinada equação estiveram sob a atenção dos alunos. E depois foram contempladas atividades no espírito "inverso" – isto é, foi apresentada aos alunos a curva, e a eles foi delegada a tarefa de identificar uma possível equação dessa curva.

Foi integrada às explorações matemáticas dos alunos uma atividade de forte apelo estético. Foi projetado para a parte final de cada encontro um trabalho voltado para a construção de réplicas de obras de arte de natureza geométrica. Foi realizado um cuidadoso trabalho de seleção de obras, no sentido de se obter a exigência de uso das relações e equações que haviam sido exploradas na primeira parte de cada encontro. Também houve a preocupação de selecionar uma obra que fosse de artista brasileiro, para valorizar nossa cultura. Obras muito simples foram escolhidas para dar início a este trabalho com "arte e matemática"; nas obras finais, os alunos trabalharam com a construção de réplicas envolvendo elipses, parábolas e hipérboles.

Nas Figuras 79, 80 e 81 foram destacadas algumas das obras escolhidas para replicação, acompanhadas de comentários sobre os conteúdos de Geometria Analítica a serem utilizados. A construção de réplicas de obras de arte, com uso do *software* GrafEq, caracterizou-se como uma atividade desafiadora de resolução de problemas. Nas explorações algébricas e nas observações dos "desenhos" produzidos na tela do computador, presenciou-se os alunos em situação de desequilíbrios/equilíbrios cognitivos, característicos do processo de construção de conhecimento.

Para reproduzir a obra de Luís Sacilotto (Figura 79), os alunos precisaram trabalhar com a equação da reta e desigualdades. As formas retangulares também estavam presentes nesta obra. Retas paralelas, mesmo não sendo objeto de estudo na primeira parte do encontro, provocativamente estavam presentes. Restrições de domínio também precisavam ser consideradas de modo a replicar as “faixas vermelhas”.

Figura 79 – Obra de Luís Sacilotto
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

A escolha da obra de Lygia Clark (Figura 80) justifica-se devido à presença de retas paralelas (no paralelogramo e em situação já não mais tão simples) e de retas perpendiculares (na parte superior à direita da obra). Na construção da réplica, restrições de domínio também precisavam ser consideradas.

Figura 80 – Obra de Lygia Clark
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

Na obra de Ruben Valentim (Figura 81), além das desigualdades que representam os retângulos e das retas a serem identificadas com os triângulos, os alunos precisavam usar a equação do círculo. Restrições nas diferentes relações devem ser consideradas, de modo a se obter o efeito triângulo e semicírculo.

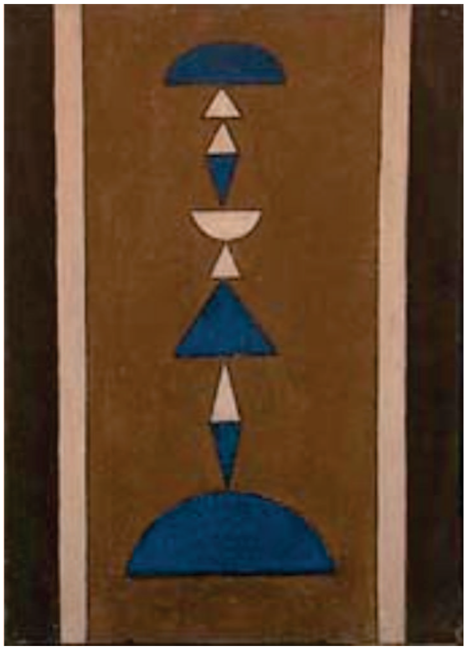


Figura 81 – Obra de Rubem Valentim
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

A EXPERIÊNCIA E OS RESULTADOS

A experiência foi realizada em uma instituição privada de ensino, situada em Novo Hamburgo, no segundo semestre de 2008. Fez-se uso do laboratório de informática da escola durante sete encontros de 90 minutos. Os alunos que participaram dessa experiência estavam cursando o terceiro ano do Ensino Médio. O material produzido por esses alunos foi a principal fonte de documentação sobre o processo de aprendizagem pretendido, e foi, ainda, um importante material em nossas **análises *a posteriori***.

Nas atividades do primeiro encontro, foi trabalhado o entendimento de sistema de coordenadas cartesianas. Iniciou-se com o "desenho", via coordenadas, de conjuntos muito simples, essencialmente faixas e retângulos com lados paralelos aos eixos do sistema de coordenadas, sendo que os alunos deveriam descrever em palavras os efeitos obtidos (Figura 82). A atividade provocou nos alunos o entendimento da relação entre conjunto de pontos e relações algébricas – esse um aspecto crucial a ser trabalhado no início da aprendizagem da Geometria Analítica.

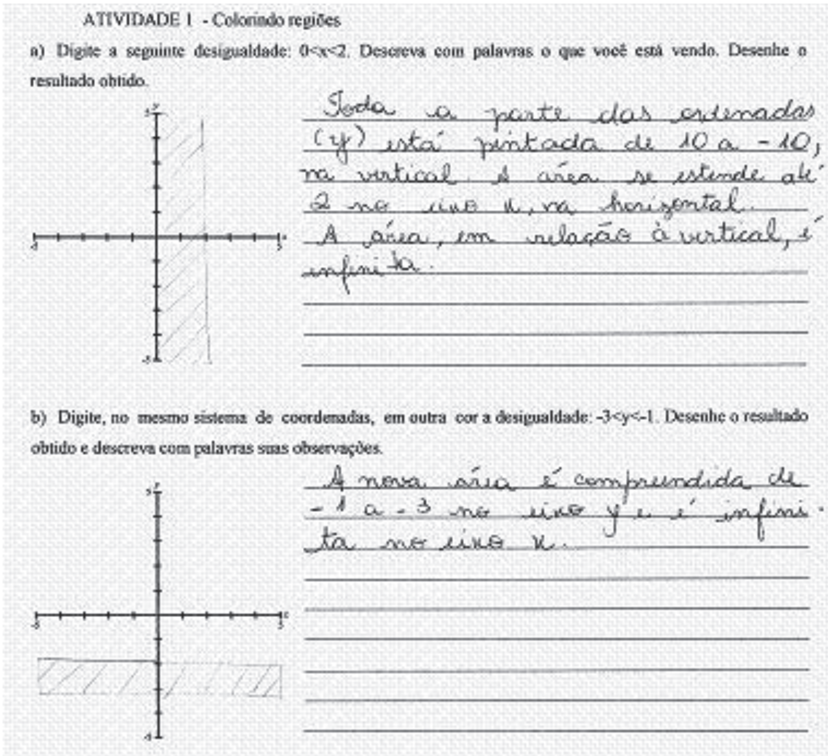


Figura 82 – Atividade 1 – Dupla IJ
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

Para a construção da réplica da obra de arte, os alunos tiveram a liberdade de escolher o posicionamento dos eixos coordenados. As Figuras 83 e 84 indicam diferentes escolhas: na primeira escolha, a réplica da obra posicionou-se no primeiro e no segundo quadrante do sistema de coordenadas; já na segunda escolha, o sistema de coordenadas tem sua origem posicionada no centro da obra que está sendo replicada.

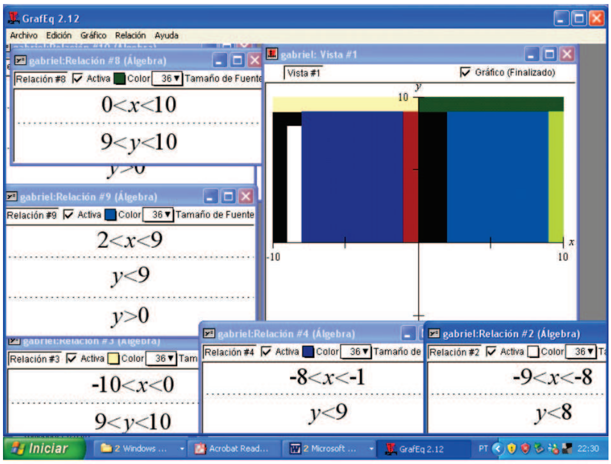


Figura 83 – Obra nos 1° e 2° quadrantes
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

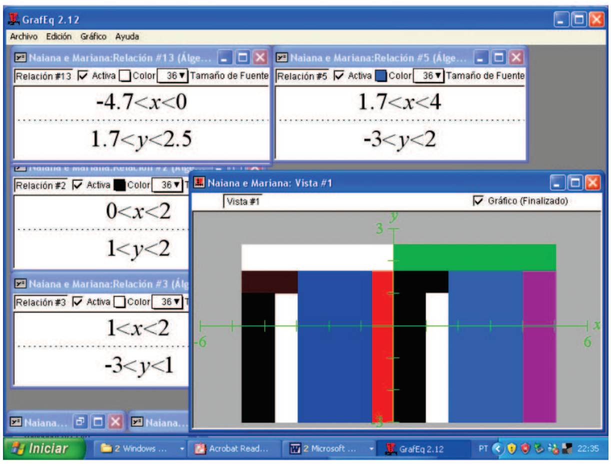


Figura 84 – Sistema de coordenadas no centro da figura
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

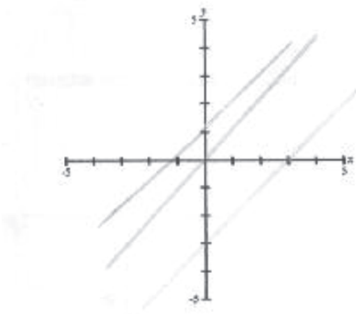
Já no estudo da reta, no segundo encontro, o propósito inicial foi trabalhar com a equação reduzida $y = a.x + b$ e com o significado geométrico dos seus coeficientes a e b. Embora os alunos tivessem dificuldades em relatar o que estavam visualizando, foi possível perceber que eles conseguiam identificar a alteração na representação gráfica da reta, decorrente de mudanças de valores de a e b. Nas Figuras 85 e 86, são apresentadas as explicações redigidas pelos alunos, as quais, de forma ainda, empírica indicam a compreensão da influência das mudanças desses coeficientes nos gráficos.

ATIVIDADE 1 – Construindo Retas

a) Em sistema de coordenadas escreva as equações:

$y = x$ $\quad$ $y = x + 1$ $\quad$ $y = x - 3.$

Faça a representação no sistema abaixo e descreva as suas observações.



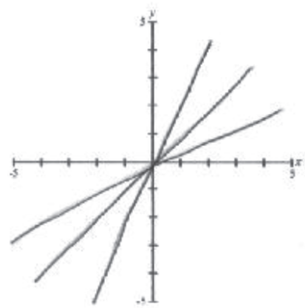
Na primeira equação o y=x. Na segun da como o y=x+1 ele aumento +1 para cima, ja na terceira o y=x-3 sendo ele diminuiu -3 para baixo.

Figura 85 – Exploração do coeficiente *b* na equação *y = a.x + b*
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

b) Em um mesmo sistema de coordenadas escreva as equações:

$y = x$ $\quad$ $y = 2x$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}x$

No sistema abaixo desenhe o que observou e escreva suas observações.



Na veta y=x, passou no meio, na veta y=2x moveu o dobro, na reta y=½x moveu a metade no eixo0.

Figura 86 – Exploração do coeficiente *a* na equação *y = a.x + b*
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

No terceiro encontro, foi explorada a condição de paralelismo e perpendicularidade entre retas, e na Figura 87 é possível observar o registro desse momento do trabalho.

Figura 87 – Alunos trabalhando na atividade de retas paralelas
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

Quanto à equação do círculo $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$, os alunos iniciaram o trabalho fazendo a dedução da equação[63], e foram então desafiados a desenhar círculos em diferentes posições e com diferentes tamanhos, conforme ilustrado na Figura 88.

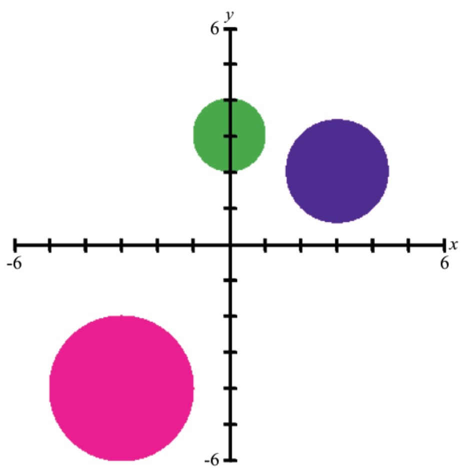


Figura 88 – Atividade sobre círculo
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

63 A produção feita pelos alunos nesta oficina está disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_gal_trabalhos.php>. Acesso em: 18 ago. 2007.

Na atividade de reproduzir círculos percebemos que os alunos apresentavam dificuldades quanto ao entendimento do significado de uma equação, isto é, em entender que quando é dada uma equação, implicitamente, está sendo feita uma referência ao conjunto de pontos cujas coordenadas atendem a certas condições algébricas. Frente às dificuldades dos alunos, foi preciso a intervenção da professora, e foi realizada uma discussão sobre como proceder para construir o círculo da figura. Uma vez entendido o significado da equação do círculo, os alunos conseguiram realizar a atividade e ficou evidenciada a importância do papel do professor como mediador.

Gradativamente, os alunos avançaram nos diferentes casos particulares da equação de grau dois em duas variáveis e, ao final da experiência, eles produziram uma figura que faz uso das equações das cônicas, cujos eixos de simetria coincidem com os eixos do sistema de coordenadas, conforme ilustra a Figura 89, que contém parábolas, elipses e hipérboles e as correspondentes relações algébricas .

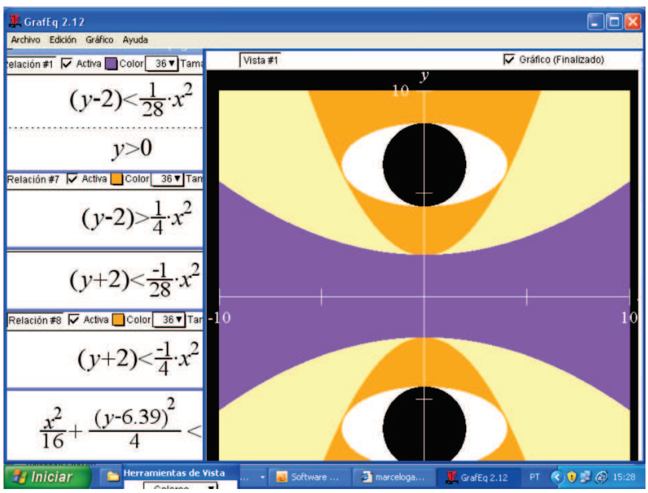


Figura 89 – Cônicas
Fonte: Dissertação de Mestrado de Juliana Bender Goulart

Vale ressaltar que os alunos não tiveram qualquer apresentação inicial, por parte do professor, sobre os conteúdos que iriam explorar no encontro no laboratório. Eles fizeram observações e tiraram conclusões sem o estudo formal dos conceitos matemáticos envolvidos. Foi após as constatações feitas pelos alunos que o professor fez a institucionalização do conhecimento, por meio da dedução das equações das curvas, a partir das suas definições dadas em termos de lugares geométricos.

Percebemos, em várias atividades, que o momento de institucionalização é de suma importância para a atribuição de significado aos conceitos observados. Os alunos chegaram a realizar conclusões empiricamente, porém a intervenção do professor se faz necessária; a tecnologia por si só (como já previsto no planejamento das atividades) não substitui o momento de exploração em sala de aula. A tecnologia serve como motivadora de novas descobertas, mas essas descobertas devem ser sistematizadas nos momentos de intervenção do professor.

As explorações empíricas feitas no GrafEq, acompanhadas de intervenções quando necessário, e os momentos de sala de aula em que institucionalizou-se o conhecimento, mostraram que os alunos que estão cursando o Ensino Médio podem entender que retas, círculos e cônicas são casos particulares de soluções de uma equação de grau dois em duas variáveis.

Ao utilizarem o *software* GrafEq, de interface atrativa e de fácil manuseio, os alunos mostraram um gradativo processo de aprendizagem, para além das retas e dos círculos presentes nos usuais programas de matemática escolar. Especialmente na construção de réplicas de obras de arte abstrata, um dos focos da sequência de atividades, os alunos mostraram entusiasmo e enfrentaram o desafio de “desenhar” figuras com equações e relações da Geometria Analítica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer da pesquisa, procurou-se desenvolver uma sequência de atividades que priorizasse a construção do conhecimento, através de inicial entendimento de natureza empírica e, depois, através das deduções das equações das retas, círculos, elipses, hipérboles e parábolas, tendo como ponto de partida as suas definições geométricas e uma conveniente escolha de sistema de coordenadas.

O desenrolar da experiência foi planejado sempre por meio de dois momentos: um momento no laboratório de informática, em que os conceitos da Geometria Analítica foram trabalhados de forma empírica; um momento na sala de aula, em que as reflexões dos alunos foram sistematizadas e aconteceram as intervenções do professor visando à dedução das equações das curvas exploradas[64].

Com a utilização do *software* GrafEq, os alunos foram provocados no planejamento de ações, na reflexão para executá-las e na validação de seus procedimentos de forma a obter os efeitos de “figuras” desejados. Na atividade de construção de réplicas de obras de arte, os recursos do *software* foram fundamentais – formas e cores resultaram do controle de equações e de relações. Sem dúvida, as representações gráficas na tela do computador são mais ricas e interessantes do que as efetuadas com giz e quadro-negro, visto que facilmente modificam-se os parâmetros e imediatamente se obtêm novos resultados geométricos.

64 Capítulo 3 da dissertação de Goulart (2009).

Os educandos passaram do estágio inicial de "ver que certas relações algébricas correspondem a certas curvas e regiões", para posteriormente "explicar porque existe esta correspondência", aí sendo necessário o importante papel do professor quanto à institucionalização dos conhecimentos produzidos na situação de exploração no *software* GrafEq. Foi assim que se trabalhou com as demonstrações de teoremas, mas sem que houvesse a explicitação destes dois termos – "teorema" e "demonstração" – que tanto assustam os alunos.

Cabe salientar que, inicialmente, os educandos esperavam que o professor conduzisse os momentos no laboratório de informática, dizendo-lhes o que fazer e como fazer. Com o avançar dos encontros, pôde-se perceber que os alunos foram se tornando mais ativos e curiosos para resolver os problemas propostos, e, assim, o momento no laboratório de informática atendeu às expectativas quanto às ações e reflexões dos alunos.

Porém é importante salientar que o simples uso da informática não garante a construção do conhecimento, pois é fundamental a elaboração de atividades que propiciem essa construção. A interação com um *software* provoca, sobretudo, as validações de natureza empíricas. É também preciso dar atenção ao papel do professor – cabe a ele promover situações que priorizem a elevação do patamar do conhecimento e, no nosso caso, essas foram as situações de discussão e dedução das diferentes equações. Verificou-se que, em alguns momentos de exploração empírica, o professor teve que intervir para que os alunos conseguissem chegar a conclusões relativas às suas observações. Assim, cabe ao professor verificar se as constatações empíricas estão correspondendo ao esperado.

Nesta investigação pretendeu-se contribuir para a produção de resultados que ilustram as possibilidades de utilização da informática na educação matemática e na melhoria da educação. A tecnologia está cada vez mais presente no nosso meio, e com ela, através desta experiência com o *software* GrafEq, obtivemos resultados que indicam que alunos cursando o Ensino Médio podem entender as curvas que correspondem às possíveis soluções da equação $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Mas, no processo de aprendizagem, além do importante uso da tecnologia, evidenciamos que é preciso estarmos sempre alerta quanto ao importante papel do professor – o papel de ser um mediador com a preocupação de colocar os alunos em novos patamares de conhecimento.

REFERÊNCIAS

BRASIL. MEC. Secretaria da Educação Básica. *PCN+:* Ensino Médio - orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BORRÕES, Manuel Luis Catela. *O Computador na Educação Matemática*. 1986. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/borrao/matematica.PDF>. Acesso em: 24 jun. 2008.

CAMPOS, Márcia de Borba. *Construtivismo*. Disponível em <http://penta.ufrgs.br/~marcia/piaget.html>. Acesso em: 10 abr. 2009.

DIOGO, Marcelio Adriano. *Problemas geradores no ensino-aprendizagem de matemática do ensino médio.* 120f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/11230>.

DOUADY, Régine. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación en conocimiento. *In*: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GÓMEZ, P. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 61-97.

GOULART, Juliana Bender. *O estudo da equação* $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ *utilizando o software Grafeq*: uma proposta para o ensino médio.160 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/18805>. Acesso em: 15 ago. 2010.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila M.C. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. *Informática na Educação*: teoria & prática, v. 1, n. 2, p. 73-88, mai. 1999.

GRAVINA, Maria Alice. *Os ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-Dedutivo.* 277 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/2545>. Acesso em: 18 ago. 2007.

PEDAGOGUERY SOFTWARE. *Grafequation 2.12*. Disponível em: <http://www.peda.com/grafeq> Acesso em: 18 ago. 2007.

RICHIT, Adriana. *Projetos em Geometria Analítica usando Software de Geometria Dinâmica:* Repensando a Formação Inicial Docente em Matemática. 202f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2005.

SANTOS, Ricardo de Souza. *Tecnologias Digitais na Sala de Aula para Aprendizagem de Conceitos de Geometria Analítica: Manipulações no Software Grafequation*. 135f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – UFRGS, Porto Alegre, 2008.

PARTE IV

NOVOS CONTEÚDOS NO ENSINO MÉDIO

GRAFOS NO ENSINO MÉDIO: UMA INSERÇÃO POSSÍVEL

Gláucia Helena Sarmento Malta
Vilmar Trevisan

1 INTRODUÇÃO

Apresentamos uma proposta de inserção de Teoria de Grafos no Ensino Médio através da Resolução de Problemas. Acreditamos que os alunos de Ensino Médio podem e devem ter contato com os problemas históricos que desencadearam a Teoria de Grafos que hoje se conhece. A proposta completa pode ser encontrada na dissertação de mestrado *Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível*, de Malta (2008). Aspectos metodológicos e conceitos de Teoria de Grafos são encontrados na dissertação, bem como uma bibliografia completa do assunto.

A proposta foi elaborada à luz da concepção que temos a respeito do ensino, dos documentos oficiais analisados, bem como das tendências atuais em Educação Matemática. Alguns fundamentos de Teoria de Grafos são apresentados nas atividades propostas. Procura-se fazer tal fundamentação resgatando os problemas históricos que desencadearam o desenvolvimento de Teoria de Grafos, e apresentar essa fundamentação de uma forma simples, com o objetivo de apoiar o estudo de professores no assunto. Pensa-se que, possivelmente, nem todas as Licenciaturas em Matemática tratem do assunto Grafos. Desta forma, oferecemos um primeiro contato com o assunto e indicamos uma bibliografia para que os estudos possam ser aprofundados.

Além da inserção de Teoria de Grafos no Ensino Médio, propomos a perspectiva metodológica que acreditamos ser a mais adequada para fazê-la.Fizemos uma pesquisa das tendências metodológicas atuais defendidas em Educação Matemática e em documentos oficiais do Ministério de Educação brasileiro e encontramos em Resolução de Problemas a alternativa que vai ao encontro do que pretendemos. Apoiamos nossa escolha em alguns pesquisadores no tema Resolução de Problemas, como Pozo (1998), Smole e Diniz (2001), Vila e Callejo (2006). Procuramos apresentar, na dissertação, diferentes perspectivas a respeito do assunto e mostrar certa evolução da concepção e das discussões sobre o assunto ao longo do século passado. Buscamos apontar grupos de pesquisa brasileiros sobre o tema. Nossa contribuição para a melhoria do ensino de Matemática está na provocação de uma reflexão dos professores a respeito do que ensinam e da forma como têm conduzido esse ensino.

2 JUSTIFICATIVA

Pensar em educação com certeza leva-nos a refletir sobre muitos aspectos. A educação no Brasil passou por transformações relativamente recentes. Hoje, o desafio não está apenas em levar todos a aprender e sim em dar sentido e significado ao que se aprende, uma vez que fora dela há uma quantidade crescente de informações, ao mesmo tempo cada vez mais atraentes ao educando, desviando a sua atenção. A escola atualmente passa pelo desafio de proporcionar reflexão e entendimento da realidade que cerca o aprendiz. Também é nessa posição de aprendiz que se encontra o professor contemporâneo. As mudanças são rápidas e percebe-se um apelo muito grande pelo novo.

De certa forma, a escola precisa manter o seu objetivo de trabalhar com o conhecimento que a humanidade foi construindo, mas ela também precisa estar atenta ao conhecimento recente e incorporar nas suas práticas a abordagem desses novos conhecimentos.

Em Matemática muito se produz, mas pouco de fato se leva para o currículo em termos de Educação Básica. A escola resiste ao novo e não é raro se ouvir que a escola é uma das instituições mais resistentes às mudanças. A forma como tradicionalmente a Matemática vem sendo trabalhada leva o educando a concebê-la como algo acabado, pronto. Pensamos que um dos grandes desafios da proposta aqui apresentada seja justamente este: levar para o currículo da escola uma Matemática recente e que seja foco de pesquisas no mundo contemporâneo.

Outro aspecto que merece destaque na proposta que apresentamos é o fato de que muito pode ser explorado em Matemática Discreta. Esse é um campo da matemática que tem se limitado ao estudo dos problemas de contagem. O estudo de grafos abre possibilidades para o rompimento por parte dos alunos de algumas crenças a respeito da matemática. Geralmente, os alunos associam a matemática aos conceitos mais algébricos.

Analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), encontramos alguns indicativos da pertinência de se trabalhar com Grafos no Ensino Médio. No primeiro documento publicado em 1998, o MEC aponta como objetivos do Ensino Médio:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de

> aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico (BRASIL, 1998, p. 6).

Há claramente a indicação de que se incluam no Ensino Médio temas que respondam às necessidades da vida contemporânea. A Escola Básica deve dar conta de temas pertinentes que contribuam para o pleno desenvolvimento do cidadão que se deseja formar. Percebemos nos últimos anos a inclusão de temas como Probabilidades e Estatística tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. A Matemática Discreta é, com certeza, um desses temas com que a Matemática da Escola Básica deve se ocupar. A complexidade da vida contemporânea deve ser entendida pelo cidadão. Uma das competências apontadas pelo mesmo documento é a contribuição da escola na formação de um cidadão crítico e reflexivo. Acreditamos que a complexidade da vida na sociedade de hoje merece ser entendida pelo cidadão nessas condições. Há um indicativo claro quanto ao tipo de aprendizagem que se pretende, ou seja, está explícito que a capacidade de aprender continuamente deve ser desenvolvida. E é nesse aspecto que defendemos o uso de uma metodologia que proporcione tal capacidade. No nosso entendimento, a resolução de problemas é uma das alternativas capazes de proporcionar essa capacidade de aprender continuamente.

Além dos indicativos explícitos do MEC, nossa atividade docente aponta a resolução de problemas como uma alternativa metodológica eficaz. Os alunos que vivenciam essa prática são alunos diferenciados. A liberdade de pensamento, a possibilidade da descoberta e o desafio que os problemas trazem deixam marcas significativas na forma de pensar desse aluno. A criatividade, a originalidade e o bom senso são visíveis. A persistência e a busca por uma estratégia adequada também podem ser observadas. As consequências de uma proposta pautada na resolução de problemas são justamente a capacidade de aprender continuamente e a flexibilidade de pensamento. A resolução de problemas não é algo novo no ensino. Polya (1995) já falava no início do século passado na "arte de resolver problemas". Seu trabalho foi fruto da sua observação como docente e foi a necessidade de instrumentalizar seus alunos que o levou a criar passos que os ajudariam a resolver problemas. Depois dele, os estudos continuaram e outros educadores deram novos significados ao que Polya se propôs a fazer. O tema é tão pertinente que no ano de 1980 o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), organização não governamental com o objetivo de discutir o ensino de matemática nos Estados Unidos e Canadá, dedicou sua publicação anual à Resolução de Problemas, segundo Smole e Diniz (2001).

No documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) encontra-se uma referência mais explícita ao tratamento da Matemática Discreta, porém sugerida como tema complementar:

> No ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: “Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando cada uma das pontes uma única vez?” Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo - no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta de condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transporte ou determinar um eficiente trajeto de coleta de lixo em uma cidade. (BRASIL, 2006, p. 94)

O presente trabalho pretende relatar e refletir sobre uma proposta desenvolvida dentro da base curricular da segunda série do Ensino Médio. O trabalho foi desenvolvido nas aulas de Matemática sem que os grupos envolvidos tivessem prejuízo no seu desenvolvimento, muito pelo contrário, podemos antecipar que houve um envolvimento significativo no desenvolvimento de tal proposta.

3 CONCEPÇÃO DA PRÁTICA

Pensamos que a capacitação do docente transcende a formação acadêmica. A prática em sala de aula leva o docente a uma constante reflexão sobre seu papel na formação do aluno. Muitas vezes, é na atividade que descobrimos muito do que de fato dá resultado nas nossas aulas. Entendemos resultado aqui como a capacidade e habilidade do aluno pensar, entender e criar matematicamente. A prática certamente deve ser combinada com a reflexão e o fazer pedagógico deve estar sempre acompanhado de reflexão e discussão com os pares. O planejamento das aulas e a reflexão sobre os sucessos e fracassos resultantes da prática são componentes essenciais para o docente. A ausência desses fatores leva a inúmeros problemas que constantemente ouvimos e presenciamos nas escolas atuais.

A prática aqui apresentada foi realizada em uma escola particular de Porto Alegre em que a professora atua desde 1990. É uma instituição que possui diversas unidades de ensino e é reconhecida pela formação diferenciada de seus egressos. A escola caracteriza-se por uma proposta de trabalho apoiada no desenvolvimento do educando de uma forma ampla e visa o desenvolvimento de habilidades sociais, motoras e cognitivas através, especialmente, de operações de pensamento baseadas em Raths (1977). Há o incentivo para que o corpo docente pense constantemente em alternativas metodológicas que contribuam para o desenvolvimento do educando segundo o que (a escola) pretende. Também se percebe uma flexibilidade com relação ao currículo. Os professores têm a oportunidade de pensar e escolher os assuntos a serem trabalhados. Projetos são apoiados e há um incentivo para que eles aconteçam. Há o entendimento do currículo como algo dinâmico e em constante movimento. A comunidade de pais apoia as iniciativas da escola. Os alunos estão familiarizados com um trabalho desafiador e aceitam com naturalidade propostas diferenciadas. Pode-se afirmar que essa escola é um meio onde há credibilidade no fazer docente. Essa credibilidade exige do professor um envolvimento e uma responsabilidade grande. A instituição proporciona ao seu corpo docente uma formação continuada.

A Matemática Discreta presente na escola, de uma forma geral, é ligada à contagem. Com a abordagem de Teoria de Grafos, abre-se a possibilidade de trabalhar com problemas mais pertinentes do ponto de vista da vida contemporânea. Pensamos ser um compromisso da escola de hoje inserir no seu currículo assuntos que estejam vinculados a produções mais recentes dentro da comunidade científica. Percebemos que a escola custa para incorporar em suas práticas assuntos novos. Aprofundando um pouco mais a análise, encontraríamos na história da escola um possível motivo. A escola, inicialmente, tinha como objeto de estudo o conhecimento institucionalizado e, porque não dizer, acabado, no sentido de pronto e reconhecido no meio acadêmico e científico. Hoje, percebemos uma produção muito intensa e rápida de informações e a escola, na maioria das vezes, não a acompanha de forma satisfatória como poderia. Não defende-se aqui que a escola deva dar conta de tudo, mas pensamos que poderia olhar um pouco para fora dos conceitos tradicionalmente ali trabalhados e eleger outros que com certeza contribuiriam para a formação de alunos mais críticos e capazes de entender o mundo que os cerca. A escolha deve ser pautada em assuntos e em abordagens que levem o aluno a **aprender a aprender** (POZO, 1998).

A prática aqui apresentada foi pensada segundo uma abordagem de resolução de problemas. Era fundamental que os alunos se deparassem com os problemas históricos que impulsionaram a construção do conhecimento que hoje tem-se de Teoria de Grafos. A intenção era a de que o trabalho ocorresse da forma mais heurística possível. A descoberta das possíveis soluções dos problemas sem que previamente fosse abordado o conceito de grafos era fundamental, no nosso entendimento. Qualquer preparação poderia interferir na criatividade dos alunos envolvidos em analisar os problemas e chegar a possíveis soluções para eles.

4 PRÁTICAS POSSÍVEIS ENVOLVENDO GRAFOS

Apresenta-se uma sugestão de prática a ser desenvolvida no Ensino Médio com os conceitos de Teoria de Grafos. As atividades foram estruturadas pensando no desenvolvimento histórico da Teoria de Grafos. Pensamos que seria importante apresentar aos alunos envolvidos na proposta os problemas históricos conhecidos em Teoria de Grafos.

4.1 A História

4.1.1 OBJETIVO

O objetivo desta atividade é uma retomada histórica do surgimento da Teoria de Grafos na matemática, bem como da sua importância nos dias atuais.

4.1.2 ATIVIDADE

Fazer uma revisão histórica abordando:

1. Matemática Discreta como um dos campos da Matemática.
2. Desenvolvimento da Matemática Discreta até a Segunda Guerra Mundial com destaque para os três problemas:
   a) Problema das Pontes de Königsberg (1736) resolvido por Leonhard Euler transformando o problema em um grafo.
   b) Caminhos hamiltonianos (1859), Sir Willian Hamilton.
   c) Problema das quatro cores (1852/1878), resolvido em 1976 com publicação em 1977.
3. Desenvolvimento da Matemática Discreta após a Segunda Guerra, início do século XX.
4. Acontecimentos e mudanças na sociedade que geraram a necessidade do desenvolvimento dessa área da Matemática: mundo industrializado, necessidade de otimização e organização de alguns processos, recursos e serviços básicos (distribuição de energia, comunicação, correios, coletas de lixo, entregas em grandes cidades, rotas, entre outros).

Após essa introdução, propor o Problema das Pontes Königsberg (1736):

Os moradores da cidade de Königsberg inquietavam-se com a possibilidade de fazer um passeio pela cidade que, partindo de algum lugar, atravessasse cada ponte exatamente uma vez e então retornasse ao ponto de partida.

O problema foi proposto a Euler e a ideia é a de que os alunos respondam se esse trajeto seria possível ou não. Para qualquer resposta deve ser dado um argumento que sustente a resposta dada.

Pede-se também que seja feita uma representação da cidade com as pontes de uma maneira sintética, mas fiel aos elementos essenciais.

Figura 90 – Pontes de Königsberg
Fonte: Malta (2008)

A ideia é a de que o grupo pense no problema e verifique se é possível solucioná-lo. Caso não seja possível solucioná-lo, o grupo deve argumentar o motivo. Estimular os alunos a criarem uma representação para o problema (modelagem).

A representação esperada é a que segue.

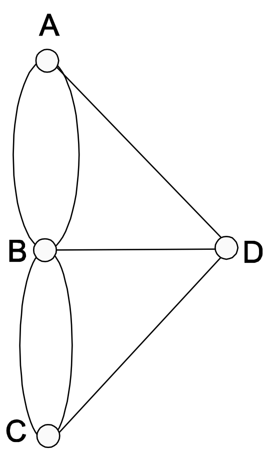


Figura 91 – Grafo representando o Problema das Pontes
Fonte: Malta (2008)

4.1.3 O RESULTADO

Havia a certeza de que os alunos chegariam a uma representação de grafos para modelar o problema das Pontes de Königsberg. Representaram o problema com detalhes e não de uma forma sintética como se esperava. Alguns alunos argumentaram que o problema estava no número total de pontes, isto é, no número de pontes que havia ao todo na cidade. A seguir pode-se observar algumas representações que apareceram.

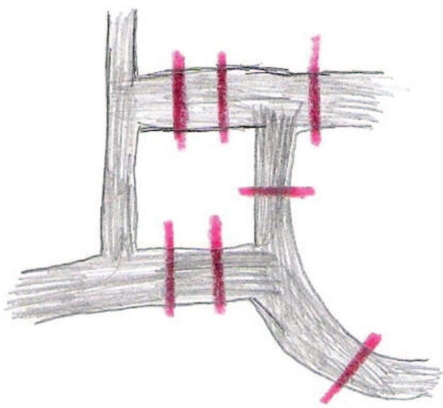


Figura 92 – Representação de aluno para o problema das pontes
Fonte: Malta (2008)

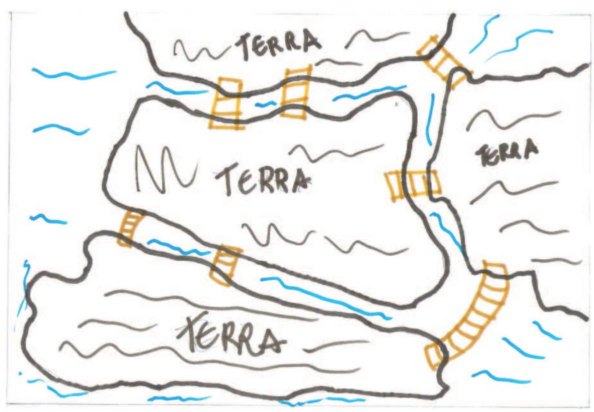


Figura 93 – Representação de aluno para o problema das pontes
Fonte: Malta (2008)

Um aluno em cada turma apresentou uma representação na forma desejada, ou seja, em que as pontes são linhas e as porções de terra são pontos (no caso da figura que segue, os círculos representam as porções de terra).

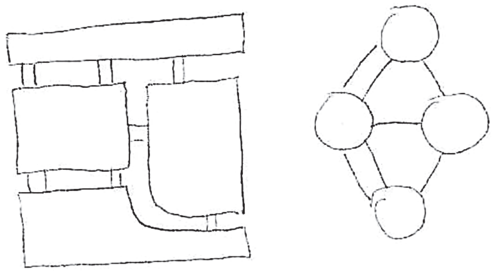


Figura 94 – Representação de aluno para o problema das pontes
Fonte: Malta (2008)

Apareceram representações ricas em detalhes, como as que seguem.

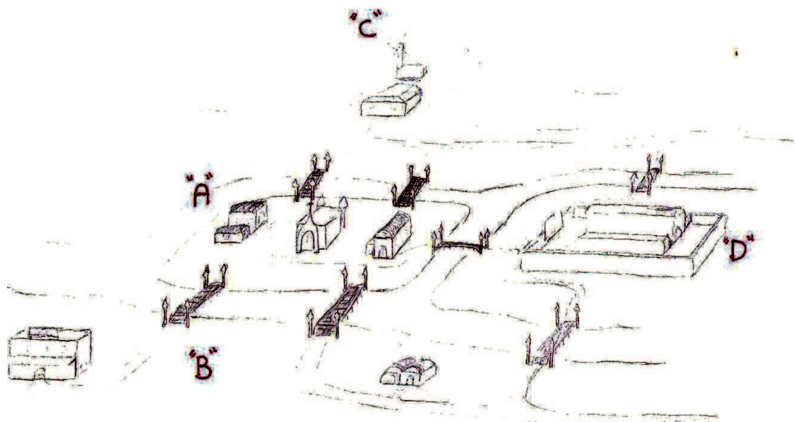


Figura 95 – Representação de aluno para o problema das pontes
Fonte: Malta (2008)

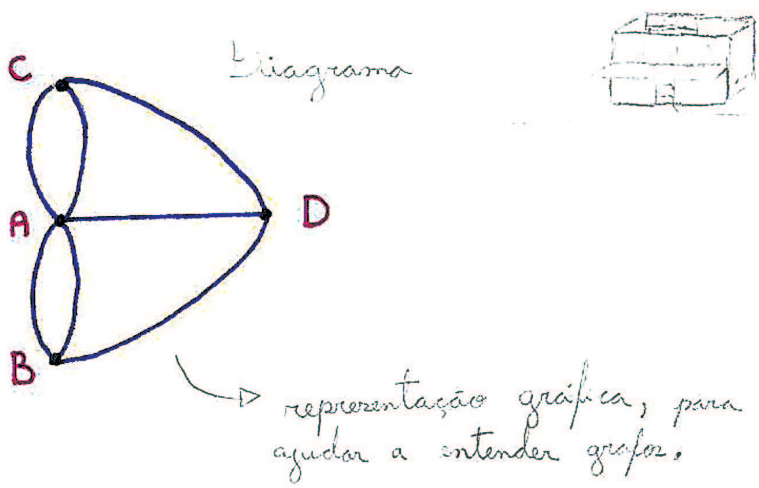


Figura 96 – Representação de aluno para o problema das pontes
Fonte: Malta (2008)

Fica evidente que os alunos não perceberam a necessidade de uma representação mais abstrata. Não perceberam que o essencial do problema era um ponto e uma aresta sinalizando uma ligação. Não entenderam a necessidade de uma representação compacta para generalizar problemas e nem perceberam a riqueza da modelagem ponto-aresta como uma ferramenta aplicável em muitas outras situações.

4.2 Os Caminhos Eulerianos

4.2.1 OBJETIVO

As atividades têm por objetivos explorar atividades de desenhar figuras sem tirar o lápis do papel e de generalizar a situação, estabelecendo uma condição para que figuras possam ser desenhadas dessa forma.

4.2.2 ATIVIDADES

Atividade 1:

Encontre um caminho que percorra todos os pontos da figura sem tirar o lápis do papel, desenhando a figura sem repetir segmentos. Regra: somente pode ir de bolinha para bolinha.

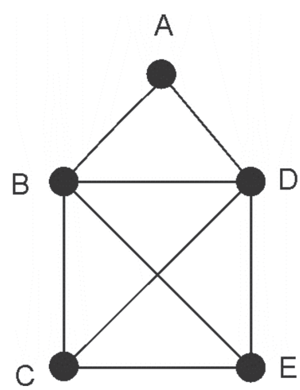


Figura 97 – Encontre o caminho sem tirar o lápis do papel
Fonte: Malta (2008)

1. *Qual o caminho encontrado?*
2. *É possível começar por qualquer ponto da figura?*
3. *Por quê?*
4. *Discuta, no grupo, possíveis argumentos que sustentem a sua resposta. Registre as conclusões do grupo.*

Atividade 2:

Observe as figuras que seguem e conclua se é possível encontrar um caminho passando por todos os pontos sem tirar o lápis do papel.

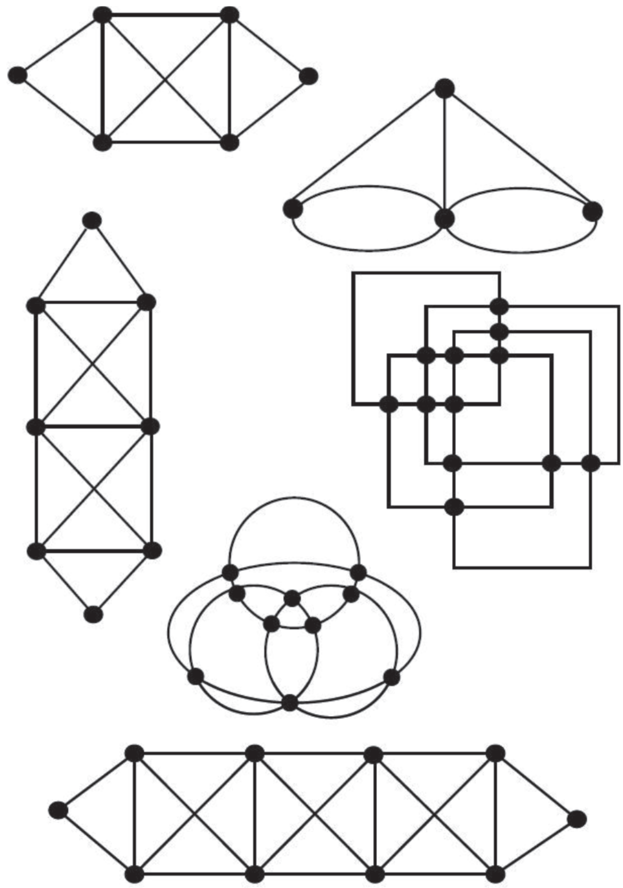


Figura 98 – É possível desenhar sem tirar o lápis do papel?
Fonte: Malta (2008)

4.2.3 O RESULTADO

Nas duas atividades, esperava-se que os alunos chegassem à condição para que as figuras pudessem ser desenhadas sem tirar o lápis do papel, ou seja, que dissessem que isso apenas seria possível se em cada ponto chegasse um número par de linhas ou, que houvesse apenas dois pontos em cada figura nos quais chegassem um número ímpar de linhas (um seria o ponto inicial e o outro seria o ponto final do desenho). Quanto à proposta de desenhar as figuras sem tirar o lápis do papel, as reações dos dois grupos foram bem interessantes. A segunda turma envolveu-se com a situação e preocupou-se em chegar à condição de poder ou não desenhar. Visto que a primeira turma foi bastante concreta e buscou achar um caminho para desenhar **todas** as figuras apresentadas na proposta, foram feitas algumas tentativas que os levassem à generalização, mas não houve jeito. Naquele momento, o interesse do grupo era o passatempo e não a matemática. Houve um sentimento de frustração no final desta atividade, mas algumas hipóteses podem ser levantadas frente a essa reação. As crenças do grupo em relação à própria matemática podem ser uma das causas. Naquele momento estava sendo feita uma matemática diferente daquela com a qual eles estavam acostumados. A ideia de resolver a situação não passou do nível do passatempo.

Os alunos estavam muito mais interessados no caráter lúdico das atividades, o que, admite-se, é um importante fator motivador. É importante ressaltar que essa falta de sensibilidade dos alunos não é uma crítica à ação da professora, mas sim uma constatação de que os alunos ainda não têm um senso de abstração completamente desenvolvido.

4.3 Conceitos Importantes da Teoria de Grafos

4.3.1 OBJETIVO

As atividades têm por objetivo retomar a representação de grafos, destacando os seus elementos (vértices e arestas), definir grau dos vértices e grau de um grafo. Através da determinação do grau dos vértices de vários grafos e do grau dos grafos apresentados, chegar à generalização de que todo grafo tem grau par. Definir o que é um caminho euleriano (aberto ou fechado) e chegar à condição de existência para que um grafo tenha um caminho euleriano. No final, propor um problema e solicitar que os alunos façam um grafo para modelar a situação posta no problema.

4.3.2 ATIVIDADE

Atividade 1:

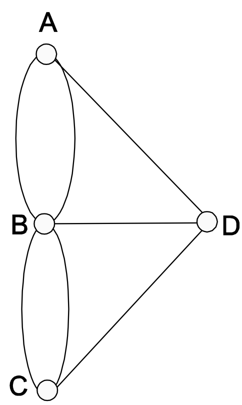


Figura 99 – Grafo representando o Problema das Pontes
Fonte: Malta (2008)

Voltando ao problema inicial das Pontes, essa maneira de representar a situação é chamada de grafo. Ou seja, um grafo é um conjunto de pontos no plano, os pontos são chamados de vértices, ligados por linhas chamadas de arestas.

A partir da retomada, definir grau de um vértice, grau de um grafo e o que são os caminhos eulerianos.

Definição 1. Chama-se de grau de um vértice o número de arestas com uma das extremidades nesse vértice. Anota-se grau de um vértice A como d(A). Caso o grafo apresente laços, o mesmo contará duas unidades.

Definição 2. Chama-se de grau de um grafo a soma dos graus dos vértices deste grafo.

Definição 3. Caminho euleriano é todo caminho que passa por todas as arestas do grafo exatamente uma vez. Um caminho euleriano é fechado quando o ponto de partida é o mesmo de chegada, ou é aberto quando o ponto de partida não coincide com o ponto de chegada.

Atividade 2:

Problema adaptado de Silveira (1987):

Em um grupo de quatro pessoas quer-se representar as possibilidades de diálogo entre elas. Observe os idiomas que cada uma delas domina:

A: inglês, espanhol, italiano e português;

B: inglês, espanhol e português;

C: inglês e espanhol; e

D: inglês.

Construa um grafo que represente as possibilidades de diálogo entre essas pessoas.

Atividade 3:

Para cada grafo representado a seguir, determine o grau de cada vértice e o grau de cada grafo.

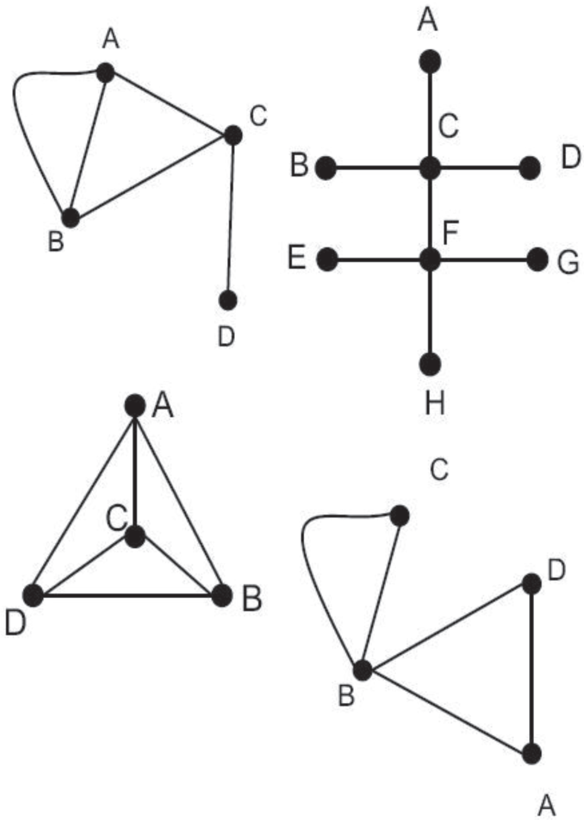


Figura 100 – Determine o grau dos grafos e dos vértices dados.
Fonte: Malta (2008)

Observando os graus de cada grafo apresentado, seria possível para fazer alguma generalização? Discuta com o colega e tente fazê-la.

4.3.3 O RESULTADO

Os dois grupos conseguiram chegar à conclusão de que o grau de um grafo é sempre um número par. Também argumentaram o porquê. Conseguiram ver também que o grau de um grafo é sempre o dobro do número de arestas de tal grafo. Os grupos fizeram a representação do problema proposto no final da aula da forma esperada. As pessoas estavam representadas pelos vértices e as arestas representavam o idioma. Foi interessante observar que muitos alunos somente colocaram uma aresta entre os pontos estabelecendo assim a possibilidade de diálogo. Mas muitos representam cada língua como uma aresta.

Dada a definição de caminhos eulerianos, foi possível voltar à discussão do problema das pontes e do desenho sem tirar o lápis do papel. Concluíram que para que haja caminho euleriano fechado é preciso que todos os vértices do grafo tenham grau par e para que haja caminho euleriano aberto o grafo deve ter apenas dois vértices com grau ímpar (o vértice de partida e o vértice de chegada).

4.4 Grafos e Representação Matricial

4.4.1 OBJETIVO

As atividades que se sugere têm por objetivo o uso de matrizes no estudo de grafos. E de destacar a necessidade de representar um grafo de uma maneira que possa ser tratada ou processada no computador. Apesar de se poder associar uma matriz de incidência ou uma matriz de adjacência a um grafo (além de outras matrizes), sugerimos trabalhar apenas com a matriz de adjacência. As atividades propostas incluem uma linguagem bem específica de uma forma intencional. Os alunos devem se deparar com definições e teoremas e buscar o entendimento das informações ali postas. Julgamos que, neste momento, se faz necessário o aparecimento da linguagem. As atividades buscam a representação nos dois sentidos: dado um grafo, determinar a matriz de adjacência e, dada a matriz, determinar o grafo a ela associado. O ponto alto desta aula é o teorema que relaciona o número de caminhos entre dois vértices com a potência da matriz de adjacência de tal grafo. Espera-se que os alunos compreendam a importância da matriz de adjacência e a sua importante aplicação.

4.4.1 ATIVIDADES

Atividade 1:

Matriz de adjacência

***Definição**: Seja G um grafo com vértices ordenados $v_1, v_2, v_3, \ldots$ A matriz de adjacência de G, $A = (a_{ij})$ onde a_{ij} é o número de arestas de v_i até v_j .*

1. Determine a matriz de adjacência de cada grafo representado a seguir:

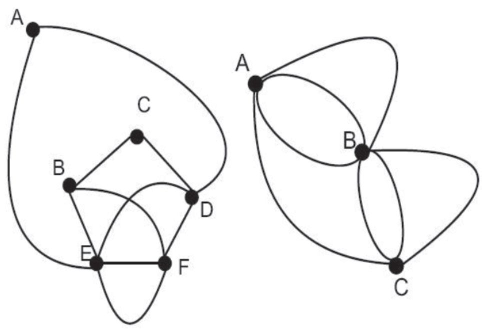


Figura 101 – Qual é a matriz de adjacência de cada grafo?
Fonte: Malta (2008)

2. Para cada matriz de adjacência dada a seguir, determine o seu grafo correspondente: (As matrizes eram simétricas, quadradas, com entradas não negativas como esta):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Um passeio em um grafo é qualquer caminho ligando dois vértices quaisquer, podendo repetir arestas. O comprimento de um passeio é o número de arestas percorridas pelo passeio. Analisando o segundo grafo da atividade 1, determine quantos passeios de comprimento 2 tem-se de A até C.

4. Teorema: Se G é um grafo com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e A é a matriz de adjacência de G, então para cada inteiro positivo n, o elemento a_{ij} da matriz A^n representa o número de passeios de comprimento n de v_i até v_j.

Faça a verificação deste teorema no segundo grafo da atividade 1 e no item (c) da atividade 2 para n = 2 e n = 3.

4.4.2 O RESULTADO

Essa atividade apresentou um resultado interessante. Os alunos ficaram surpresos com o fato de poderem saber o número de caminhos através da potência da matriz de adjacência. Um aluno não ficou convencido do resultado e contou os caminhos no grafo. Mais uma evidência de que, em certos momentos, eles precisam da comprovação concreta dos teoremas. No fundo, questionam algumas generalizações que lhes são apresentadas. O teorema anterior não foi demonstrado e, na situação dada, havia a possibilidade de contar para verificar.

4.5.1 OBJETIVO

O objetivo desta atividade é trabalhar com o Problema do Caixeiro-Viajante.

4.5.2 ATIVIDADE

Problema do caixeiro-viajante

Um caixeiro-viajante trabalha com quatro cidades conhecidas e quer descobrir o menor caminho que lhe permita visitar cada cidade exatamente uma vez e então voltar à cidade de partida. Sabe-se que as distâncias entre as cidades são dadas pela tabela a seguir, em quilômetros.

Tabela 12 – Distância entre as cidades, em Km

	A	B	C	D
A	0	100	120	150
B	100	0	200	180
C	120	200	0	110
D	150	180	110	0

Fonte: Malta (2008)

(a) Faça uma representação na forma de um grafo para a situação colocada.

(b) Encontre tal caminho sabendo que o caixeiro inicia seu trajeto no ponto A.

4.5.3 O RESULTADO

Os alunos representaram o problema através de um grafo e chegaram ao menor caminho somando as distâncias entre as cidades e decidindo pelo menor caminho. Perceberam a dificuldade desse problema à medida que aumenta o número de cidades envolvidas. Seguem algumas das representações que eles fizeram.

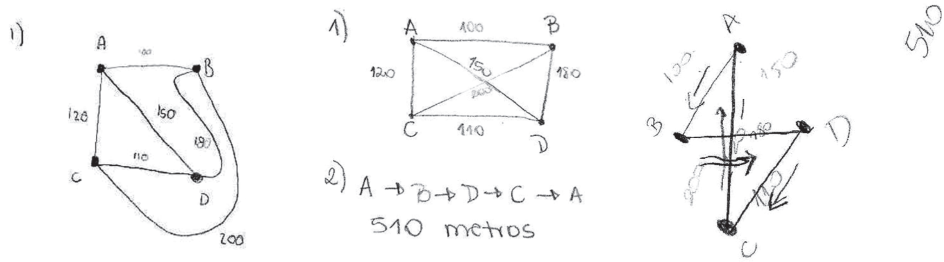


Figura 102 – Representações dos alunos para o problema do caixeiro-viajante
Fonte: Malta (2008)

4.6 Coloração

4.6.1 OBJETIVO

O objetivo destas atividades é o trabalho com Coloração de Mapas e suas aplicações em problemas contemporâneos (horário, por exemplo).

4.6.2 ATIVIDADE

1. Propor inicialmente uma atividade de colorir figuras com o menor número de cores possíveis, respeitando a condição de que regiões com fronteiras comuns não podem ter a mesma cor. Se uma região só tiver em comum com outra um ponto, elas podem ter a mesma cor. A partir dessa atividade, enunciar o Teorema das Quatro Cores e fazer uma pequena retomada histórica do problema como segue:

2. Todo mapa gera um grafo planar e, reciprocamente, todo grafo planar gera um mapa.

"Assim, o teorema das quatro cores pode ser enunciado na teoria de grafos da seguinte maneira: todo grafo planar pode ser colorido com quatro cores."

A relação que coloração de mapas tem com grafos é bastante forte. Usa-se a mesma representação do problema das pontes de Königsberg, atribuindo aos países os vértices de um grafo e as arestas representando fronteiras comuns, é possível transformar qualquer mapa em um grafo planar. Colorir um grafo significa dar cores aos seus vértices de tal forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Também pretende-se que as figuras sejam transformadas em grafos. Nesse momento dar a definição de grafo planar. Sugere-se que seja feita uma retomada histórica do problema de coloração de mapas.

O problema de coloração de mapas é um antigo e importante problema que foi um dos primeiros estímulos para o desenvolvimento da teoria de grafos. Anunciou-se que um mapa pode ser colorido com quatro cores. Por mais de 100 anos, a ideia de que qualquer mapa poderia ser colorido com quatro cores ou menos cores foi uma conjectura. Apesar do trabalho de algumas das

2melhores mentes matemáticas do mundo, essa conjectura das quatro cores não era provada nem refutada, e o problema das quatro cores continuava sem solução. Finalmente, em 1977, a conjectura das quatro cores foi provada. A prova original do teorema das quatro cores envolveu o uso de computadores de alta velocidade para checar com certeza casos difíceis e envolveu cerca de 1.200 horas de tempo de uso dos computadores (ou tempo computacional). Uma das mais importantes intervenções no tratamento do problema de coloração de mapas e k-colorações de mapas foi a transferência do problema da coloração de mapas para um problema equivalente, mas um tanto mais tratável.

3. A proposta é partir dos problemas históricos, mas também trazer à discussão problemas contemporâneos que lançam mão da teoria de grafos no seu tratamento. Sugere-se a proposta de um problema afim à coloração: o problema de planejamento de horários.

É necessário fazer uma programação (planejamento) dos encontros semanais de algumas comissões do governo estadual eleito recentemente. Para fazer tal programação (planejamento), é preciso ter cuidado para não programar encontros em um mesmo dia de comissões que têm membros em comum.

Supõe-se que os encontros devam ocorrer nas terças, quartas e quintas-feiras pela manhã. A tabela a seguir representa um resumo das comissões que têm membros em comum.

Tabela 13 – Comissões

	Finanças	Educação	Meio Ambiente	Saúde	Transporte	Segurança
Finanças	0	0	0	0	0	1
Educação	0	0	1	1	0	1
Meio Ambiente	0	1	0	1	0	0
Saúde	0	1	1	0	1	1
Transporte	0	0	0	1	0	1
Segurança	1	1	0	1	1	0

Fonte: Malta (2008)

Observação: a entrada da tabela é 1 quando as comissões i e j têm membros em comum, e 0 caso não tenham membro em comum. Construa um grafo que represente as informações da tabela. Sugestão: represente as comissões por vértices e as arestas indicando que determinadas comissões têm membros em comum. Encontre uma solução para o problema. Será que ela é única?

4.6.3 O RESULTADO

Nesta aula cabe destacar duas situações interessantes. A primeira refere-se ao problema do estabelecimento dos dias das reuniões. A solução foi dada sem que um grafo tenha sido gerado para colorir, conforme sugerido. A seguir temos a solução dada por um aluno sem o uso de um grafo.

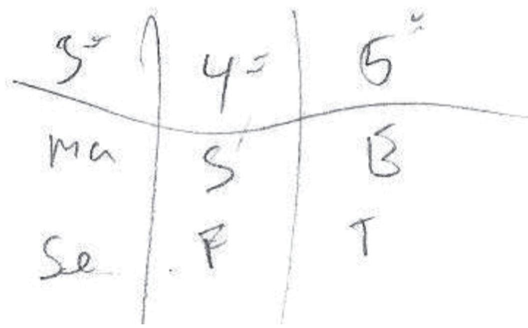


Figura 103 – Solução de aluno para o problema das comissões
Fonte: Malta (2008)

A segunda situação interessante foi relativa à coloração de mapas, já que muitos partiram para a construção de mapas que não pudessem ser coloridos com quatro cores. A cada mapa que produziam, colocavam no quadro e submetiam aos colegas a coloração. Como ficou demonstrado e aceito o Teorema das Quatro Cores, em todos os casos foi possível colorir com, no máximo, quatro cores.

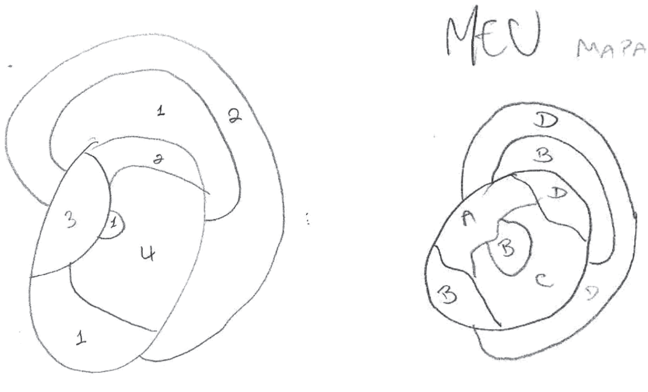


Figura 104 – Mapas construídos pelos alunos
Fonte: Malta (2008)

As atitudes descritas evidenciam o quanto os alunos agem no sentido de buscar a verificação concreta dos resultados matemáticos consistentes e aceitos, no caso até mesmo os demonstrados.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo inicial de tratar o assunto Grafos partindo dos problemas históricos foi possível e de fácil compreensão por parte dos grupos envolvidos. As atividades foram pensadas com muito cuidado e houve uma preocupação em usar a linguagem matemática relativa a tal teoria.

O uso de problemas históricos foi acertado e, em Vila e Callejo (2006), tem-se a questão das crenças. Os autores apontam que a possibilidade de trabalhar com os problemas históricos pode gerar a ruptura de algumas dessas crenças. Tais problemas mostram como o avanço da matemática, às vezes, é lento e que as teorias podem nascer em contextos puramente especulativos e desenvolver ramos que se aplicam a diversos campos. Eles destacam que esses dados ajudam os alunos a mudar certas crenças sobre as origens das teorias matemáticas e seus avanços.

A escolha pela Teoria de Grafos, em uma perspectiva de resolução de problemas, foi coerente com a intenção. A sensibilidade na implementação do projeto foi extremamente importante e as discussões, depois de cada encontro e reflexões a partir das percepções, contribuíram para o sucesso do projeto.

Resolução de problemas é de fato uma escolha acertada para o ensino de Matemática. Acreditamos que ela vai além de um **conjunto de estratégias,** como destaca Polya (1995). Nessa concepção, a resolução de problemas é uma **perspectiva metodológica** como se vê em Smole e Diniz (2001); é um complexo sistema em que ao mesmo tempo é **estratégia, conceito e objetivo**; é uma concepção de trabalho que vai além da Matemática envolvida. Como educadores precisamos buscar possibilidades que contribuam para que a aprendizagem aconteça, não apenas o ensino. Concordamos com Becker (2001), quando destaca a necessidade da pedagogia atual propor uma metodologia que leve o aluno a pensar **como** os matemáticos pensaram. Precisa-se buscar alternativas de trabalho que gerem reflexão e capacidade de aprender continuamente. O professor precisa ocupar uma posição de **provocador**, mas precisa estar atento ao desenvolvimento do seu aluno, pois ele precisa ser olhado, acompanhado no seu desenvolvimento. É nesta dinâmica de **provocar e acolher** que o sujeito constrói o seu conhecimento. Os limites entre o possível conhecido e a novidade desafiadora são muitas vezes tênues. Sabe-se que o que é exercício para uns é problema para outros. Cabe ao professor, em um ambiente coletivo, dar conta de todas essas demandas, mas a **sensibilidade** e o **planejamento** são condições essenciais no fazer docente que colaboram para a superação dos possíveis obstáculos.

Espera-se que a proposta aqui apresentada sensibilize professores de Matemática em diversos sentidos:

1. Que possam enxergar a possibilidade de incluir grafos no Ensino Médio como algo importante e pertinente.
2. Que se sintam desafiados a buscar alternativas no seu fazer pedagógico, tanto do ponto de vista conceitual quanto metodológico.
3. Que vejam a pesquisa de forma que seja uma das suas atribuições como educadores em um mundo contemporâneo.
4. Que revejam suas crenças e sejam capazes de buscar elementos para modificá-las para que venham a melhorar sua prática docente e contribuir para a formação de um sujeito capaz de aprender a aprender.
5. Finalmente, como educadores, em especial da área de Matemática, que passem o encantamento e a beleza que essa ciência tem e que a apresentem na sua gênese, prezando pela fidelidade ao seu processo de criação.

6 REFERÊNCIAS

BECKER, Fernando. *Educação e Construção do Conhecimento*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio, v. 3. Brasília: MEC, 1998.

________ . Secretaria de Educação Básica (SEB). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, v. 2.Brasília: MEC, 2006.

LIMA, Elvira Souza. A função antropológica do ensinar. *Revista Nova Escola*, São Paulo, Editora Abril, n. 138, 2000.

MALTA, Gláucia Helena Sarmento. *Grafos no Ensino Médio – Uma Inserção Possível.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/14829>. Acesso em: 04 jul. 2011.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino e aprendizagem através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org). *Pesquisa em educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas:* um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciências, 1995.

POZO, Juan Ignácio. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

RATHS, Louis. *Ensinar a Pensar*: Teoria e Aplicação. São Paulo: Editora Pedagógica Universitária, 1977.

SILVEIRA, José. Uma introdução à Matemática Discreta. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA COMPUTACIONAL, X, Gramado, 1987. *Anais...* 1987.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. *Ler, escrever e resolver problemas:* habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

VILA, Antoni; CALLEJO, Maria Luz. *Matemática para aprender a pensar*. Porto Alegre: Artmed, 2006.

MATRIZES, TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E FRACTAIS

Vandoir Stormowski

1 APRESENTANDO

Como é o bom professor? A resposta não é imediata, e a questão envolve tantos fatores e tantas concepções que não pretendemos e nem poderíamos respondê-la. Porém, consideramos que muitas das respostas possíveis envolveriam características como a de ser um profissional que reflete criticamente sobre a sua prática, sempre tentando aperfeiçoar seu trabalho diário, buscando alternativas para melhorar o processo de ensinar e de aprender.

Contribuindo para as reflexões desses professores, propomos a leitura deste relato, que apresenta o processo de elaboração e reflexão sobre uma sequência didática[65] para o estudo de matrizes, a partir da análise de transformações geométricas.

Um dos objetivos da proposta é tentar responder a perguntas comuns de nossos alunos: por que na soma de matrizes operamos termo a termo, e na multiplicação "multiplicamos linhas por colunas"? Por que a multiplicação de matrizes nem sempre é comutativa?

A sequência didática planejada pretende propiciar ao aluno um estudo que justifique as definições das operações entre matrizes e suas respectivas propriedades, a partir da observação e análise de algumas transformações geométricas, de modo a se refazer o processo histórico da definição e obtenção desses conceitos. Além disso, apresenta algumas atividades de aplicação de matrizes, em que a composição e a iteração de transformações geométricas no *software* Shapari geram algumas figuras fractais[66]. Essas aplicações pretendem ser um contraponto das aplicações "artificiais" e desnecessárias que encontramos em muitos livros didáticos.

Além desses objetivos, a proposta pretende integrar temas de estudo que muitas vezes são tratados de forma linear e compartimentada[67] em nossas escolas. As matrizes

65 Chamamos de **sequência didática** uma sequência de atividades planejadas para a sala de aula que estejam encadeadas ou relacionadas entre si, por meio de um foco comum.

66 Este texto é baseado na Dissertação *Estudando Matrizes a partir de transformações geométricas* que desenvolvemos sob orientação do professor Eduardo Henrique de Mattos Brietzke.

67 Estamos chamando de linear e compartimentado, o estudo em que os assuntos são abordados isoladamente, um após o outro, sem que se estabeleça uma relação entre eles.

e as transformações geométricas são estudadas ao mesmo tempo, integrando álgebra e geometria. A sequência didática pretende relacionar também outros conceitos como: fractais, progressões numéricas, infinito, áreas, dimensão.

2 COMEÇANDO

No início era o caos. Exatamente isso! Nossos estudos começaram com o objetivo de pensar e elaborar atividades sobre a Geometria Fractal e a Teoria do Caos[68] que pudessem ser implementados no âmbito escolar. Esse tema nos motivou bastante, pois se tratava de um tema com conceitos desenvolvidos recentemente e que, de modo geral, não costumam ser abordados na Educação Básica. No entanto, logo nas primeiras leituras e discussões sobre o assunto limitamos o trabalho à Geometria Fractal e aos processos iterativos, deixando o Caos para trás.

Planejando e pensando em algumas atividades a serem elaboradas, e nos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento delas, observamos que alguns desses pré-requisitos[69] eram tópicos que normalmente não são abordados no Ensino Médio, e que seu estudo seria um tema muito interessante para ser implementado em sala de aula. Decidimos pela abordagem das transformações geométricas e sua representação matricial, gerando a partir delas, algumas figuras fractais.

Nesse momento, os Fractais deixaram de ser o centro das atenções didáticas e se constituíram mais como uma aplicação, uma motivação, um chamariz ou uma curiosidade para os estudantes. Iterando composições de transformações geométricas obteremos algumas figuras fractais, mas nosso foco será o estudo de matrizes a partir de transformações geométricas.

Como matrizes e transformações geométricas costumam ser estudadas na escola? Os Parâmetros Curriculares (BRASIL, 1998)[70] por diversas vezes mencionam as transformações geométricas, dando uma grande importância para o assunto, e dedicando uma página completa para relatar a importância de sua abordagem em sala de aula[71], principalmente no estudo dos conceitos de semelhança e congruência[72].

---

68 O tema foi sugerido por Maria Alice Gravina, que é docente do Instituto de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS.

69 Transformações geométricas e sua representação matricial, por exemplo.

70 Uma análise mais completa e aprofundada das referências aos temas nos diversos documentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, em estudos de outros autores, e uma relação ampla de livros didáticos analisados, podem ser encontrados em Stormowski (2008).

71 Veja o capítulo de matemática para terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental dos Parâmetros Curriculares (BRASIL, 1998), nas páginas 65, 73, 81, 123 e 124.

72 O mesmo texto ainda destaca que essa abordagem para estudar semelhança utilizando transformações geométricas é preferível à comumente usada, em que a semelhança é definida a partir de triângulos, e outras figuras poligonais não são estudadas.

Nos livros didáticos, observamos que as edições mais recentes ampliaram as referências às transformações geométricas. No entanto, o tema não costuma ser estudado diretamente, servindo apenas de exemplo (quando muito) para o estudo do conceito de semelhança no Ensino Fundamental.

E as matrizes? O estudo de matrizes em geral é apresentado sem aplicações reais que possam justificar sua abordagem em sala de aula. Na maioria das vezes, as operações de adição e multiplicação são introduzidas de forma artificial e mecânica, sem nenhum convencimento sobre o motivo ou a origem da forma peculiar da multiplicação de matrizes.

Em grande parte dos livros didáticos, as matrizes são introduzidas via conceito de tabelas, seguidas de definições algébricas formais. As operações são definidas formalmente, acompanhadas da listagem de propriedades que costumam ser verificadas por meio de exemplos algébricos, para que o aluno possa treiná-las e memorizá-las. E as aplicações e exemplos?

Quando existem exemplos aplicados, é comum encontrarmos situações em que a multiplicação de matrizes é apresentada através da verificação da média das notas de um bimestre com pesos diferentes para cada nota, e a média do aluno é obtida como a multiplicação da matriz das notas pela matriz dos pesos. Gostaríamos de salientar que, além de não ser natural, essa abordagem complica desnecessariamente um problema simples, há muito tempo conhecido e resolvido de outra maneira pelos alunos[73].

Outro tipo de aplicação frágil e fictícia para a multiplicação está apresentado no exemplo a seguir, em que se espera que o aluno obtenha a pontuação de cada time no campeonato, multiplicando a matriz dos resultados (A) pela matriz da pontuação(B).

	Vitórias	Empates	Derrotas
Internacional	2	1	0
Cruzeiro	1	2	0
Avaí	2	0	1
Grêmio	0	1	2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

	Pontuação
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figura 105 – Multiplicação de matrizes
Fonte: O autor.

73 O processo de cálculo da média ponderada em geral é estudado na sexta série do Ensino Fundamental.

Quando os alunos utilizam multiplicação de matrizes para calcular a pontuação de seus times? Talvez apenas na escola, quando são "forçados" a isso. Observe que nenhum dos exemplos anteriores justifica a forma peculiar da multiplicação de matrizes, já que apenas tentam moldar situações que sirvam de ilustração[74]. Esses exemplos propostos são frágeis e artificiais, pois propõem situações de uso da multiplicação em problemas que permitem abordagem mais óbvia e simples sem o uso de matrizes.

Todavia, como poderíamos justificar essas operações? Por que na soma de matrizes operamos termo a termo, e na multiplicação "multiplicamos linhas por colunas"? Qual a origem dessa forma estranha de multiplicarmos matrizes? Segundo Eves (2004), a origem histórica da multiplicação de matrizes está na composição das transformações geométricas.

Nesse sentido, a sequência didática proposta pretende resgatar este aspecto histórico, de modo que possamos justificar a maneira de multiplicarmos matrizes e que evidenciem as propriedades de comutatividade (ou não comutatividade) dessas operações matriciais, que são percebidas facilmente na observação gráfica e geométrica.

Tal associação entre transformações e matrizes é descrita de forma bem direta nos *Standards*[75], que chegam a ponto de mostrar exemplos de atividades, e indicam que o aluno deve "[...] aprender a representar estas transformações com matrizes, explorando as propriedades das transformações usando papel gráfico e ferramentas de geometria dinâmica [...]", bem como "[...] compreender que a multiplicação de matrizes de transformações corresponde a compor as transformações representadas" (NCTM, 2000, p. 314).

Dentre os livros didáticos analisados, apenas uma obra estabelece a relação entre matrizes e transformações. No entanto, essas relações são apresentadas como leitura complementar sobre aplicações das matrizes, e não como ponto de partida para o estudo do conceito. No livro mencionado, o estudo do conceito de matriz e das respectivas operações é feito de forma semelhante às outras obras destacadas no presente texto.

Porém, o estudo de matrizes possui espaço no currículo escolar? Sabemos que o currículo escolar é repleto de escolhas. Escolhas dos próprios professores ou de

---

74 Observe que não estamos condenando este tipo de exemplo, e consideramos que eles podem continuar servindo de ilustração. No entanto, esse tipo de ilustração não consegue justificar a utilização de matrizes e sua forma peculiar de multiplicação e, portanto, precisam vir acompanhados de outras situações e exemplos que o façam.

75 *Standards* é como é conhecido o documento norte-americano Principles & Standards for School Mathematics, publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que produz orientações sobre o ensino de matemática para os Estados Unidos, semelhante aos PCNs brasileiros. Você pode acessar este documento em <http://standards.nctm.org/>. Acesso em: 27 jul. 2010.

diretrizes escolares, mesmo que não sejam escolhas conscientes por obedecerem a tradições instaladas na escola, mas de todo modo são escolhas.

É claro que, nessas escolhas que compõem um currículo, "[...] é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático [...]" (BRASIL, 1999, p. 43), e a relevância do tema no processo de ensino e aprendizagem, que devem nortear as escolhas dos docentes. Pensamos que a sequência didática proposta possui esse potencial para interligar conceitos e conteúdos e, por isso, pode integrar as escolhas de conteúdos e metodologias do docente.

A sequência didática deste trabalho opõe-se à concepção de currículo linear ou sequencial, em que os conteúdos são tratados de forma isolada e compartimentada. Propomos a organização de um currículo em rede conforme sugere Pires (2000), formado por diversos pontos (conteúdos, conceitos) interligados por caminhos (relações) que não sejam únicos. Essa forma de conceber o currículo propicia a relação entre diferentes áreas da matemática ou de outras disciplinas.

Desse modo, a sequência didática sugerida possui um eixo que parte das transformações geométricas e vai até a geração de algumas figuras fractais, de modo que o centro de toda a atividade são as matrizes de cada transformação. Toda a atividade está interligada com uma série de outros conceitos matemáticos, que podem ser mais ou menos aprofundados de acordo com o planejamento e os objetivos de cada momento. É claro que essa rede pode e deve sofrer modificações em cada aplicação e implementação futura, inclusive no redimensionamento da importância de cada conceito, bem como de outras interligações possíveis.

3 ELABORANDO

Em relação à metodologia do nosso trabalho na obtenção de uma sequência didática para o ensino de matrizes, optamos pela engenharia didática devido a características destacadas por Artigue (1996, p. 196): "[...] um esquema experimental baseado em realizações didácticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino". É uma metodologia que leva em consideração a atuação profissional do docente e suas reflexões sobre essa atuação. Na engenharia didática a validação é interna, com o confronto da análise *a priori* e da análise *a posteriori*, confirmando ou não as "hipóteses envolvidas na investigação" (ARTIGUE, 1996, p. 208).

Passaremos a comentar as atividades da sequência didática que foram planejadas e elaboradas antes da aplicação, já que esse processo envolve a análise *a priori.*

As ideias iniciais para a elaboração da sequência didática que será apresentada surgiram durante a leitura dos artigos de Gluchoff (2006), que apresenta algumas possibilidades de construções de fractais destacando a análise da relação entre coordenadas, e de Bannon (1991), que relata o uso de transformações geométricas para gerar fractais. Além disso, é muito importante destacar que a obra *Fractals for the Classroom*, de Peitgen *et alii* (1991, 1992, 1999), foi grande fonte de inspiração para as atividades aqui propostas, dado que apresenta diversas atividades relacionadas ao tema fractais, sendo que algumas delas também tratam da análise das transformações geométricas e de sua representação matricial.

A sequência didática elaborada foi organizada em nove atividades, de modo que cada uma pudesse ser desenvolvida em duas horas-aula. Junto com uma breve descrição das atividades, apresentamos algumas recomendações para o professor, frutos da reflexão inicial ocorrida durante o planejamento das atividades[76].

3.1 Atividade 1 – Primeiro Contato com a Rotação e a Reflexão

Será uma atividade inicial, planejada para que os alunos possam reconhecer as transformações de rotação e reflexão, identificando características e peculiaridades. O professor poderá trazer exemplos diversos dessas transformações com imagens e exemplos de simetrias, para que assim os alunos possam fazer suas observações. Depois desse contato inicial o assunto se restringe à transformação de reflexão, e os alunos serão incentivados a representar essa transformação com desenhos livres. Continuando a atividade, será fornecido material para que a reflexão seja também representada no plano cartesiano, dando atenção especial a polígonos que possuam vértices indicados por coordenadas.

3.2 Atividade 2 – Identificando Relações entre as Coordenadas

Nesta atividade, esperamos que os alunos identifiquem relações entre as coordenadas dos vértices das figuras iniciais e das transformadas. Estudaremos as reflexões em torno dos eixos coordenados (abscissas e ordenadas) e das retas $y = x$ e $y = -x$, bissetrizes dos quadrantes. Anotando os vértices em uma tabela e observando alguns casos particulares, pretendemos que os alunos consigam estabelecer genericamente a relação entre as coordenadas dos vértices da figura inicial e final.

76 Essas recomendações para o professor poderão ser reformuladas e adaptadas com a implementação das atividades e de uma consequente análise *a posteriori*.

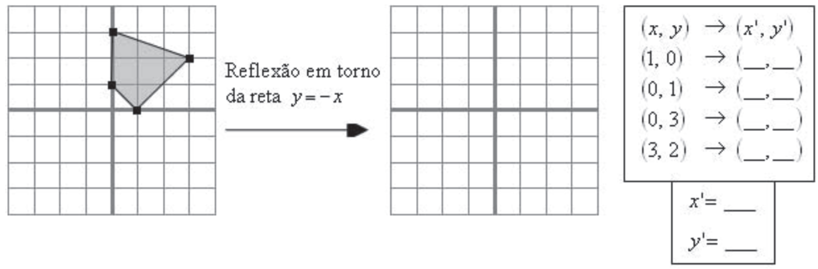


Figura 106 – Exemplo de atividade para a reflexão
Fonte: Stormowski (2008, p. 26).

Mostraremos aos alunos que essas equações poderiam ser escritas de forma diferente: a forma matricial[77]. Neste nível, basta que o aluno identifique a matriz como uma tabela com os coeficientes do sistema de equações. A matriz dos coeficientes assim obtida será chamada de matriz da transformação. Talvez não seja necessário usar o termo "matriz" já desde o início, e também não esperamos discutir a multiplicação[78] de matrizes na representação do sistema, pois basta que os alunos identifiquem a tabela com coeficientes do sistema. Podemos começar falando em tabelas de valores e, em atividades posteriores, podemos falar que essas tabelas são chamadas de matrizes em matemática.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -x \\ y' = y \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{array} \right. \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para concluir a atividade, os alunos serão convidados a encontrar a matriz (ou tabela de coeficientes) de cada uma das quatro reflexões estudadas até aquele momento.

3.3 Atividade 3 – Identificando as Matrizes das Rotações

Tendo já estudado as reflexões, passaremos a analisar as rotações centradas na origem. O estudo se restringe às rotações com ângulos de giro múltiplos de 90°. Isso para que não seja necessário utilizar nenhuma relação trigonométrica[79]. Obteremos

77 Este é um momento em que julgamos necessário uma intervenção mais preponderante do professor para mostrar outras formas de representação do sistema de equações. Isso porque provavelmente os alunos teriam muitíssimas dificuldades de ter esta "inspiração" e representar o sistema a partir de matrizes. Basta pensarmos na origem histórica para percebermos que essa etapa não foi imediata e nem tão natural e, portanto, não podemos esperar isso dos alunos.
78 A multiplicação de matrizes será abordada em outra atividade, o que fará com que a representação matricial do sistema de equações seja compreendida.
79 Precisamos salientar que não tratar das relações trigonométricas foi apenas uma opção nossa para não fugirmos do foco da atividade em si. No entanto, é importante notar que para a atividade normal de sala de aula este seria um riquíssimo momento para relacionarmos as matrizes também com a trigonometria, além da álgebra e da geometria.

as relações entre as coordenadas dos vértices da figura inicial e final e, a partir delas, a matriz de cada rotação estudada, tal como fora feito na atividade anterior com as reflexões. Propiciaremos que os alunos observem certa semelhança entre as matrizes das rotações e reflexões estudadas e, que, embora semelhantes, produzem resultados muito diferentes[80]. Para que tal observação aconteça, poderemos sugerir que os alunos apresentem um resumo das matrizes estudadas e definam o nome da respectiva transformação geométrica.

3.4 Atividade 4 – "Praticando" no Computador

Na primeira vez em que planejamos esta atividade, pretendíamos utilizar o aplicativo MVT (*Mathematical Visualization Toolkit*)[81], mas, depois de algumas reflexões, optamos por utilizar alguns *applets* em Java construídos[82] a partir do *software* Cabri-Géomètre. Tal substituição ocorreu porque o MVT não permite uma boa visualização das transformações do tipo cisalhamento, pois apenas aplica as transformações em vetores. Os *applets* melhoram essa visualização porque as transformações são aplicadas em pontos de um polígono.

O objetivo desta atividade é que os alunos verifiquem se as matrizes das rotações e reflexões obtidas nas atividades anteriores estão corretas. Para tanto, solicitaremos que os alunos observem os valores obtidos no resumo da atividade anterior e os insiram no aplicativo observando o resultado obtido. Caso haja alguma discordância entre o resultado obtido e o previsto, é recomendável propiciar uma discussão entre os alunos. A vantagem no uso dos *applets* é a possibilidade de movimento e interação, já que alterando o valor dos parâmetros de entrada das matrizes de transformação, podemos visualizar imediatamente o que acontece com a figura transformada.

---

80 As matrizes das reflexões e rotações estudadas possuem entradas com os valores 1, -1 e 0 e, por isso, são visualmente parecidas.

81 O MVT é um aplicativo em Java, que não requer instalação prévia e que permite visualizações de diversas representações matemáticas, desde simples funções até equações diferenciais. Estávamos interessados especialmente na "representação visual" das transformações geométricas elementares. O MVT está disponível gratuitamente em: <http://amath.colorado.edu/java/>. Acesso em: 27 jul. 2010.

82 Contamos com o apoio de Rodrigo Sychocki da Silva, que desenvolveu os *applets* que estão disponíveis em: <http://matematicao.psico.ufrgs.br/rodrigo_mat2004/>. Acesso em: 27 jul. 2010.

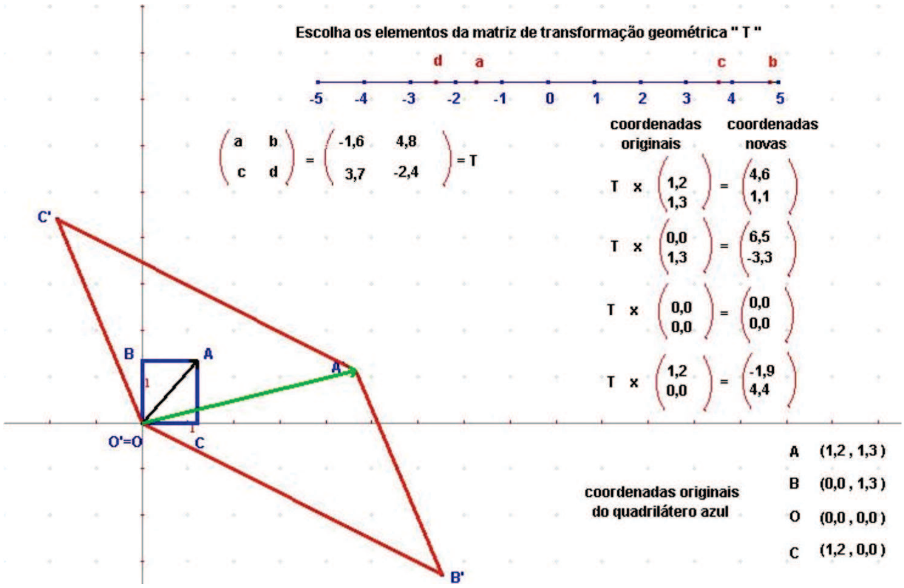


Figura 107 – Interface de um dos applets
Fonte: Stormowski (2008, p. 31).

Prosseguindo na atividade, serão apresentadas matrizes com valores diferentes de 1, -1 e 0, e esperamos que os alunos concluam que essas matrizes geram "dilatações" e "contrações" de acordo com o valor das entradas de cada matriz. Em parte, isso pode ser observado como a multiplicação de matriz por escalar, embora nem todas as matrizes apresentadas sejam dessa forma.

3.5 Atividade 5 - Composição dá Origem à Multiplicação

Nesta atividade esperamos que os alunos "refaçam" o processo histórico da origem da multiplicação de matrizes, tal como Cayley a definiu: a partir da composição das transformações. Desse modo, também esperamos que eles percebam o motivo da maneira peculiar da definição de multiplicação de matrizes.

Começaremos pedindo que os alunos obtenham as matrizes de duas transformações realizadas em sequência, como mostra a Figura 108.

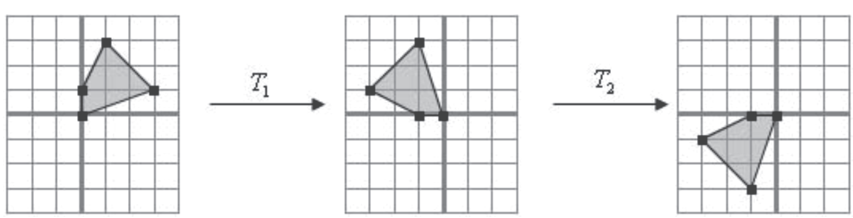


Figura 108 – Compondo transformações
Fonte: Stormowski (2008, p. 35).

Em seguida faremos perguntas sobre a possibilidade de fazer essas duas transformações diretamente, concentradas em apenas uma transformação, e solicitaremos a matriz dessa transformação.

Desse momento em diante, os alunos tentarão observar a relação entre as matrizes, a partir do estudo dos sistemas de equações que originaram cada matriz.

$$(x,y) \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} (x',y') \xrightarrow{\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}} (x'',y'')$$

Figura 109 – As matrizes das transformações
Fonte: Stormowski (2008, p. 35).

Com substituições de variáveis, esperamos obter a relação direta entre as coordenadas (x,y) e (x'',y''). Esse novo sistema será escrito também na forma matricial, e obteremos assim a forma peculiar da multiplicação de matrizes. Analisando o contexto geométrico das transformações, os alunos poderão concluir que a multiplicação de matrizes nem sempre será comutativa, o que também poderá ser observado algebricamente.

Talvez os alunos tenham alguma dificuldade para relacionar a geometria (composição de transformações) com a álgebra (multiplicação das matrizes das transformações), pois enquanto na geometria temos a transformação T_1 seguida da T_2, a matriz da composição dessas transformações será obtida multiplicando-se a matriz da segunda transformação pela da primeira. Essa inversão de ordem pode trazer dificuldades iniciais, mas que poderão ser superadas, inclusive sugerindo a análise da álgebra em questão: $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$

3.6 Atividade 6 – Translações e Expressões Gerais

Da mesma forma sugerida nas atividades anteriores, os alunos deverão tentar estabelecer a relação entre as coordenadas da figura inicial (x,y) e da figura final (x',y'). Deverão também tentar estabelecer alguma representação matricial da translação, conforme foi proposto para reflexões e rotações. O objetivo é que os alunos identifiquem translação e sua forma diferente de representação matricial: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$. Esperamos que eles discutam ideias quanto à soma e à multiplicação de matrizes, suas diferenças e semelhanças.

3.7 Atividade 7 – Iterando Transformações e Gerando Fractais no Shapari

Pretendemos que os alunos implementem transformações no Shapari, indicando as respectivas matrizes. Esperamos que eles se lembrem das atividades anteriores, e que para compor transformações devem multiplicar as respectivas matrizes (adicionar, no caso da translação). Aplicando diversas vezes essas transformações, as figuras iniciais irão se transformando em figuras "fractais", e esperamos que os alunos observem as características dessas figuras (mesmo sem ainda termos caracterizado fractais). Outro fato importante que deve surgir, é que a figura inicial não interfere em nada na figura a ser obtida. O que interfere são as transformações (o processo) utilizadas.

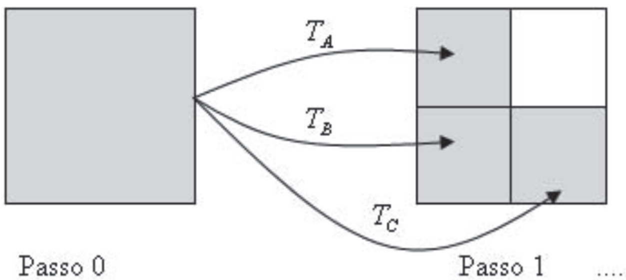


Figura 110 – As composições no Shapari
Fonte: Stormowski (2008, p. 37).

Porém, o que é Shapari[83]? É o aplicativo mais utilizado na sequência didática. Sua principal característica é a de propiciar a aplicação de uma transformação repetidas vezes (iteração). O *software* permite que editemos transformações e também que façamos mais de uma transformação ao mesmo tempo. As figuras obtidas possuem grande apelo estético, atraindo a atenção e a curiosidade do aluno para o processo de sua geração.

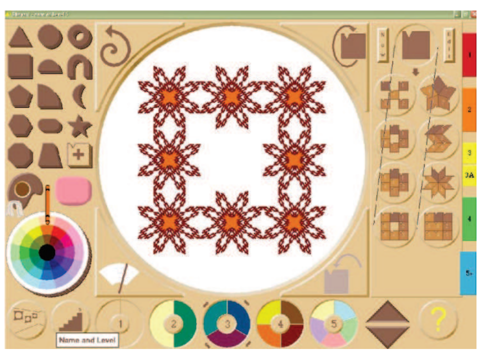


Figura 111 – Interface do Shapari
Fonte: Stormowski (2008, p. 31).

83 *Software* disponível para *download* gratuito em: <http://www.spelunkcomputing.com/shapari/descript.html>. Acesso em: 27 jul. 2010. Recentemente, a empresa disponibilizou o *software* Shape Safari que é executado diretamente na Internet, mas ele não possui a possibilidade de editar as transformações. Disponível em: <http://www.spelunkcomputing.com/>. Acesso em: 27 jul. 2010.

A Figura 111 apresenta a interface do Shapari. No centro temos um círculo onde irão aparecer as figuras selecionadas e as respectivas transformações. As figuras que podem ser selecionadas encontram-se à esquerda do círculo central, e as transformações pré-definidas estão à direita. Para podermos editar transformações ou ainda criar outras novas, devemos indicar o nível 4 ou 5 em um ícone que parece uma escada. Em seguida, para criar uma nova transformação clicamos em *New* no canto superior direito. Para editar uma transformação, nós a selecionamos e depois clicamos em *Edit*. Aparecerá uma janela de edição, da qual recortamos o destaque apresentado na Figura 112. Nessa figura, percebemos que a exibição das figuras e transformações do Shapari ocorrem no primeiro quadrante, em uma região quadrada de lado 1, e esse é um fato importante na edição das transformações. Rotações de 180º, por exemplo, levam figuras para o terceiro quadrante. Para podermos visualizá-las no Shapari devemos usar a translação adequada, e "trazê-las" para o primeiro quadrante.

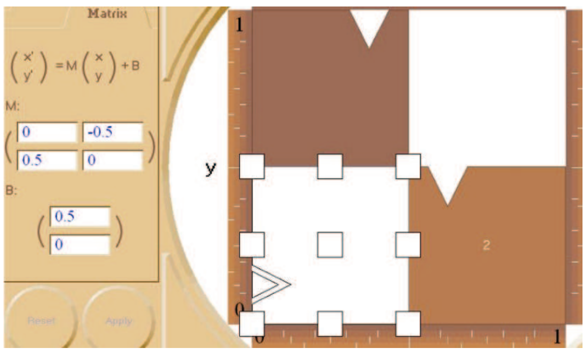


Figura 112 – Editando no Shapari
Fonte: Stormowski (2008, p. 32).

Essas características influenciam na forma matricial das transformações que o Shapari possui: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, onde B é a matriz de translação.

Outro fato importante a considerar é a forma como o Shapari processa as transformações. Em cada transformação editada, a figura original é aquela dentro do quadrado unitário do primeiro quadrante. Observando a Figura 113 notamos que a transformação T_A faz uma redução da figura original composta com uma reflexão em relação ao eixo horizontal, seguida de uma translação.

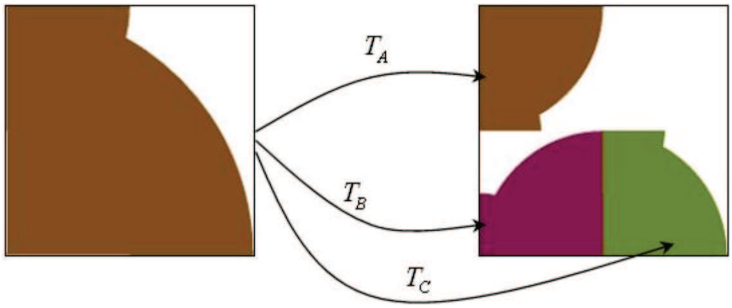


Figura 113 – As transformações no Shapari
Fonte: Stormowski (2008, p. 33).

O mesmo ocorre com as outras transformações, que possuem como ponto de partida a figura original. Aplicando essas transformações por diversas vezes (iterando), obtemos a sequência de figuras que termina com uma figura fractal. A sequência comentada aparece na Figura 114.

Figura 114 – Iterando no Shapari
Fonte: Stormowski (2008, p. 33).

3.8 Atividade 8 – Analisando Figura e Obtendo suas Iterações

Nesta atividade, o objetivo é o de que os alunos tomem conhecimento de uma das possíveis características de um fractal: a autossimilaridade[84]. Após uma ideia inicial do que significaria o termo, esperamos que os alunos observem algumas figuras fractais e, a partir da análise de partes das figuras que são cópias da figura original, obtenham as transformações (matrizes das transformações) que geraram cada fractal. Para confirmar seus cálculos, eles poderão testar os resultados no *software* Shapari.

84 A autossimilaridade é característica típica dos fractais: suas partes são semelhantes ao todo. Para mais detalhes sobre autossimilaridade, veja as obras de Barbosa (2002, p. 9), Peitgen *et alii* (1991, p. 2, 8) e, principalmente, a de Mandelbrot (1998, p. 34, 35).

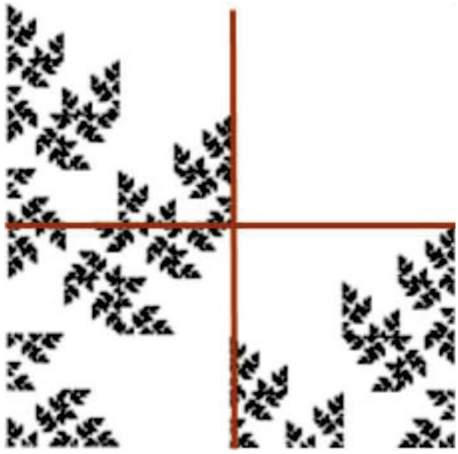


Figura 115 – Interpretando e obtendo as transformações...
Fonte: Stormowski (2008, p. 38).

No caso da Figura 115, esperamos que os alunos observem que ela é formada por três cópias de si mesma, sendo que cada uma dessas cópias sofreu a ações das transformações geométricas como a redução (homotetia) e as reflexões.

3.9 Atividade 9 – Um Pouco mais Sobre as Figuras Geradas

Propiciaremos que os alunos recordem (ou estudem) conceitos de progressões geométricas e promoveremos uma discussão a respeito da área das figuras, o que poderá levar à ideia de dimensão fractal. Essa atividade é baseada no artigo de Sallum (2005)[85], no entanto, também encontramos atividades semelhantes no livro de Barbosa (2002).

Terminada a tarefa, o professor promoverá uma discussão sobre a área que sobra e a área retirada da figura. Se a área que sobra é zero, por que ainda conseguimos visualizar algo que se parece com uma área? O professor poderá motivar a discussão e apresentar informações sobre a dimensão dessas figuras: a dimensão fractal. É claro que essa discussão sobre o conceito de dimensão deverá ser feita de maneira intuitiva, não usando formalismos e definições, e de modo que os alunos possam participar com perguntas e questionamentos[86].

85 Publicado na *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, disponível em: <http://www.rpm.org.br>. Acesso em: 27 jul. 2010.

86 Esta noção intuitiva de dimensão pode ser abordada de várias formas, que podem ser encontradas na obra de Mandelbrot (1998, p. 32-34, 37-43), e também no livro de Peitgen *et alii* (1991) que apresenta outras atividades para abordar o conceito de dimensão em sala de aula. Na nossa implementação em sala de aula, acabou se sobressaindo a versão de Sallum (2005, p. 6-8), que de certo modo está baseada nas obras citadas.

4 APLICANDO E ANALISANDO

As atividades planejadas foram implementadas no Colégio de Aplicação da UFRGS (CAp), de agosto a novembro de 2006, em uma disciplina denominada Enriquecimento Curricular[87]. Oferecemos a mesma disciplina para alunos do segundo e do terceiro anos do Ensino Médio. Tivemos cinco adesões no segundo ano e seis adesões no terceiro ano. Todas as atividades propostas na sequência didática foram desenvolvidas com as duas turmas. Desse modo, de acordo com observações feitas em sala de aula, pequenas adaptações e modificações eram realizadas nas atividades quando oferecidas para outra turma.

Vejamos a dinâmica dos encontros: inicialmente os alunos recebiam as atividades do dia e as respectivas orientações gerais para o seu desenvolvimento. Depois disso, os alunos desenvolviam as atividades e os professores[88] atuavam como motivadores e questionadores. A ideia era a de que nesta etapa o docente atuasse como provocador e questionador, sem necessariamente dar respostas fechadas aos alunos. No final de cada encontro tínhamos um momento de discussão do que fora estudado, propiciando a participação dos alunos e a exposição de suas observações. Os professores conduziam os fechamentos, motivando um resumo das observações, e projetando encontros futuros.

4.1 Atividades 1 a 4 – O Estudo das Transformações

Na primeira atividade, percebemos que o pedido para que cada um desenhasse as transformações fez com que a atividade se mostrasse um pouco cansativa, pois os alunos diziam saber o resultado a ser desenhado, mas que tinham "preguiça" de fazer o desenho para cada uma das transformações propostas.

Terminada a atividade, pareceu-nos que os objetivos da atividade foram atingidos. No entanto, para futuras aplicações, propomos que a atividade seja reformulada em alguns aspectos. Para estudar o conceito de cada transformação geométrica, e para que ela ocorra de forma mais motivada, sugerimos que sejam exploradas simetrias com o auxílio de gráficos, figuras, obras de arte[89], mosaicos, azulejos, tapeçarias, objetos da natureza, etc.

---

87 Essa disciplina envolve temas complementares de estudo que são oferecidas aos alunos por meio de colaboradores ou professores do CAp. A disciplina possui duas horas semanais e os alunos podem escolher uma entre diversas disciplinas oferecidas.

88 Os professores a que nos referimos são Rodrigo Sychocki da Silva e o autor deste artigo.

89 Além de podermos observar facilmente a simetria na arquitetura, destacamos também as obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972). O *site* oficial do artista (<http://www.mcescher.com>) apresenta diversas obras que podem ser utilizadas para estudo de simetrias em sala de aula.

Na segunda atividade[90], percebemos que as maiores dificuldades ocorreram na representação matricial das transformações, mas julgamos que isso era algo natural e esperado, pois muitos alunos tiveram nesta atividade os primeiros contatos com matrizes. Depois desse impacto inicial e de momentos de dificuldade, a aula transcorreu normalmente, dando a impressão de que os alunos compreenderam o que estavam fazendo. É claro que a noção de matriz é um tanto quanto abstrata e demorará um pouco mais para ser compreendida de fato.

A turma do segundo ano, por nunca ter estudado matrizes, teve um encontro extra para apresentarmos o conceito de matriz como tabela. Reflexões posteriores[91] nos fizeram concluir que aquela aula extra para falar sobre matrizes não era necessária, e que o próprio desenvolvimento da atividade propiciará um estudo diferenciado das matrizes[92]. Pode-se falar inicialmente apenas numa tabela de valores formados pelos coeficientes de x e y do sistema $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$, relativo a cada uma das transformações estudadas. Pensamos que essa seria uma forma muito mais natural de introduzir o conceito de matriz, de modo que este conceito se construa durante a própria atividade, sem a necessidade de definições e exemplos prévios.

No final desta atividade, pedimos aos alunos para fazerem um resumo das matrizes das transformações geométricas obtidas até então, e, neste momento, surgiram comentários e controvérsias sobre as matrizes das transformações estudadas: as matrizes de um aluno eram diferentes das de outros, e um aluno possuía matrizes iguais para transformações diferentes. Os próprios alunos discutiram e corrigiram os seus equívocos. Foi uma aula muito interessante porque os alunos promoveram uma comparação entre resultados, confirmando valores ou verificando e corrigindo possíveis enganos.

---

90 Em uma próxima implementação, sugerimos a utilização do *software* GeoGebra e de seus recursos para apresentar transformações geométricas. Isso poderá diminuir a sensação de repetição de atividades e propiciar a representação gráfica com movimento (geometria dinâmica) em confronto com a "imobilidade" do desenho manual. Essa forma de estudo evita conclusões precipitadas a partir de casos particulares, pois fornece mobilidade e uma diversidade grande de situações a serem exploradas com o simples movimento do *mouse*.

91 Observe que estas reflexões sobre a prática realizada, analisando os resultados obtidos, com a adequação de novas atividades, constituem a essência da análise *a posteriori* da Engenharia Didática. É o que na verdade se espera de todo professor: que reflita sobre o seu fazer para poder fazer melhor. Também é importante esclarecer que a Engenharia Didática requer reflexões e análises muito mais aprofundadas do que as que estão apresentadas resumidamente neste texto. Veja uma reflexão mais aprofundada em Stormowski (2008).

92 E a pergunta imediata é: e por que não fizeram logo assim? O motivo é que inicialmente nossa preocupação maior era estudar as operações entre matrizes (e suas propriedades) a partir do estudo de transformações geométricas, mas somente depois percebemos que esta abordagem também é uma ótima oportunidade para a introdução do conceito de matriz.

Uma reflexão posterior nos fez perceber que poderíamos ter estudado também rotações com ângulos múltiplos de 45º. É uma maneira interessante de verificar que existem matrizes de transformações que têm elementos distintos dos do conjunto $\{-1, 0, +1\}$, de modo que os alunos não fiquem com a falsa impressão de que somente estes valores ocorreriam. Essas rotações podem ser estudadas, mesmo que não queiramos utilizar relações trigonométricas, pois a sua obtenção pode ser feita a partir da utilização do Teorema de Pitágoras. Essas rotações serão implementadas em uma próxima aplicação.

Na quarta atividade, levamos os alunos até o laboratório de informática do CAp, onde disponibilizamos um *applet*[93] em que as transformações geométricas são aplicadas em um retângulo, e as mudanças causadas são muito mais evidentes. Além de propiciar uma melhor visualização do que acontece geometricamente, esse *software* também apresenta os valores das coordenadas da figura inicial e da figura transformada.

Outro fator importante é o de que os valores das entradas da matriz são escolhidos a partir de uma "barra de rolagem" que propicia deformações automáticas e "contínuas" na figura, o que ajuda na compreensão do que cada entrada da matriz gera na transformação.

4.2 Atividades 5 e 6 – Operações com Matrizes

O início da quinta atividade foi tranquilo, mas a parte da generalização das transformações geométricas e a interpretação dos sistemas trouxeram algumas dificuldades. Tivemos que relembrar aos alunos alguma coisa sobre sistemas lineares. A generalização das transformações suscitou maiores dificuldades de compreensão pelo fato dos alunos não estarem muito acostumados com raciocínios genéricos ou com sua representação. Essa asserção é confirmada pela necessidade maior de intervenções do professor, e por afirmações do tipo: "é muita letra, professor"! Em algumas etapas os alunos "travavam" e pediam mais explicações.

Talvez esta seja a atividade mais "complexa" até aqui proposta e, por isso, requer muito cuidado na sua implementação. No entanto, entendemos que essa implementação se faz necessária por apresentar uma justificativa histórica plausível para a "maneira tão estranha" de multiplicarmos matrizes. Como a multiplicação de matrizes é obtida pela composição de transformações lineares, os alunos notaram claramente a não comutatividade dessa operação, pois uma rotação de 90° seguida de uma reflexão em torno do eixo *y* gera uma figura diferente do que se fizermos primeiro a reflexão e depois a rotação e, desse modo, temos uma "justificativa"

93 Desenvolvido com o *software* Cabri-Géomètre II, disponível em: <http://matematicao.psico.ufrgs.br/rodrigo_mat2004/transformacao_linear/tf.html>. Acesso em: 27 jul. 2010.

geométrica[94] da não comutatividade da multiplicação de matrizes. Alguns alunos perceberam e comentaram que existem composições de transformações geométricas que são comutativas e deram como exemplo a rotação de 180° seguida da reflexão em torno da reta $y = -x$. Esse fato mostra que houve um entendimento, pelo menos parcial, da atividade.

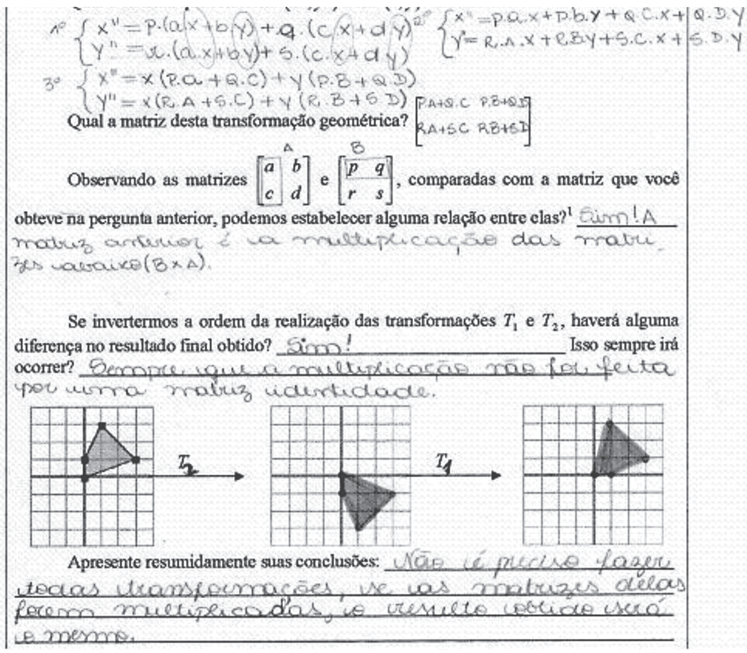


Figura 116 – Resolução dos alunos
Fonte: Stormowski (2008, p. 72).

Talvez a nossa precipitação de apresentar um único exemplo e, logo em seguida, a generalização, tenha trazido e provocado grande parte das dificuldades na generalização proposta. Providenciaremos mais exemplos antes da generalização em uma futura implementação.

Na sexta atividade, talvez o que tenha gerado um pouco de instabilidade seja o formato das matrizes da translação, que serão matrizes , diferentes das matrizes das multiplicações. Essa novidade parece ter gerado alguns percalços, mas a compreensão com a visualização do *applet* se mostrou muito satisfatória. Destacamos que os alunos fizeram a análise inicial apenas no papel, e apenas posteriormente testaram suas conclusões no *applet* Java[95].

94 Na verdade, esta justificativa geométrica se refere à não comutatividade da composição das transformações geométricas.

95 Observe que este *applet* para a translação é diferente do apresentado anteriormente. Está disponível em: <http://matematicao.psico.ufrgs.br/rodrigo_mat2004/transformacao_linear/tf2.html>. Acesso em: 27 jul. 2010.

Acrescentamos uma atividade na sequência didática para explorar mais a multiplicação entre matrizes. Apresentamos a possibilidade de escrever o sistema $\left\{\begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array}\right.$, como uma equação matricial[96] dada por $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Também foram acrescentadas algumas atividades que explorassem o algoritmo da multiplicação e a atividade que estuda a translação foi ampliada, acrescentando-se exercícios envolvendo a composição[97] de transformações quaisquer com a translação, de modo a estudarmos a expressão geral $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, que será necessária para a utilização do *software* Shapari em atividades posteriores.

4.3 Atividades 7 e 8 – Iterações no Shapari

Na sétima atividade, houve algumas dificuldades iniciais quanto ao uso do *software*, já que a interface do mesmo não é parecida com a da maioria dos *softwares* que os alunos conhecem. No entanto, mesmo sendo diferente, os recursos do *software* aparecem em botões grandes, sem poluição visual, o que faz com que o seu funcionamento seja compreendido depois de algumas breves explicações.

Nesta atividade, os alunos tiveram que implementar as transformações estudadas anteriormente, o que fez com que folheassem e pesquisassem suas anotações por diversas vezes, para relembrar dados sobre as matrizes. Quando eram necessárias transformações geométricas que não tinham sido estudadas, os alunos foram incentivados a obter essas novas transformações como composição de duas ou mais transformações já vistas, de modo que tinham que multiplicar as respectivas matrizes para obter a matriz da transformação desejada.

Na oitava atividade, começamos com a pesquisa de cada aluno na internet sobre o termo autossimilaridade, e, após alguns comentários socializados pelos alunos e professores, demos desenvolvimento à atividade proposta.

Destacamos que o processo de olhar a figura e tentar descobrir como foi construída, por meio da identificação de partes autossimilares ou semelhantes ao todo, propicia um tipo de raciocínio que não é muito comum em sala de aula, mas fundamental para uma compreensão mais completa do processo. O aluno precisa compreender completamente o processo para poder definir o processo inverso. E, nesse sentido, percebemos que a atividade, mesmo com alguns percalços iniciais,

96 Observe que agora esta equação faz sentido, pois já definimos a multiplicação de matrizes.
97 A composição de duas translações propicia o estudo e a verificação de que a soma de matrizes é comutativa.

alcançou seus objetivos, pois os alunos se mostraram motivados em tentar descobrir qual o processo correto para cada figura[98].

4.4 Atividade 9 – Um Pouco mais Sobre as Figuras Geradas

Novamente surgiram dificuldades maiores quanto à generalização do raciocínio. Foi necessário recordar alguns conceitos sobre progressões que os alunos do terceiro ano não lembravam e que eram novidade para o segundo ano. Pelos cálculos, a área que sobrava da figura era igual a zero, no entanto, os alunos diziam não concordar porque estavam vendo uma figura que parecia ter área. Nesse momento, aproveitamos para fazer uma discussão sobre a questão da dimensão da figura. Com representações e exemplos no quadro, intuiram qual deveria ser a dimensão da figura e como poderia ser calculada. Os alunos acharam o tema da dimensão inquietante e fizeram muitas perguntas. Realizamos alguns cálculos testando hipóteses de dimensão para as figuras. A discussão sobre dimensão foi vista de forma não rigorosa, baseada no artigo de Sallum (2005), mas foi percebida facilmente pelos alunos.

5 TERMINANDO

Desde o início tínhamos uma certeza: a sequência didática precisava opor-se a um currículo linear e compartimentado e deveria abordar conceitos que permitissem conexões com diferentes áreas da matemática. Consideramos que isso foi alcançado. A atividade motivou o estudo de matrizes a partir da análise de transformações geométricas, aproximando conceitos de geometria a conceitos de álgebra. A composição e a iteração das transformações geométricas, definidas por matrizes, propiciaram aos alunos um primeiro contato com a geometria fractal, tema pouco estudado na maioria das escolas.

A sequência didática elaborada resgata o estudo de transformações geométricas, estabelece relações com matrizes e propicia um estudo diferenciado delas. No caso das matrizes, fica clara a necessidade de sua aplicação para gerar fractais no Shapari. É uma situação prática que precisa da aplicação de matrizes.

E o objetivo central deste estudo foi alcançado? Consideramos que sim. Pretendíamos elaborar uma sequência didática para o estudo de matrizes, propiciando uma abordagem que justificasse as definições das operações entre matrizes e suas propriedades. A sequência foi elaborada e implementada. Com o estudo da composição

98 Destacamos o emprego diferenciado de estratégias: a maioria dos alunos analisou as figuras e tentou perceber quais transformações tinham sido utilizadas nas partes que lhes eram semelhantes; no entanto, um dos alunos se recusou a utilizar esse processo e tentou obter a figura sem analisá-la inicialmente pelo processo de tentativa e erro. Ele demorou um pouco mais, mas se mostrou contente ao verificar que o "seu método" também funcionava.

de transformações propiciamos a obtenção da definição das operações entre matrizes, tal como teria ocorrido na história da matemática. Essa abordagem justifica a peculiaridade[99] da multiplicação de matrizes e fornece justificativas imediatas para a comutatividade ou não das operações, proporcionando uma interpretação geométrica da (não) comutatividade.

Contudo, como em toda atividade docente, a sequência didática apresentada não se pretende completa, fechada e terminada. Sempre temos o que acrescentar, o que melhorar e o que modificar. Depois da primeira implementação, verificamos a necessidade de alterações, que foram efetuadas e apresentadas no texto. E, além dessas alterações, muitas outras reformulações e adaptações deverão ocorrer. Para isso, basta que pratiquemos e reflitamos sobre a prática.

A redação deste texto e a elaboração da sequência didática estão integralmente direcionadas aos colegas professores, que fazem da sua, uma vida docente. Todo a dedicação que tivemos na elaboração, no estudo, na implementação, na reflexão, na reformulação e na análise da sequência didática, somente fará sentido se esta obra chegar aos professores da rede escolar, e promover a reflexão.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. (Org). *Didática das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BANNON, Thomas. Fractals and Transformations. *Mathematics Teacher*, Reston, p. 178-185, Mar. 1991.

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a geometria fractal*: para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais* (5ª a 8ª série): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. MEC. SEMTEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 1999.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas: UNICAMP, 2004.

GLUCHOFF, Alan. Hands-on Fractals and the unexpected in mathematics. *Mathematics Teacher*, Reston, v. 99, n. 8, p. 570-574, Apr. 2006.

MANDELBROT, Benoît. *Objectos Fractais.* Lisboa: Gradiva, 1998.

NCTM. *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM, 2000.

99 Por que na soma de matrizes operamos termo a termo e na multiplicação não?

PEITGEN, Heinz-Otto et alii. *Fractals for the Classroom:* strategic activities. New York: Springer-Verlag/NCTM, 1991. v. 1.

________. *Fractals for the Classroom:* strategic activities. New York: Springer-Verlag/NCTM, 1992. v. 2.

________. *Fractals for the Classroom:* strategic activities. New York: Springer-Verlag/NCTM, 1999. v. 3.

PIRES, Célia Maria Carolino. *Currículos de matemática*: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

SALLUM, Élvia Mureb. Fractais no ensino médio. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 57, p. 1-8, 2005.

STORMOWSKI, Vandoir. *Estudando Matrizes a partir de Transformações Geométricas*. 2008. 144f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/14965>. Acesso em: 27 jul. 2010.

GEOMETRIA VETORIAL NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Pedro Sica Carneiro
Maria Alice Gravina

1 INTRODUÇÃO

Na escola, as aproximações entre álgebra e geometria acontecem, especialmente, quando trabalhamos com geometria analítica, já que as retas e círculos da geometria euclidiana passam a serem vistos como conjuntos de pontos P $= (x, y)$ no plano cartesiano satisfazendo, respectivamente, as equações $ax + by = c$ e $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Em outros tópicos do programa escolar essas aproximações também poderiam estar mais presentes e, dentre eles, destacamos aquele que trata da resolução de sistemas lineares com duas ou três variáveis.

A resolução dos sistemas de equações com duas variáveis (equações do tipo $ax + by = c$) pode ser discutida nos contextos geométrico e algébrico, estabelecendo-se relações entre a existência de solução do sistema e a posição relativa de retas. Por exemplo, o caso em que o sistema tem uma única solução corresponde a duas retas que se interseccionam em um único ponto. Já o estudo dos sistemas de três equações com três variáveis (equações do tipo $ax + by + cz = d$), em geral, na escola, fica restrito a manipulações algébricas com equações, matrizes e determinantes, nisso fazendo-se uso de regras desprovidas de explicações.

Na "regra de Cramer", os alunos fazem cálculos com determinantes, mas não entendem porque os cálculos levam à solução do sistema. Já no método do escalonamento, que tem como propósito transformar o sistema em outro equivalente mais simples, as manipulações algébricas são mais compreensíveis. Mas, mesmo nesse método, os possíveis tipos de conjuntos-solução do sistema ainda se apresentam de difícil compreensão para os alunos. A solução desse tipo de sistemas poderia ser mais clara se os conjuntos fossem interpretados geometricamente.

Essa interpretação pode ser introduzida na Matemática escolar por meio dos conceitos de vetores e operações, como veremos na proposta que foi concebida, implementada e avaliada e que se constituiu em dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS[100]. No que segue vamos tratar de responder à pergunta.

---

100 A dissertação, com título *Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações* , é de autoria de Pedro Sicca Carneiro, realizada sob a orientação de Maria Alice Gravina, e foi defendida em 2008. O texto, na íntegra, está disponível na Biblioteca Virtual da UFRGS, em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/13337> . Acesso em: 12 jul. 2011

2 APROXIMAÇÕES ENTRE ÁLGEBRA E GEOMETRIA

Na escola, em diversos momentos, podemos observar a ênfase que é dada aos raciocínios de natureza algébrica, com pouca associação a idéias geométricas. Por exemplo: no estudo de funções, o gráfico da função quadrática é simplesmente chamado de "parábola", sem maiores explicações quanto à razão e à propriedade que justifica o uso desse nome[101]. Outra situação: números complexos e operações, em geral, são apresentados na forma de exercícios de manipulações algébricas, sendo pequena a ênfase nas interpretações geométricas que podem ser associadas às operações. E mesmo no ensino da geometria analítica, nem sempre são apresentadas as deduções da equação da reta e do círculo por meio do raciocínio geométrico. Enfim, na escola, poucas são as aproximações entre álgebra e geometria.

É interessante observar que, segundo Charbonneau (1996), a álgebra muitas vezes é vista como um produto da evolução da aritmética, porém na história da Matemática vemos que a geometria teve um importante papel na evolução da álgebra. No livro II dos "Elementos de Euclides"[102], muitas das proposições trazem provas geométricas de identidades algébricas, sendo que a ideia central é sempre olhar para a área de uma mesma figura de duas formas distintas: por um lado, olhamos para a área da figura como um todo e, por outro lado, a sua área é vista como a soma de áreas de figuras que fazem a sua composição. A título de exemplo trazemos, desse livro, a Proposição IV, acompanhada de desenho a seguir (Figura 117):

> PROP. IV. TEOR.
> Se uma reta for cortada em duas partes quaisquer, será o quadrado da toda igual aos quadrados das partes, juntamente com o retângulo das mesmas partes, tomado duas vezes (COMMANDINO, 1944, p. 32).

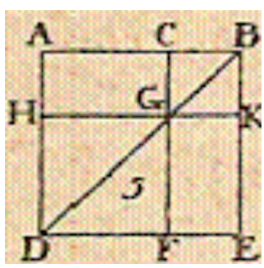


Figura 117 – Proposição IV
Fonte: Commandino (1944, p. 32)

---

101 A parábola, sob o ponto de vista geométrico, é o conjunto de pontos do plano que se mantém equidistantes de uma dada reta e um dado ponto, fixos.

102 Para as transcrições dos "Elementos de Euclides", feitas nesta seção, estamos usando como referência a obra *Euclides – Elementos de Geometria*, versão latina de Frederico Commandino, publicada por Edições Cultura, em 1944, disponível em formato digital em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2011

Essa proposição, em linguagem matemática atual, teria a seguinte redação: se um segmento é dividido em duas partes quaisquer, a área do quadrado sobre o segmento todo será igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre cada uma das partes e das áreas dos dois retângulos construídos sobre as duas partes. Isso corresponde à propriedade algébrica conhecida, na escola, como "produto notável", ou seja, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Ainda, segundo Charbonneau (1996), até a metade do Século XIX, os "Elementos de Euclides" foram considerados como um modelo teórico da Matemática que pode ser uma das razões pela qual a geometria foi usada muitas vezes para resolver problemas de natureza algébrica. É o caso da resolução da equação $x^2 + 10x = 39$, apresentada pelo astrônomo e matemático Al-Khowarizmi[103] (780-850 a.C.) e na qual ele faz uso de igualdade de áreas: o primeiro membro da igualdade representa a soma da área de um quadrado de lado x com a área de retângulo valendo área $10x$; o segundo membro, o número 39, é tomado como a área de um retângulo.

Segundo Boyer (1974), na obra *Ars Magna* de Cardano, que viveu no período 1501-1576), também são apresentadas resoluções das equações cúbicas e quárticas, com esse mesmo espírito geométrico. Nessas resoluções é muito tênue a presença das manipulações algébricas, e isso nos mostra o quanto as equações, na história da Matemática, começaram a ser resolvidas com uma forte interpretação geométrica. E Boyer também registra que é Viète (1540-1603) o primeiro matemático que começa a distinguir claramente a álgebra da geometria e da aritmética. Sobre a sua obra *Introdução à Arte Analítica,* comenta Boyer (1974, p. 271):

> É sem dúvida a primeira vez na história da Matemática que vemos em ação um tratamento algébrico puramente literal de um problema matemático. Isto é, dispomos de fórmulas que podem se aplicar a qualquer problema numérico. É assim que Viète propõe ao final de cada um de seus problemas uma aplicação numérica. Talvez para mostrar aos céticos que seu método é bom.

No entanto, Descartes (1596-1650) , ainda segundo Boyer (1975), é o nome associado à introdução da álgebra na geometria, com o trabalho apresentado em *A Geometria*, um dos três apêndices de sua obra *Discurso do Método*. O objetivo de Descartes era duplo: por meio de processos algébricos ele queria libertar a geometria de figuras, que segundo ele fatigavam a imaginação desnecessariamente; e também queria ele dar significado às operações da álgebra por meio de interpretação geométrica, ao considerá-la uma arte confusa e obscura que embaraçava a mente.

103 Detalhes da resolução podem ser consultados em Charbonneau (1996, p. 26).

Quanto ao conceito de vetor – nosso objeto de discussão, no que segue – é interessante saber que sua origem está no século XVII e, que, nessa época, surpreendeu por integrar os aspectos: algébrico e geométrico. Segundo Crowe (1967), a adição de vetores, cujos primeiros indícios apareciam na Grécia antiga, já era utilizada para a soma de velocidades e forças na Física nos séculos XVI e XVII. Entretanto, até o final do século XIX não havia nenhuma teoria ou conjunto de regras bem definidas que pudéssemos chamar de álgebra linear.

Importantes idéias conduziram à construção da análise vetorial, dentre elas, destacamos a apresentada por Leibniz (1646-1716), em uma carta a Huygens (1629-1695)[104], conforme registrado em Crowe (1967):

> Eu descobri certos elementos com uma nova característica inteiramente diferente da álgebra e que terá grandes vantagens em representação para a mente, exatamente e de uma maneira acreditável por sua natureza, mesmo sem figuras tudo dependerá de um senso de percepção. Álgebra é a característica para números indeterminados ou magnitudes somente, mas, não expressa posição, ângulos ou direção de movimento. Portanto é difícil analisar as propriedades de uma figura pelo cálculo, e é ainda mais difícil conseguir construções e demonstrações geométricas convenientes, mesmo quando o cálculo algébrico está completo. Mas, esta nova característica, que segue figuras visuais, não pode falhar em dar a solução, a construção geométrica e a demonstração, tudo ao mesmo tempo, e de um modo natural em uma análise.

Embora os detalhes de sua idéia nunca tenham sido totalmente trabalhados, Leibniz se tornou o precursor da primeira análise vetorial – uma nova maneira de representar entidades geométricas por meio da álgebra.

Nesta seção, procuramos ilustrar como o nascimento do pensamento algébrico está fortemente vinculado à geometria. Com a evolução da Matemática, a álgebra passou a ser uma área de conhecimento independente da geometria. Estruturas teóricas (grupos, anéis, corpos entre outras) foram desenvolvidas e nelas têm-se, nos dias de hoje, interrogações de pesquisa de natureza puramente algébrica.

No entanto, na Matemática escolar, sempre que possível, deveriam ser colocados em estreita relação conteúdos de álgebra e geometria, pois isso contribui para a construção de conhecimento mais pleno de significado por parte do aluno. Segundo Douady e Parsysz (1998), a geometria permite que os alunos adentrem no problema com algumas ideias, vindas de percepções visuais ou da familiaridade com o ambiente

104 Na transcrição dos trechos da carta de Leibniz, estamos tomando como referência CROWE, M. *A history of Vector Analysis.* London: University of Notre Dame Press, 1967.

em que vivem; já a álgebra fornece ferramentas que ajudam a avançar nos aspectos que são mais complicados de tratar no contexto puramente geométrico[105].

3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES SOB INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

É com a introdução da geometria vetorial na escola que podemos interpretar geometricamente a resolução de sistemas de equações com três variáveis.

Inicialmente, vamos fazer essa interpretação para sistemas de equações com duas variáveis. Para isso, precisamos apresentar uma nova interpretação geométrica para a equação $a.x + b.y = c$, que já sabemos ser a de uma reta r no plano.

Se $\vec{n}$ é vetor com coordenadas (a, b) e P_o é ponto com coordenadas (x_o, y_o), então temos que o ponto $P = (x, y)$ pertence à reta que é perpendicular à direção dada pelo vetor $\vec{n}$, passando pelo ponto P_o, se e somente se o vetor determinado pela seta   é ortogonal ao vetor $\vec{n}$, conforme indica a Figura 118.

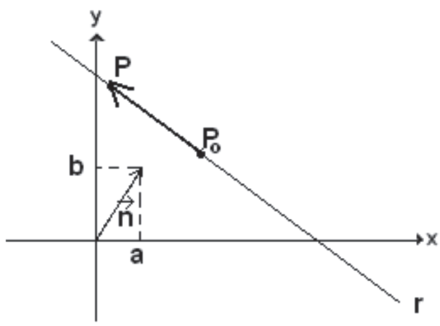


Figura 118 – Reta
Fonte: Carneiro(2008)

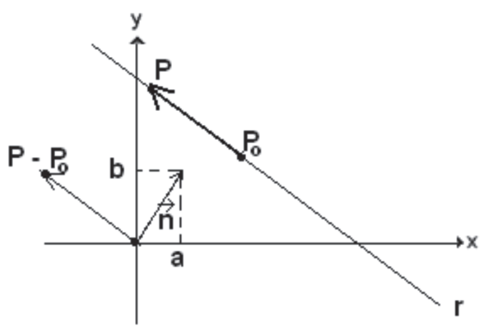


Figura 119 – Vetores na equação da reta
Fonte: Carneiro(2008)

105 Um exemplo que ilustra muito bem a ideia mencionada é o problema de encontrar uma reta tangente ao gráfico de $y = x^3$ na origem. Geometricamente, os alunos acreditam que a reta não existe, pois imaginam que ela não possa interceptar a curva. No entanto, eles conseguem avançar quando lançam mão de ferramentas algébricas calculando a inclinação da reta por meio da derivada.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo determinado pelos vetores $\vec{n}$ e $\overrightarrow{P_oP}$, conforme a Figura 119, usando (a, b) e $(x - x_o , y - y_o)$ como as correspondentes coordenadas, obtemos[106]: $a.(x-x_o) + b.(y-y_o) = 0$ e, portanto, $a.x + b.y = a.x_o + b.y_o$.

Esta última equação é idêntica à equação $a . x + b . y = c$, conhecida como equação geral de uma reta r, bastando para isso tomar $c = a . x_o + b . y_o$. De acordo com a explicação dada anteriormente, temos agora uma nova interpretação para os coeficientes dos termos x e y da equação geral: eles são as coordenadas do vetor $\vec{n}$ que é ortogonal a esta reta r. Esse vetor $\vec{n} = (a , b)$ é dito vetor normal à reta r.

Com esse conceito de vetor normal à reta, podemos determinar, sem cálculos, se um sistema de duas equações tem ou não solução. A título de exemplo, trazemos dois sistemas:

$$\begin{cases} 2 . x + 3 . y = 5 \\ x - 2 . y = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 2 . x + 4 . y = 5 \\ - x - 2 . y = 3 \end{cases} \qquad (2)$$

No sistema (1), os vetores normais às duas retas têm, respectivamente, coordenadas (2, 3) e (1, -2). Na representação dada na Figura 120, temos feixes de retas perpendiculares ao vetor (2, 3) e feixe de retas perpendiculares ao vetor (1, -2), e vemos então que as duas retas em questão (com destaque em negrito) se interseccionam em um único ponto, o que significa que o sistema tem uma única solução.

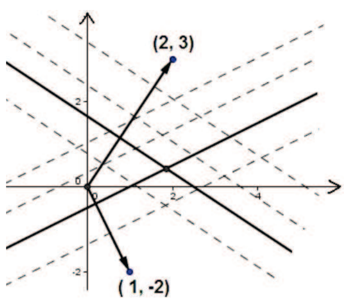


Figura 120 – Intersecção de retas
Fonte: Os autores

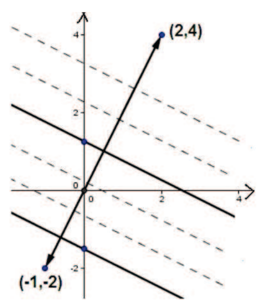


Figura 121 – Retas paralelas
Fonte: Os autores

106 A equação apresentada a seguir é resultado de manipulação algébrica aplicada à condição dada pelo teorema de Pitágoras, a saber: $|\overrightarrow{P_oP}|^2 + |\vec{n}|^2 = |\overrightarrow{P_oP} - \vec{n}|^2$.

Já no sistema (2), os vetores normais às retas têm a mesma direção (neste caso dizemos que um vetor é múltiplo do outro), e suas coordenadas são (2, 4) e (-1, -2), conforme ilustra a Figura 121. E como os termos correspondentes ao parâmetro *c*, nas duas retas, são distintos, concluímos que as retas são paralelas (com destaque em negrito) , o que significa que o sistema não tem solução.

Vemos assim que relações entre os vetores normais às retas informam sobre as soluções do sistema e, em resumo, as possibilidades são : se os vetores não são múltiplos um do outro, as retas se interseccionam em um único ponto, o qual corresponde à solução única do sistema; se os vetores são múltiplos um do outro, ou as retas são paralelas ou são coincidentes, o que corresponde às situações em que o sistema não tem solução ou tem infinitas soluções.

Para sistemas com três variáveis, é de forma análoga ao que foi feito no caso de sistema com duas variáveis, interpretamos geometricamente a equação $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, conhecida como equação geral do plano.

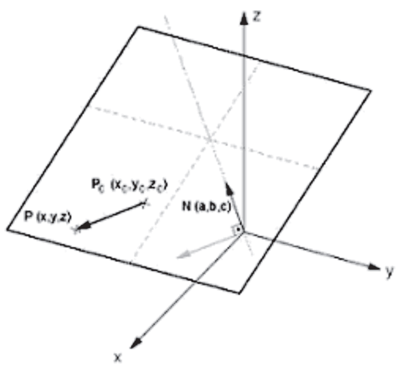


Figura 122 – Determinação do plano
Fonte: Carneiro (2008)

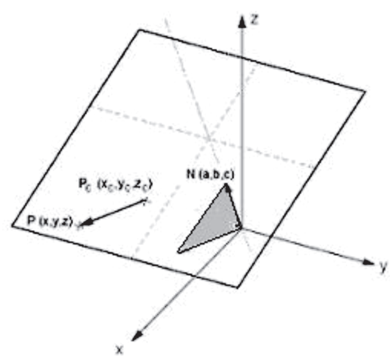


Figura 123 – Vetores na equação do plano
Fonte: Carneiro (2008)

Na Figura 122, temos o plano π que passa pelo ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ e que é ortogonal à direção dada pelo vetor $\vec{n} = (a, b, c)$. Como antes, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se e somente se o vetor $\overrightarrow{P_oP}$ é ortogonal ao vetor $\vec{n}$, e assim podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo cinza determinado pelos vetores $\vec{n}$ e $\overrightarrow{P_oP}$, destacado na Figura 123. Sendo (a, b, c) e $(x - x_o, y - y_o, z - z_o)$ as correspondentes coordenadas dos vetores, obtemos[107]:

$$a \cdot (x - x_o) + b \cdot (y - y_o) + c \cdot (z - z_o) = 0$$

e, portanto, $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, com $d = a \cdot x_o + b \cdot y_o + c \cdot z_o$.

Com essa interpretação geométrica, podemos tornar claras as expressões *sistema determinado, sistema indeterminado, sistema impossível,* as quais sempre são motivo de muita confusão para os alunos quando estão aprendendo a resolver sistemas de três equações e três incógnitas. São as diferentes possibilidades de posições relativas dos três planos que informam as diferentes possibilidades de soluções do sistema 3 x 3 . Por exemplo, se os três planos se interceptam em um único ponto, temos o caso de sistema *determinado* e a solução do sistema é este único ponto de intersecção; se três planos se interceptam segundo uma reta, temos o caso de sistema *indeterminado* que tem como soluções as infinitas triplas (x, y, z) que correspondem a coordenadas de pontos que estão na reta de intersecção dos planos. O sistema é *impossível* quando a intersecção dos planos é um conjunto vazio, ou seja, não existe ponto $P = (x, y, z)$ que satisfaça, simultaneamente, as equações do sistema (por exemplo, a situação em que duas das equações correspondem a planos paralelos).

O entendimento geométrico da equação, $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, além de esclarecer as diferentes possibilidades de solução para sistemas com três incógnitas, também permite decidir, rapidamente, quanto à existência ou não de solução, bastando para isso observar as coordenadas do vetor normal a cada um dos planos. A título de exemplo, trazemos um sistema de duas equações:

$$\begin{aligned} &2 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z = 6 \qquad (3) \\ &2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot z = 4 \end{aligned}$$

Os vetores normais a cada um dos planos têm, respectivamente, as coordenadas (2, 3, 5) e (2, -2, 3) e, portanto, um não é vetor múltiplo do outro. Assim sendo, os planos perpendiculares às direções dadas pelos dois vetores não podem ser paralelos ou idênticos, ou seja, são planos que se interceptam e a intersecção somente pode ser uma reta ou seja, o sistema dado em (3) tem solução, e mais, as soluções são infinitas e correspondem aos pontos que estão na reta de intersecção.

Nos diferentes argumentos matemáticos desenvolvidos anteriormente temos, sempre, um ponto delicado que diz respeito à compreensão do conceito de vetor. É preciso desenvoltura com esse conceito, especialmente quanto: a) ao entendimento de que diferentes "setas" podem representar um mesmo vetor; e b) à notação (x, y) ou (x, y, z), que ora indica as coordenadas de um ponto no plano ou espaço, ora as coordenadas de um vetor. Essas ideias, a serem colocadas sob domínio dos alunos,

107 Como no caso da reta, a equação apresentada a seguir é resultado de manipulação algébrica aplicada à condição dada pelo Teorema de Pitágoras, a saber: $|\overrightarrow{P_oP}|^2 + |\vec{n}|^2 = |\overrightarrow{P_oP} - \vec{n}|^2$.

são ilustradas na Figura 124, em que temos duas setas representantes de um mesmo vetor, pois ambas guardam a mesma informação de direção, sentido e comprimento[108].

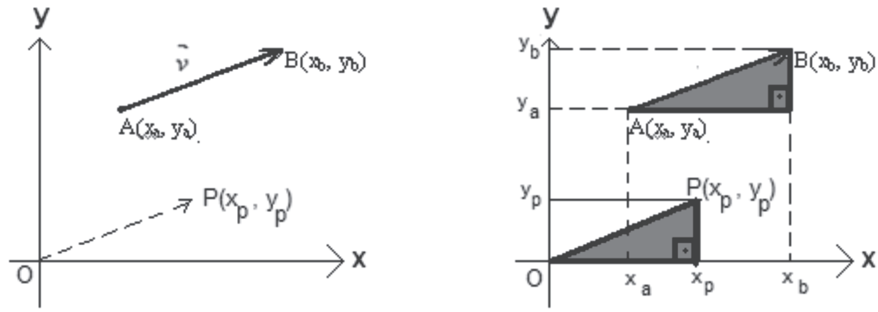


Figura 124 – Coordenadas de um vetor
Fonte: Carneiro(2008)

Qualquer uma das setas pode informar as coordenadas do vetor, pois na seta em destaque, basta fazer a diferença entre as coordenadas dos pontos A e B (as extremidades da seta). Essas mesmas coordenadas também podem ser obtidas por meio da seta representante que está na origem do sistema e, neste caso, as coordenadas são dadas, simplesmente, pelas coordenadas do ponto extremidade da seta.

É interessante também pensar nas coordenadas do vetor como informação de movimento: na coordenada *x* temos a informação de deslocamento horizontal (esquerda/direita, dependendo do sinal da coordenada *x*), e na coordenada *y* temos a informação de deslocamento vertical (para cima/para baixo, dependendo do sinal da coordenada *y*). Essa ideia de movimento realça o quanto as coordenadas de um vetor independem da seta representante que está sendo considerada.

Ainda sobre as dificuldades que se apresentam na aprendizagem do conceito de vetor, em Poynter e Tall (2005) temos exemplos que nos ajudam a entender os cuidados didáticos a serem tomados na introdução desse assunto**.** Na Figura 125, em (a), temos um dos exemplos: os alunos devem obter uma seta representante para o vetor resultante da uma soma de dois vetores, representados pelas duas setas. Como resposta, eles deveriam desenhar, uma seta equivalente a uma daquelas que já está na figura do problema e então marcar a seta representante da soma, indicada em negrito na Figura 125 (b). No entanto, uma resposta que os alunos apresentam é registrada na Figura 125 (c): desenham uma terceira seta, de modo a obter setas consecutivas, e então colocam em destaque aquela que correspondente ao vetor que é a soma de três vetores e não mais dos dois vetores indicados inicialmente. Isto mostra dificuldades dos alunos para trabalharem com setas que são representantes de um mesmo vetor.

108 Uma definição cuidadosa de vetor depende do conceito de relação de equivalência, definido no conjunto de todos os segmentos orientados AB. A relação identifica dois segmentos orientados AB e CD, se o ponto médio de AD também é ponto médio de BC. Define-se um vetor como sendo uma classe de equivalência dessa relação e um elemento da classe é dito “seta representante do vetor”.

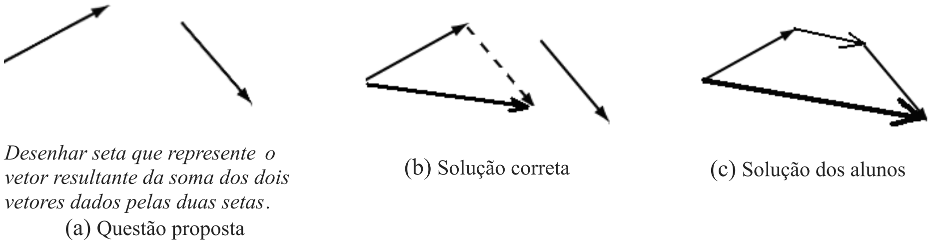


Figura 125 – Dificuldades dos alunos
Fonte: Carneiro (2008)

Segundo Poynter e Tall (2005), para que os alunos compreendam o conceito de vetor como conjunto de setas equivalentes, a transformação translação pode ser bastante adequada. Porém, é importante que o foco não esteja na definição formal da translação, mas sim no efeito físico do movimento. No momento em que tal efeito é entendido, a translação pode ser representada por uma seta que informa a direção, o sentido e a quantidade de deslocamento, escolhida dentre um conjunto infinito de possibilidades de setas. Os autores afirmam que:

> Uma possível solução seria tentar construir o essencial significado matemático de "vetor-livre"[109] e então aplicá-lo à adição de vetores em diferentes contextos, de forma que as leis do paralelogramo e do triângulo e a adição de componentes de vetores sejam todas vistas como diferentes aspectos do mesmo conceito. (POYNTER; TALL, 2005, p. 132).

Quanto à nossa proposta de ensino[110]: tendo em vista as dificuldades de aprendizagem registradas sobre o domínio do conceito de vetor e o nosso propósito de aproximar os aspectos geométricos e algébricos, desenvolvemos uma sequência de atividades com uma parte inicial tratando do conceito geométrico de vetor, da operação de soma de vetores e da operação de multiplicação de vetor por escalar. Ao longo das atividades, os alunos foram provocados tanto no entendimento de que "um vetor é uma coleção de setas com mesma direção, sentido e comprimento", quanto na desenvoltura para operar geometricamente com as setas, de forma a obter representantes de cada vetor resultante de soma de vetores ou de multiplicação de vetor por escalar. Pressupondo o domínio desses conteúdos, prosseguimos com a segunda parte da sequência de atividades, então, visando à introdução das

109 "Vetor-livre" tem o mesmo sentido de "seta representante de um vetor".

110 Em Carneiro (2008) há, no Capítulo 3, o desenvolvimento dos conteúdos relativo a vetores, operações, equações da reta e do plano. No Capítulo 5 é apresentada uma proposta de sequência didática que inicia com o conceito de vetor e finaliza com a dedução da equação do plano.

coordenadas de um vetor e das operações com vetores, agora sob um ponto de vista algébrico. Assim foram constituídos os pré-requisitos para o entendimento da equação do plano.

É importante destacar uma preocupação que sempre acompanhou a concepção da sequência de atividades: a questão da demonstração. Mesmo sem serem utilizadas as palavras "teorema" e "demonstração", houve sempre muita atenção às argumentações dedutivas. Assim, nos preocupamos, por exemplo, em deduzir a equação do plano, e não simplesmente dizer que "$ax + by + cz = d$ é a equação do plano com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$".

O processo de concepção, implementação e avaliação de nossa proposta foi uma pesquisa que teve como metodologia a Engenharia Didática[111]. Essa metodologia permite tratar das relações entre a pesquisa e a ação no sistema de ensino e, assim, procura evidenciar a importância das realizações didáticas na fundamentação e validação de pesquisas que pretendem contribuir para mudanças de práticas de ensino.

4 A EXPERIÊNCIA E OS RESULTADOS

A experiência foi realizada em escola da rede privada, e dela participaram 29 alunos, na faixa etária de 16 a 17 anos. As aulas ocorreram em períodos de 100 minutos e totalizaram sete encontros, detalhados no Quadro 12.

Quadro 12 – Cronograma da experiência

Aula 1	Conceito geométrico de vetor
Aula 2	Operações de soma de vetores e multiplicação por escalar
Aula 3	Coordenadas de vetor e operações sob o ponto de vista algébrico
Aula 4	Ortogonalidade entre vetores e a equação da reta
Aula 5	A equação da reta e resolução de sistemas de equações com duas incógnitas
Aula 6	Vetores no espaço e operações e a equação do plano
Aula 7	A equação do plano e resolução de sistemas de equações com três incógnitas

Fonte: Carneiro(2008, p. 83)

Quanto à dinâmica de trabalho em sala de aula, assim procedemos: no primeiro momento, por meio de uma discussão em grande grupo coordenada pelo professor, foram introduzidos os novos conceitos; no segundo momento, em pequenos grupos, os alunos discutiram e fizeram atividades com foco nas ideias matemáticas e não nos cálculos exaustivos; no terceiro momento, novamente de discussão coletiva, aconteceu a sistematização dos resultados produzidos pela turma.

111 Quanto à metodologia, ver os trabalhos de Michele Artigue, disponíveis nas referências.

Tendo como intenção a participação ativa dos alunos no processo de construção do conhecimento, organizamos, para cada encontro, material escrito[112] consistindo de: a) uma parte teórica relativa aos novos conteúdos, com espaços a serem completados pelos alunos durante o momento de discussão coletiva; b) uma sequência de atividades a serem trabalhadas em pequenos grupos. Assim, livres da preocupação de ficar “copiando a aula”, os alunos dedicaram a maior parte do tempo para a discussão dos conteúdos e para a resolução das atividades. A título de ilustração, na Figura 126, temos parte dos conteúdos apresentados no primeiro encontro, o qual teve como objetivo principal o entendimento do conceito de vetor e das operações de soma e multiplicação por escalar, no contexto geométrico.

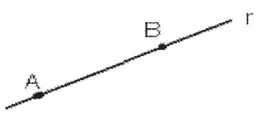
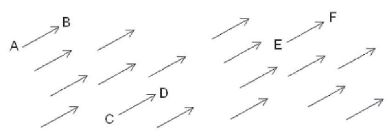
<table>
<tr><th colspan="2">Encontro 1 – O vetor geométrico</th></tr>
<tr><td>O triângulo abaixo se deslocou da posição 1 para a posição 2. Quais são as informações necessárias para que possamos entender esse deslocamento?</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Considere a reta r

</td><td>Definida uma direção, podemos imaginar uma pessoa se deslocando em dois sentidos:_________________________.</td></tr>
<tr><td>Chamamos de vetor uma coleção de setas que tenham:
⇒
⇒
⇒
Portanto, setas que não diferem em nenhuma das três características acima representam o mesmo vetor.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Assim, quando escrevermos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, significa que $\vec{v}$ é representado pela seta $\overrightarrow{AB}$. Porém, qualquer outra seta com o mesmo módulo, direção e sentido, representa também o mesmo vetor $\vec{v}$.</td></tr>
</table>

Figura 126 – Exemplo do material didático
Fonte: Carneiro (2008, p.164)

112 A sequência de atividades proposta aos alunos está na íntegra como anexo da Dissertação *Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações* (CARNEIRO, 2008).

Quanto à produção dos alunos, ao longo da sequência de atividades programada para os sete encontros, documentamos dificuldades e progressos.

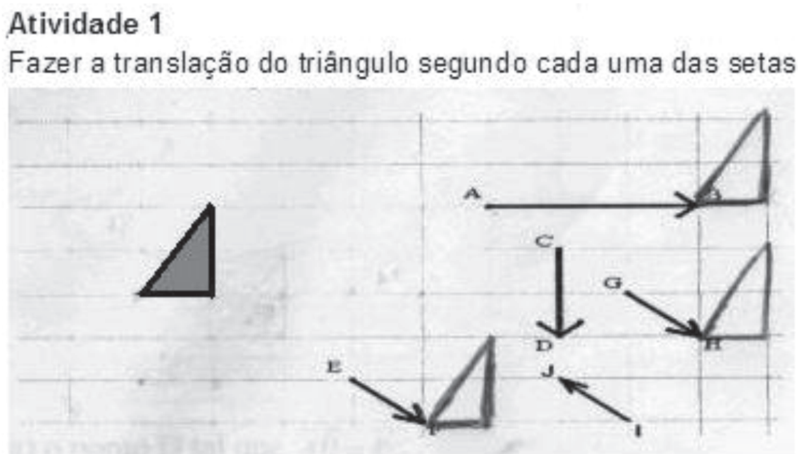


Figura 127 – Conceito de vetor e resolução dos alunos
Fonte: Carneiro (2008, p. 98)

Quanto à atividade inicial que tratava do significado de "seta representante de vetor", um erro recorrente, e similar àqueles que foram apontados na seção anterior, está documentado na resolução de um aluno, apresentada na Figura 127. Nessa resolução, o aluno, como muitos outros, simplesmente desenha um novo triângulo na extremidade de cada uma das setas, o que indica que está atribuindo certo significado à seta, mas dissociado daquele a ser considerado quando se trata do conceito de vetor e indicando dificuldade para escolher uma seta representante adequada para efetuar a translação do triângulo.

A sequência de atividades prosseguiu exigindo um domínio cada vez maior do conceito de vetor e operações, e algumas atividades ilustrativas estão na Figura 128. Na Atividade 3, observamos diferentes encaminhamentos feitos pelos grupos de alunos. Um grupo observou que os lados dos hexágonos eram todos de mesmo comprimento e, assim, enumerou as três distintas direções dadas pelos lados dos hexágonos e multiplicou esse número por dois, já que para uma dada direção existem dois sentidos. Um segundo grupo desenhou todas as setas possíveis, associadas aos lados do hexágono – seis setas no sentido horário e seis setas no sentido anti-horário. E, nesse conjunto de setas, o aluno identificou os pares que correspondiam ao mesmo vetor, obtendo assim o total de seis vetores.

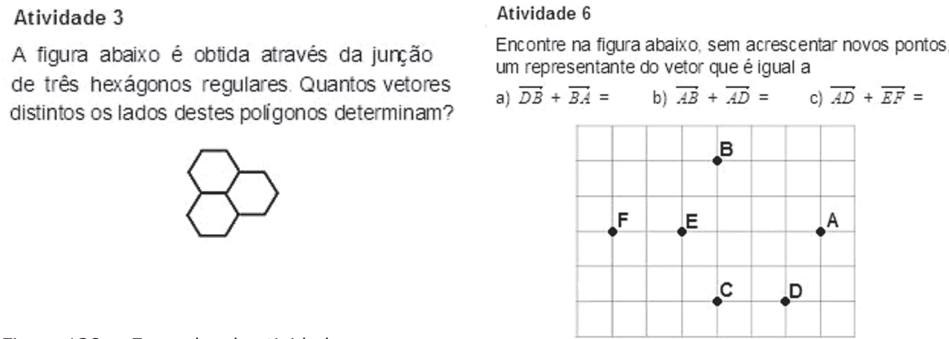


Figura 128 – Exemplos de atividades
Fonte: Carneiro (2008, p. 191 e p. 193)

Foi com um bom domínio do conceito de vetor, sob o ponto de vista geométrico, que os alunos iniciaram o estudo de vetores sob o ponto de vista algébrico. Para a introdução das coordenadas de um vetor, inicialmente foi tomada a seta representante na origem do sistema de coordenadas e, dessa forma, foi determinado o par de números que guarda a informação de direção, sentido e comprimento que determina o vetor; em um segundo momento foram determinadas as coordenadas do vetor por meio de seta representante que não está na origem do sistema. Já nas primeiras atividades do terceiro encontro, os alunos mostraram entendimento quanto ao cálculo das coordenadas, conforme solução registrada na Figura 129.

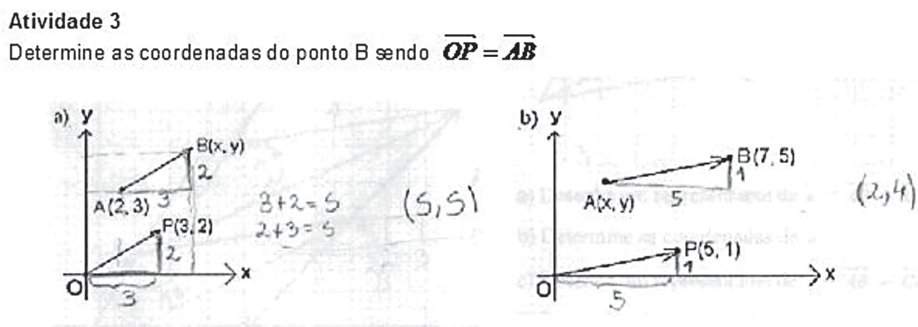
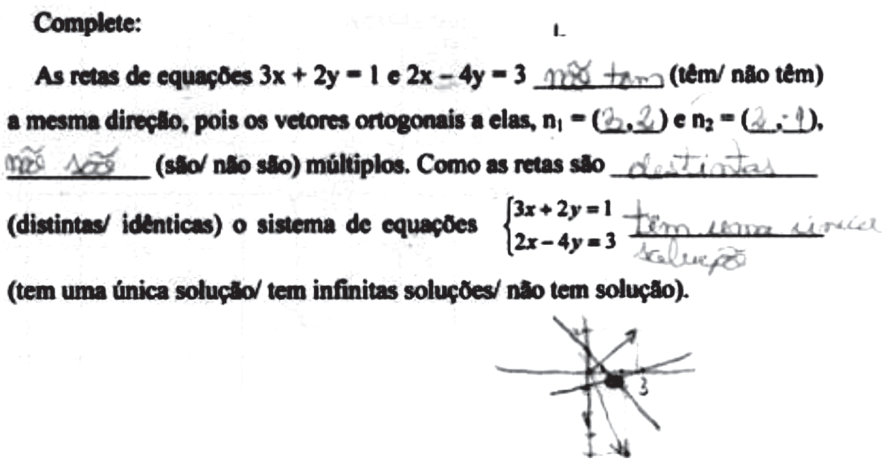


Figura 129 – Coordenadas de um vetor e resoluções de alunos
Fonte: Carneiro(2008, p.116)

No quarto encontro, foi feita a dedução da condição que garante a ortogonalidade de dois vetores usando o teorema de Pitágoras e o cálculo de distância entre dois pontos.



Complete:

As retas de equações 3x + 2y = 1 e 2x – 4y = 3 não tem **(têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (**3 , 2**) e n_2 = (**2 , -1**), não são **(são/ não são) múltiplos. Como as retas são** distintas **(distintas/ idênticas) o sistema de equações** $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$ tem uma única solução

(tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

Figura 130 – Sistema de equações e resolução de aluno
Fonte: Carneiro (2008, p.131)

Logo após, foi apresentada nova interpretação para a equação da reta, de acordo com a discussão feita na seção anterior. Foi assim que os alunos entenderam que, na equação geral $a \,.\, x + b \,.\, y = c$, os coeficiente *a* e *b* correspondem às coordenadas do vetor normal à reta, e eles, junto com o coeficiente *c*, determinam pontos que pertencem à reta (por exemplo, o ponto (0, *c/b*), se *b* não é zero; ou o ponto (*c/a*, 0), se *a* não é zero). Com essa interpretação da equação da reta, os alunos analisaram, sob um ponto de vista qualitativo, as soluções de sistemas com duas equações e duas incógnitas, tendo-se na Figura 130 uma amostra do trabalho realizado.

Uma vez entendido o conceito de vetor e operações em dimensão dois, a transposição desses mesmos conceitos para o espaço deu-se de forma bastante imediata, já que a maior exigência cognitiva foi quanto à visualização de vetores e de planos no espaço. Nesse sentido, figuras com cuidadosa ideia de profundidade, de modo a bem identificar as coordenadas de pontos no espaço, foram um motivo de atenção na apresentação do material didático. Assim, foi sem maiores dificuldades que, por exemplo, os alunos determinaram as coordenadas de vetores com setas representantes em diferentes posições, conforme ilustra a Figura 131.

Na figura abaixo, encontre as coordenadas dos vetores representados pelas diferentes setas:

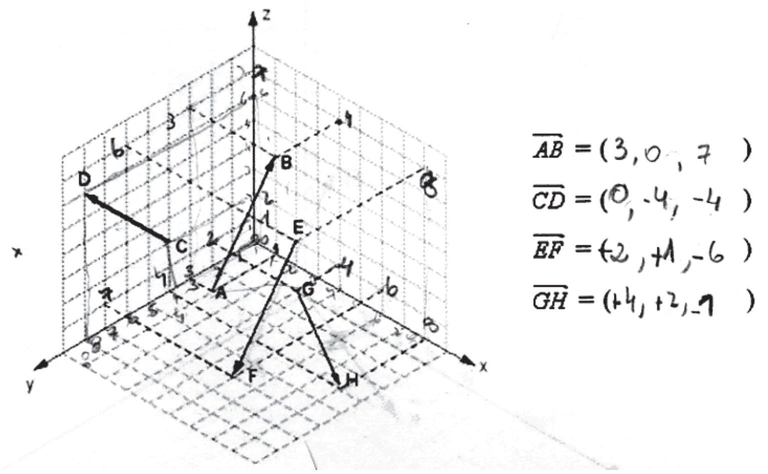
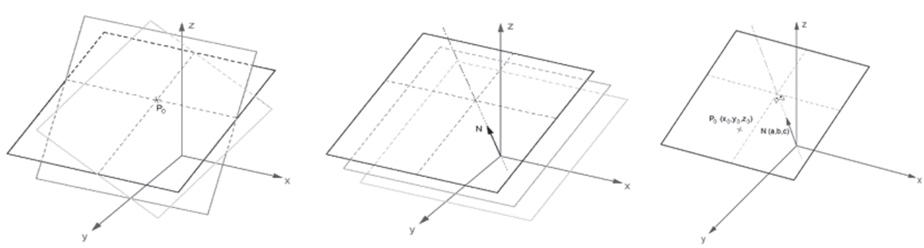


Figura 131 – Coordenadas de vetores no espaço e resolução de aluno
Fonte: Carneiro (2008, p. 136)

Também foi por meio do estudo de uma coleção cuidadosamente elaborada de figuras que os alunos entenderam que um plano fica completamente determinado por um ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ e um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ e, dessa forma, acompanharam a argumentação dedutiva que explica porque o conjunto de pontos $P = (x, y, z)$, com coordenadas satisfazendo a equação $a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$, constituem o plano que passa pelo ponto P_o e que é ortogonal à direção dada pelo vetor $\vec{n}$, conforme ilustra a Figura 132.



Planos passando por P_o — Planos ortogonais a $\vec{n}$ — Plano determinado por P_o e $\vec{n}$

Figura 132 – Determinação de um plano
Fonte: Carneiro (2008, p. 73 e p.74)

5 COMENTÁRIOS FINAIS

A experiência de ensino realizada segundo a metodologia de investigação da Engenharia Didática, e aqui relatada, procurou avaliar se, por meio da geometria vetorial, é possível desenvolver na escola o tópico de sistema de equações de forma a agregar nele um maior valor formativo.

Nossa avaliação é positiva, pois a análise da produção dos alunos mostra que ao associarmos a álgebra escolar a uma concretude geométrica, estamos contribuindo para a construção de conhecimento matemático mais pleno de significado. É nesse sentido que chamamos a atenção para os raciocínios de natureza geométrica que poderiam estar mais presentes em situações que, na escola, são tratadas apenas com raciocínios de natureza algébrica. Essa predominância das representações algébricas na Matemática escolar pode ter razão na presença de procedimentos algorítmicos que resolvem, de forma quase mecânica, as equações. Já os problemas de natureza geométrica, de um modo geral, exigem raciocínios e procedimentos de construção para os quais não existem regras pré-definidas. Cada novo problema proposto desafia na criação de uma nova estratégia de resolução.

No produto didático disponibilizado como parte do trabalho de dissertação, vislumbramos que é na interação entre dois domínios – o algébrico e o geométrico – que é possível dar significado às clássicas expressões que aparecem nos livros didáticos – "sistemas determinados", "sistemas indeterminados", "sistemas impossíveis" – quando tratam do tópico sobre sistemas de equações.

Uma preocupação que nos acompanhou ao longo da realização da experiência refere-se à clareza e à precisão da linguagem a ser utilizada pelo professor, dada a sua importante contribuição no entendimento, por parte dos alunos, dos conceitos que são propósito de aprendizagem. Ao introduzirmos, por exemplo, o conceito de vetor, sempre tivemos o cuidado de usar a expressão "seta representante do vetor" ou "a coleção de setas que representam o vetor". Se, ao referir-se a uma dada "seta", o professor usa a palavra "vetor" no início do estudo de vetores, podem acontecer complicações conceituais. Isso porque o aluno encontra-se no momento de buscar entender que "um vetor é uma coleção de setas com certas propriedades em comum".

Consideramos que a introdução da geometria vetorial na escola, que permita tratar a resolução de sistemas de equações também sob o ponto de vista geométrico, é possível. Ao longo da realização da dissertação, grande foi o tempo alocado na elaboração da sequência de atividades que foi proposta aos alunos. Muitas vezes foi preciso reconsiderar os caminhos a serem seguidos; afinamos as escolhas das atividades; pensamos e repensamos sobre a forma mais simples e clara de trabalhar com determinado conteúdo; ponderamos sobre a importância das discussões entre os alunos, mas também sobre a importância da intervenção do professor.

É claro que adaptações, de modo a atenderem as especificidades de cada turma de alunos, sempre se fazem necessárias. Dentre elas, temos aquelas que dizem respeito aos diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos, e aqui uma leitura na íntegra da dissertação pode também ajudar, pois nela há uma análise minuciosa da produção dos alunos, em que são apontadas as dificuldades que se apresentaram no processo de aprendizagem.

6 REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org). *Didática das Matemáticas*. p. 193-217. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine; MORENO, Luis; GÓMEZ, Pedro. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 61-97.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Tradução de E. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BOYÉ, Anne. ¿François Viète, inventor del álgebra? In: SEMINARIO «OROTAVA» DE HISTORIA DE LA CIENCIA, Años XI-XII, Nantes. *Actas...* p. 251 – 276. Canarias: 2007. Disponível em: <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/fundoro/web_fcohc/ 005_publicaciones/seminario/ciencia_moderna.htm>. Acesso em: 05 mar. 2007

CARNEIRO, Pedro Sica. *Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações.* 213 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/13337>. Acesso em: 22 abr. 2011.

CHARBONNEAU, Louis. From Euclid to Descartes: Algebra and its Relation to Geometry. *In*: BEDNARZ, N. *et al*. (Ed.). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 15-37.

COMMANDINO, Frederico. *Euclides – Elementos de Geometria*. Edições Cultura, 1944. Disponível em: <http:*//www.dominiopublico.gov.br*>. Acesso em: 10 jul. 2007.

CROWE, Michael. *A history of Vector Analysis*. London: University of Notre Dame Press, 1967.

DOUADY, Regine; PARSYSZ, Bernard. Geometry in the classroom. In: MAMMANA, Carmelo; VILLANI, Vinicio. (Eds.). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21 st Century*. p. 159-192. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas: UNICAMP, 1997.

GEOMETRY OF RENÉ DESCARTES. Tradução por E. Smith e M. Latham. New York: Dover Publications, 1954.

POYNTER, Anna; TALL, David. What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching. *In*: HEWITT, Dave; NOYES, Andy. (Ed). *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education*. p. 128-135. University of Warwick, 2005. Disponível em: <www.bsrlm.org.uk>. Acesso em: 08 mai. 2007.

APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE TRABALHO A PARTIR DE PLANILHAS ELETRÔNICAS

Marcelo Salvador Cóser Filho

INTRODUÇÃO

A maioria dos professores de Matemática já deve ter se encontrado na seguinte situação: turma agitada, não muito disposta a seguir as orientações recebidas, por mais diversas que sejam as intervenções realizadas. O professor não desiste e insiste em obter de seus estudantes um mínimo de dedicação e atenção para o assunto que pretende desenvolver. Nisso, um dos alunos contra-argumenta, cheio de convicção: "Por que perder meu tempo com isso se *nunca* utilizarei tais conhecimentos na minha vida?".

É uma afirmação forte. Pior: difícil de ser confrontada, visto que ela provavelmente não está de todo errada. Afinal, muito da Matemática habitualmente estudada nos colégios, especialmente no Ensino Médio, tem suas aplicações direcionadas para profissões específicas e situações essencialmente técnicas. Por exemplo, não é difícil convencer a maioria dos estudantes de que problemas elementares de Programação Linear podem ser resolvidos analisando a representação gráfica de retas. No entanto, a quantidade de estudantes que de fato aplicarão tal conceito no futuro, se analisada comparativamente ao universo deles, é irrisória.

Visivelmente é possível esboçar um argumento na seguinte linha: a Matemática é construída a partir de um tipo de raciocínio muito especial, se comparada às demais ciências, e tal raciocínio apenas é desenvolvido e estimulado com o estudo de, é claro, Matemática. No entanto, esse argumento não costuma surtir um efeito motivacional muito significativo em alunos de Ensino Médio. Uma característica de adolescentes em geral é o imediatismo com que diversas situações são encaradas, não sendo comum realizarem planejamentos sequer a médio prazo.

O que fazer, então, com aquela turma agitada descrita anteriormente? Aplicações da Matemática do Ensino Médio são, em sua maioria, muito distantes da realidade de estudantes entre 14 e 17 anos. Ainda, dentre suas preocupações provavelmente não consta o desejo de estimular um tipo especial de raciocínio. Portanto, foi essa dúvida que serviu de motivação para o desenvolvimento do presente material.

A Matemática Financeira possui diversas aplicações práticas, tais aplicações são pertinentes às mais variadas pessoas e profissões, desde aquelas interessadas em beneficio próprio como aquelas com finalidades profissionais específicas. Não obstante, tal campo estimula a capacidade de tomar decisões e a consequente necessidade de fundamentação teórica para que se decida com correção. Por fim, exige dos alunos compreensão de conceitos matemáticos, de um determinado método de resolução e, importante, de adaptação desse método.

Tal campo, no entanto, é deixado de lado com frequência, pois poucos livros didáticos o abordam, e, quando abordam, o fazem em sua maioria de modo equivocado e/ou limitado. São poucos, praticamente inexistentes, os referenciais teóricos nesse campo voltados especificamente para o Ensino Médio. Como consequência, pode-se esperar um desconforto dos professores em abordar esse campo, visto que eles também não possuem uma formação adequada para discuti-lo, ou seja, a Matemática Financeira acaba não sendo estudada no Ensino Médio e, dependendo da formação profissional escolhida pelo aluno, não será estudada em momento algum.

Esse fato é surpreendente, visto que as movimentações financeiras fazem parte da rotina de uma parcela considerável da população mundial, em diferentes níveis: desde pessoas atraídas por uma venda com 10% de desconto à vista ou em duas vezes **sem juros** até aquelas que desejam liquidar o saldo devedor de um financiamento após certo número de parcelas pagas, passando por aquelas que desejam organizar seu próprio plano de previdência. Não faltam exemplos em que um conhecimento sólido de Matemática Financeira é requisitado.

Pensando em suprir essa lacuna, foi realizado em 2005 um estudo de Matemática Financeira com os estudantes do segundo ano do Ensino Médio de um colégio particular de Porto Alegre, Rio Grande do Sul. A referência bibliográfica utilizada foi o 11º volume da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar* (IEZZI *et alii*, 2004), uma das poucas publicações na área direcionada a estudantes de Ensino Médio. Foram estudadas movimentações financeiras derivadas do conceito de juros compostos, tais como sequências uniformes de depósitos e de pagamentos.

A metodologia adotada foi a seguinte: em um primeiro momento, foi proposta aos alunos uma situação problema. Após respondê-la, procurou-se generalizar o raciocínio, e, assim, deduzir as fórmulas correspondentes a cada situação. O trabalho com calculadoras científicas se tornou imprescindível, já que cálculos de valores tais como $1{,}015^{20}$ eram rotineiros. No entanto, apesar de a resolução dos problemas propostos ser muitas vezes aborrecida, dada a grande quantidade de operações envolvendo números decimais, percebia-se nos alunos um interesse em responder corretamente às perguntas feitas e, mais do que isso, em se apropriarem dos conceitos estudados, dadas as razões explicitadas anteriormente.

Entretanto, inconvenientes foram detectados. Alguns alunos confundiam-se a respeito de qual fórmula, dentre as estudadas, corresponderia a qual movimentação financeira. A falta de habilidade para efetuar muitas operações com quatro ou mais casas decimais também se tornou um empecilho. Com isso, a motivação inicial acabou se diluindo junto com as dificuldades de manipulação dos dados, fazendo com que o alcance esperado para o trabalho fosse limitado. Ainda, a resolução via fórmulas fornecia apenas o resultado final, sem fornecer um panorama da evolução da movimentação financeira. Por exemplo, não possibilitava que o estudante visualizasse a variação dos juros obtidos ao longo dos meses em uma sequência de depósitos. Dessa maneira, fazia-se necessária uma reformulação na metodologia para o ano seguinte, visto que a convicção da importância do estudo de Matemática Financeira permanecia viva.

Para o ano seguinte, o foco do trabalho foi alterado sensivelmente, já que em vez de dar ênfase às fórmulas específicas para cada situação, passou-se a destacar a essência de cada movimentação financeira. Para ilustrar, considere uma sequência de depósitos mensais de valor D, capitalizados mensalmente sob uma taxa de juros i. Ao final do primeiro mês, o saldo é somente D. Para o mês seguinte, devem ser adicionados um novo depósito D e os juros ganhos no mês, que são iguais a $i.D$. Decorrido mais um mês, adiciona-se ao saldo **anterior** o mesmo valor D depositado, mas os juros agora são maiores, visto que o saldo é maior do que no mês anterior, ou seja, o saldo varia de modo recursivo: capitaliza-se o saldo anterior e adiciona-se um novo depósito. Ao trabalhar-se exclusivamente com a fórmula específica, esse raciocínio é destacado somente no momento de sua dedução, e nunca mais é necessário. Uma preocupação para o trabalho, para o ano de 2006, foi enfatizar a recursão e usá-la como principal meio para resolução de problemas.

A solução encontrada foi a utilização de um *software* específico para a construção de planilhas eletrônicas. O trabalho seria realizado exclusivamente em um laboratório de informática, com os alunos trabalhando em duplas ou em trios, discutindo e construindo planilhas que abordassem as principais movimentações financeiras de modo recursivo. Seriam propostos também problemas que exigissem dos estudantes uma adaptação da recursão discutida coletivamente com o professor. O uso de recurso computacional seria imprescindível, visto que as planilhas construídas, às vezes, possuíam mais de 100 linhas e precisavam ter todas as suas células constantemente alteradas, o que seria inviável de se fazer manualmente.

Para o ensino de Matemática Financeira em nível superior, existem diversos livros que, em seus títulos, divulgam o estudo do assunto via planilhas eletrônicas. No entanto, uma breve pesquisa possibilitou observar que os recursos utilizados das planilhas pelos estudantes eram as funções que aplicavam as fórmulas específicas para cada situação. Bastaria ao aluno digitar em algumas células os valores correspondentes a prazo, taxa e outros, e, então, selecionar as funções desejadas. Por exemplo, para calcular o preço à vista de um determinado produto que seria pago em 24 prestações mensais de R$ 500, sob uma taxa de 1% ao mês, sem entrada, basta entrar com o comando *VP(1%; 24; 500; ; 0)* em uma célula qualquer do *Excel*[113], e o valor R$ 10.621,69 é fornecido.

É claro que, com tal recurso, a dificuldade operacional encontrada anteriormente seria totalmente eliminada. Afinal, o *software* faria todos os cálculos, e bastaria ao aluno inserir corretamente os valores. No entanto, o papel do aluno aqui se limitaria a preencher células, somente. Não seria exigida uma compreensão do que está sendo feito. Não seria exigido, também, que o aluno pudesse intervir na resolução e adaptá-la a uma situação diferente. Por exemplo: e se fosse dada uma carência de três meses para o consumidor? E se desejarmos liquidar a dívida após pagar dez prestações de R$ 500, qual seria o valor necessário? A resposta, como não é difícil intuir, dada a existência de juros, não corresponde a 10.621,69 – 10 x 500. No entanto, essa resolução não dá nenhuma indicação de como adaptá-la ou a possibilidade de analisar a movimentação financeira ao longo dos 24 pagamentos. Possivelmente existam funções específicas nesse tipo de *software* que deem conta das situações já citadas. No entanto, isso exigiria que o aluno se especializasse no seu uso, e, mesmo nesse caso, caberia a ele o papel de preencher células e de conhecer fórmulas.

Seria preciso então desenvolver um material que atendesse às expectativas existentes e às necessidades de um estudo de Matemática Financeira em nível de Ensino Médio. Por conseguinte, um material que possibilitasse o estudo de situações cotidianas, como o pagamento de dívidas e depósitos continuados, dentre outras; que possibilitasse ao aluno a compreensão do que está sendo feito – mais do que obter respostas, entendê-las, interpretá-las e adaptá-las, se fosse o caso; que estimulasse a capacidade de tomar decisões por meio da capacitação para a qualificação dessas decisões. Um método de trabalho cujas dificuldades operacionais seriam suavizadas, para que a preocupação estivesse voltada somente ao problema estudado, e não para o cálculo de $500 \times \frac{1{,}01^{24} - 1}{0{,}01 \times \left(1{,}01^{24}\right)}$, que forneceria o valor de R$ 10.621,69, encontrado como solução para a situação anterior.

Nesse capítulo será apresentado um material que procurou atingir tais objetivos[114]. Durante os anos de 2005, 2006 e 2007, esse material foi concebido, escrito, aplicado, analisado, alterado, aplicado mais uma vez e posteriormente alterado de novo. Segue sendo aplicado desde então, fazendo parte do Núcleo de

113 O Microsoft Excel é um programa de planilha eletrônica de cálculo escrito e produzido pela Microsoft.

114 A versão completa do material e da pesquisa realizada é apresentada na dissertação de Cóser Filho (2008).

Conhecimentos da série no colégio em questão. Ainda, foi divulgado em diferentes congressos, em que foi apresentado a vários professores de diversos lugares do Brasil, sempre sob a forma de minicursos.

O principal objetivo desse material é possibilitar um estudo qualificado de Matemática Financeira com estudantes de Ensino Médio. Por qualificado, entenda-se: amplo, no sentido de abordar diversos problemas e movimentações financeiras, com variações; consistente, no sentido de estar matematicamente correto; adequado, no sentido de permitir que os alunos se apropriem de conceitos fundamentais e saibam utilizá-los e adaptá-los quando necessário. Ressalta-se que não existe, no universo de livros analisados durante sua elaboração, uma proposta que contemple simultaneamente essas três virtudes. O texto também tem como objetivo suprir uma antiga reivindicação dos alunos em geral, que é o estudo de temas mais próximos ao cotidiano, e não necessariamente voltados para fins técnicos em profissões específicas. A inserção de Matemática Financeira como tópico relevante a ser estudado dispensa maiores explicações, especialmente em um país capitalista ocidental.

CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA

O material produzido sobre Matemática Financeira foi aplicado duas vezes, em 2006 e 2007, durante o horário regular de aula, com todos os estudantes das turmas do segundo ano do Ensino Médio de um colégio da rede particular de Porto Alegre. As idades dos participantes eram, em sua maioria, entre 15 e 17 anos, e a carga horária semanal dedicada à Matemática era de quatro períodos. O conhecimento prévio dos alunos resumia-se a como calcular um determinado percentual de certo valor multiplicando-o pelo número decimal correspondente a essa porcentagem. O trabalho com Matemática Financeira estendeu-se por cerca de um mês, com todos os encontros ocorrendo na sala de Informática do colégio, e os alunos trabalhando em grupos de dois ou três alunos, cada grupo em um computador, utilizando o *software* *Calc*[115], parte integrante do pacote gratuito *BrOffice*.

Os encontros com os alunos tinham dois formatos, essencialmente. Em um primeiro momento, ao iniciar-se o estudo de uma nova movimentação financeira, uma situação-problema era discutida coletivamente, com participação ativa do professor, sendo desenvolvida a rotina de programação que se aplicaria a essa nova movimentação. Em um segundo momento, os alunos, divididos em grupos, trabalhavam em diversos exercícios propostos e questionavam o professor quando necessário, salvando as diferentes versões de suas planilhas.

115 Calc é um *software* de planilha eletrônica multiplataforma de código aberto, desenvolvido originalmente pela StarDivision e posteriormente pela Sun Microsystems.

O professor teve um papel importante no processo: era ele que iniciava a discussão sobre uma nova movimentação financeira a ser estudada, e, enquanto os grupos trabalhavam, o professor circulava livremente e atendia os chamados dos alunos. Na interação com os alunos, procurou não induzir o desenvolvimento mais adequado para cada exercício, na medida do possível. A maioria das perguntas dos alunos era rebatida com outra pergunta, em geral sobre a **definição** de conceitos. Por exemplo, em um determinado exercício, uma pessoa acumulou certa quantia, e passaria a fazer saques mensais. Foi perguntado qual o valor máximo a ser sacado, de modo a possibilitar um determinado número de saques. No entanto, no momento de programar o valor dos saques, alguns grupos supunham um valor menor do que o valor obtido com os juros do mês. Assim, o saldo, mesmo ocorrendo saques, aumentava com o passar do tempo. Quando esses grupos solicitavam explicação para esse "fenômeno", o professor, após identificar o problema, perguntava o significado da terceira coluna – no caso, a coluna dos juros. Os alunos respondiam e retomavam o significado do conceito de juros. Também era solicitado que retomassem o papel desse valor na programação. A partir daí, a conclusão de que o saldo somente poderia aumentar – já que o ganho mensal era maior do que o valor sacado – não demorava a surgir. Por fim, o professor também era responsável pelos registros, a fim de facilitar a posterior análise, como descrito anteriormente.

Os conceitos estudados foram os seguintes: inicialmente, discutiu-se a ideia inerente aos juros compostos; a partir dela, partiu-se para o estudo das sequências de depósitos, uniformes ou não; por fim, estudou-se o comportamento de sequências de pagamentos de diversos tipos, uniformes ou não, com e sem carência, com e sem entrada, dentre outras variações.

Por último, é importante destacar como foi possível inserir um novo tema no já saturado Ensino Médio, sem comprometer o estudo de outros assuntos habitualmente estudados. Com essas turmas de segundo ano, foram estudados ao longo do ano os seguintes assuntos: Progressões, Matemática Financeira, Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares e Trigonometria. No primeiro ano de aplicação, também foi trabalhada a Geometria Espacial, e no segundo ano de aplicação foram estudadas Análise Combinatória e Teoria das Probabilidades. Como mencionado, o trabalho com Matemática Financeira se estendeu por cerca de um mês. A saída para inserir esse novo tema, que não costuma ser trabalhado, foi reduzir os demais conceitos estudados ao longo do ano. Foram priorizados métodos mais gerais ao invés de se investir na memorização e aplicação de fórmulas específicas. Por exemplo, o escalonamento de sistemas lineares substituiu – com vantagem – a Regra de Cramer. O estudo de Geometria Espacial foi feito a partir do Princípio de Cavalieri e de conhecimentos prévios de Geometria Plana, deixando de lado a grande maioria das fórmulas habitualmente estudadas (por exemplo, a diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de medidas a, b, c foi calculada via Teorema de Pitágoras, e foi ignorada a relação $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$). Todo o estudo de Análise Combinatória foi baseado no Princípio Fundamental da Contagem. O estudo de equações trigonométricas foi feito simultaneamente ao estudo de funções trigonométricas. Essas e outras modificações propiciaram a inserção de um novo tema sem perda de qualidade no trabalho realizado. Cabe ao professor que decidir também trabalhar com Matemática Financeira identificar onde, na sua prática, é possível realizar tal enxugamento. Os exemplos mencionados servem como ilustração: não será tema desse texto abordar como fazer isso, mas sim mostrar que a inserção desse novo tema no Ensino Médio é proveitosa.

PROCESSOS RECURSIVOS NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

O estudo de cada movimentação financeira será feito sempre de maneira recursiva, destacando a variação observada ao longo do tempo, em detrimento do simples cálculo de valores. Para maior clareza na descrição do método, serão apresentados exemplos de sua aplicação, todos eles retirados do livro "Progressões e Matemática Financeira" (MORGADO, 1993). Registra-se que os problemas discutidos aqui diferem em valores e taxas daqueles discutidos com os estudantes, sendo os números apresentados, em geral, defasados, visto que o livro foi publicado em 1993. Optou-se por utilizar esses exemplos para comparar a resolução convencional com o método de trabalho aqui proposto, considerando que a Coleção da qual o livro faz parte e seus autores gozam de excelente reputação no meio.

1) Cristina toma um empréstimo de 150 u.m. a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Cristina três meses depois?

A resolução proposta pelos autores é dada após justificarem a conhecida relação $C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$, onde C_n é o montante obtido de um capital inicial C_0 em n períodos de tempo, no regime de juros compostos de taxa i. No caso, $C_3 = 150 \cdot (1+0,12)^3 \cong 210,74$.

O problema é respondido com correção. No entanto, não se tem noção da variação da dívida ao longo desses três meses. Tal problema seria resolvido com a seguinte planilha, tendo como único ponto de partida o fato de que i % de uma dada quantia C_0 pode ser calculado por $\frac{i}{100} \cdot C_0$:

	A	B	C	D
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	DÍVIDA 2
2	0	150	0	=B2+C2
3	1	=D2		

Figura 133 – Construção da Planilha
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Inicialmente, Cristina devia 150 u.m. Em um primeiro momento, não há cobrança de juros.

É importante destacar um fato: a célula D_2 está sendo definida como de mesmo valor que $B_2 + C_2$. Desse modo, o *software* está sendo programado a calcular a dívida ao final do mês como sendo sempre o resultado da soma da dívida anterior com os juros a serem pagos no mês. Ainda, é a célula B_3 que, ao ser definida como de mesmo valor que D_2, implementa o caráter recursivo do método. De modo geral, no caso, $B_N = D_{N-1}$.

	A	B	C	D
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	DÍVIDA 2
2	0	150	0	150
3	1	150	=0,12*B3	

Figura 134 – Construção da Planilha
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

O *software* é programado a calcular o valor dos juros do mês a partir da dívida no início do período.

	A	B	C	D
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	DÍVIDA 2
2	0	150	0	B2+C2
3	A2+1	D2	0,12*B3	B3+C3

Figura 135 – Construção da Planilha
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Agora, toda a planilha está construída a partir dos valores iniciais do problema: o capital a ser reajustado e a taxa usada.

	A	B	C	D
1	**MÊS**	**DÍVIDA 1**	**JUROS**	**DÍVIDA 2**
2	0	150	0	150
3	1	150	18	168
4				
5				

Figura 136 – Construção da Planilha
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Dessa maneira, é possível solicitar ao *software* que estenda sua programação até a data desejada. No caso, até o final do terceiro mês.

	A	B	C	D
1	**MÊS**	**DÍVIDA 1**	**JUROS**	**DÍVIDA 2**
2	0	150,00	0,00	150,00
3	1	150,00	18,00	168,00
4	2	168,00	20,16	188,16
5	3	188,16	22,58	**210,74**

Figura 137 – Planilha finalizada
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

O problema, então, é resolvido a partir da obtenção da planilha que ilustra toda a movimentação no período.

A visualização de toda a movimentação permite ao estudante acompanhar a diferença principal entre os juros simples e os juros compostos, que reside na capitalização do valor inicial e do valor imediatamente anterior. Ainda, permite ao estudante extrapolar o problema: por exemplo, se Cristina tivesse se comprometido a pagar a dívida em três meses, mas resolvesse liquidá-la em dois meses, qual deveria ser a quantia disponível na data? Tal situação estimula a capacidade do aluno de adaptar o problema, e transpor tal adaptação para outras situações. Com isso, é desenvolvida a capacidade do aluno de tomar decisões, já que ele consegue obter dados que tornem tal decisão viável.

2) Geraldo tomou um empréstimo de 300 u.m. a juros mensais de 15%. Dois meses após, Geraldo pagou 150 u.m. e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

A resolução proposta pelos autores é dada a partir da ideia de que, para obter o valor atual de um capital, basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$. Dessa forma, a parcela de 150 u.m. e a parcela P desejada têm seus valores calculados na mesma época que o empréstimo de 300 u.m. Assim, $300 = \frac{150}{(1+0,15)^2} + \frac{P}{(1+0,15)^3} \Rightarrow P \cong 284$ u.m.

É possível construir uma planilha que explicite a variação da dívida da mesma maneira que a efetuada no exemplo anterior:

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PGTO	DÍVIDA 2
2	0	300,00	0,00	0,00	=B2+C2-D2

Figura 138 – Construção da Planilha
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

É preciso inserir uma coluna para os pagamentos, que ocorrerão a partir do segundo mês.

A célula E_N está sendo definida como $B_N + C_N - D_N$, de modo que do saldo devedor seja descontado o pagamento efetuado no mês em questão.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PGTO	DÍVIDA 2
2	0	300,00	0,00	0,00	300,00
3	1	300,00	45,00	0,00	345,00
4	2	345,00	51,75	150,00	246,75
5	3	246,75	37,01		=B5+C5

Figura 139 – Finalização da Planilha
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

A planilha é construída com os mesmos cuidados do exemplo anterior. No segundo mês, é feito o pagamento de 150 u.m. A dívida, então, é somada com os juros do terceiro mês, e é precisamente esse o valor a ser pago na última parcela.

Mais uma vez, é importante destacar como a visualização da movimentação traz muito mais informações do que o simples cálculo da parcela a ser paga.

3) Um bem, cujo preço à vista é 120 u.m., é vendido em oito prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

Para tal situação, é deduzida a relação $A=P\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, onde A tem o mesmo valor, na data inicial, que n pagamentos iguais a P, sendo i a taxa de juros. Dessa forma, $120=P\cdot\frac{1-(1+0{,}08)^{-8}}{0{,}08}\Rightarrow P\cong 20{,}88$.

Mais uma vez, a resolução limita-se a destacar o valor da parcela, mas não permite ao estudante contemplar a variação da dívida ao longo do tempo. Como mencionado, a visualização do desenrolar do processo é importante para estimular a capacidade de tomar decisões e contribuir para uma melhor compreensão do significado da operação financeira efetuada. Será construída a seguinte planilha, nos moldes do que foi feito até agora:

	A	B	C	D	E
1	**MÊS**	**DÍVIDA 1**	**JUROS**	**PGTO**	**DÍVIDA 2**
2	0	120,00	0,00	0,00	120,00
3	1	120,00	9,60	?	

Figura 140 – Compreensão do problema
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Não é efetuado nenhum pagamento como entrada, e não há incidência de juros durante o primeiro período.

Aqui, deparamo-nos com um problema. A construção da planilha depende do conhecimento de elementos cruciais para a recursão: a taxa de juros, para o cálculo dos mesmos, e a parcela a ser paga, para ser debitada da dívida inicial. No entanto, a parcela é desconhecida: é exatamente seu valor que é necessário calcular. Para continuar, iremos supor um valor qualquer para a parcela.

	A	B	C	D	E
1	**MÊS**	**DÍVIDA 1**	**JUROS**	**PGTO**	**DÍVIDA 2**
2	0	120,00	0,00	0,00	120,00
3	1	120,00	9,60	30,00	99,60
4	A3+1	E3	0,08*B4	D3	B4+C4-D4

Figura 141 – Planilha estruturada
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Supondo 30 u.m. para o valor da parcela, é possível construir a planilha recursivamente, e observar a variação da dívida até o oitavo pagamento.

	A	B	C	D	E
1	**MÊS**	**DÍVIDA 1**	**JUROS**	**PGTO**	**DÍVIDA 2**
2	0	120,00	0,00	0,00	120,00
3	1	120,00	9,60	30,00	99,60
4	2	99,60	7,97	30,00	77,57
5	3	77,57	6,21	30,00	53,77
6	4	53,77	4,30	30,00	28,08
7	5	28,08	2,25	30,00	0,32
8	6	0,32	0,03	30,00	-29,65
9	7	-29,65	-2,37	30,00	-62,03
10	8	-62,03	-4,96	30,00	**-96,99**

Figura 142 – Planilha finalizada
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Pagando 30 u.m. por mês, após oito pagamentos, o saldo devedor é de -96,99, o que significa que a parcela a ser paga é menor do que 30 u.m. É possível concluir que, no caso, após cinco pagamentos a dívida está praticamente zerada.

	A	B	C	D	E
1	**MÊS**	**DÍVIDA 1**	**JUROS**	**PGTO**	**DÍVIDA 2**
2	0	120,00	0,00	0,00	120,00
3	1	120,00	9,60	20,88	108,72
4	2	108,72	8,70	20,88	96,54
5	3	96,54	7,72	20,88	83,38
6	4	83,38	6,67	20,88	69,17
7	5	69,17	5,53	20,88	53,82
8	6	53,82	4,31	20,88	37,25
9	7	37,25	2,98	20,88	19,35
10	8	19,35	1,55	20,88	**0,02**

Figura 143 – Planilha finalizada
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Para chegarmos até o valor desejado de 20,88 u.m., é possível alterar o valor da célula D_3 para valores menores do que 30 u.m., de modo que o valor da célula E_{10} seja o mais próximo possível de zero. De fato, a dívida precisa ser paga em oito parcelas. No caso, valores positivos para E_{10} significam a existência de saldo devedor, e o valor da parcela precisa ser maior. É importante destacar que dois *softwares* específicos para planilhas eletrônicas – *Excel* e *Calc* – possuem recursos que realizam essa variação pelo usuário – especificamente a ferramenta "Atingir meta" – como será desenvolvido no material proposto.

Nesse ponto, é preciso destacar as vantagens de se resolver um problema para o qual existe uma fórmula (já difundida e precisa) sem utilizá-la, baseando-se na suposição de valores até atingir um determinado objetivo (no caso, saldo devedor nulo). Como mencionado, a motivação para o desenvolvimento e aplicação do método surgiu após um período, durante o ano de 2005, trabalhando com turmas de segundo ano do Ensino Médio e usando tais fórmulas para a resolução. Em primeiro lugar, com tal método o conhecimento da fórmula torna-se imprescindível, e é preciso sempre tê-la em mente para trabalhar. Ainda, é fundamental o uso de calculadora, e de preferência uma calculadora científica. Acontece que as fórmulas para tal situação e para uma sequência uniforme de depósitos são de difícil memorização. Além disso, encobrem o raciocínio financeiro que a visualização da variação do saldo devedor evidencia. Corre-se o risco de reduzir o trabalho com Matemática Financeira a uma decisão sobre qual fórmula utilizar. Por outro lado, a construção da planilha possibilita que o aluno compreenda o papel dos juros, das parcelas, o que significa o pagamento ou não de entrada, dentre outras coisas. Possibilita que o aluno se qualifique para tomar decisões (por exemplo: quitar a dívida antes do oitavo pagamento).

	A	B	C	D	E
1	**MÊS**	**DÍVIDA 1**	**JUROS**	**PGTO**	**DÍVIDA 2**
2	0	120,00	0,00	0,00	120,00
3	1	120,00	9,60	10,00	119,60
4	2	119,60	9,57	10,00	119,17
5	3	119,17	9,53	10,00	118,70
6	4	118,70	9,50	10,00	118,20
7	5	118,20	9,46	10,00	117,65
8	6	117,65	9,41	10,00	117,07
9	7	117,07	9,37	10,00	116,43
10	8	116,43	9,31	10,00	**115,75**

Figura 144 – Influência dos juros
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Ainda, é possível visualizar o quanto de cada parcela é usado para amortizar a dívida e o quanto é usado somente para pagar juros. No caso, uma parcela de 10 u.m. mal consegue pagar os juros do primeiro mês, o que significa uma baixa amortização da dívida. Tal discussão pode ser ampliada, por exemplo, para o pagamento da dívida externa brasileira.

4) Investindo todo mês 12 u.m. em um fundo de investimentos, o montante imediatamente após o 10º depósito é de 150 u.m.. Qual a taxa mensal de juros que rendeu o investimento?

Para tal situação, é deduzida a fórmula $F=P\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$, onde F é o valor futuro a ser obtido após n depósitos, supondo uma taxa i de juros. No caso, $150=12\cdot\frac{(1+i)^{10}-1}{i}\Rightarrow 12{,}5=\frac{(1+i)^{10}-1}{i}\Rightarrow i=(12{,}5\cdot i+1)^{0,1}-1$. Para resolver o problema, são propostas pelos autores quatro alternativas:

a) Procurar uma tabela de valores específica para $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ em, segundo os autores, "um livro da primeira metade do século". Nelas, temos que para i = 4,75% o valor é 12,4321 e que, para i = 5%, o valor é 12,5779. Via interpolação linear, $i \cong 4{,}9\%$. A desvantagem, ainda segundo os autores, é de que não existem tabelas prontas capazes de resolver qualquer problema de cálculo da data de juros.

b) Formar uma sequência de aproximações (i_k) de modo que $i_{k+1}=(12{,}5\,.\,i_k+1)^{0,1}-1$, até obter $i_k = i_{k+1}=i$, começando arbitrariamente com i_0=0,1. Dessa forma, obtém-se a taxa aproximadamente igual a 4,9%.

c) Aplicar o método de Newton para resolução de F(x) = 0, formando uma sequência (X_k), onde $x_{k+1}=x_k-\frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$, até obter $x_{k+1} = x_k$. No caso, $F(i)=(1+i)^{10}-12{,}5\,.\,i-1$ e . Começando com $i_0 = 0{,}5$, obtém-se a taxa aproximada de 4,9%.

d) Por tentativas, de modo que $G(i)=(1+i)^{10}-12{,}5\,.\,i$ seja igual a 1. Supondo aleatoriamente valores para i, observa-se que G (0,049) = 1,001 e G (0,0485) = 0,9995.

Para encerrar, os autores do livro "Progressões e Matemática Financeira" comentam que "existem calculadoras, ditas financeiras, que contêm programas prontos para o cálculo de taxas de juros".

Ou seja, existem muitos problemas em Matemática Financeira que não são resolvidos simplesmente aplicando-se a fórmula adequada. A suposição de valores é um hábito normal ao se lidar com certos problemas, como exemplificado anteriormente: nenhuma resolução chega ao resultado diretamente por meio da substituição de valores na fórmula.

Agora será possível resolver o mesmo problema construindo a planilha a partir de uma suposição inicial para a taxa de juros e observando a variação do montante acumulado:

	A	B	C	D	E
1	**MÊS**	**SALDO 1**	**JUROS**	**DEPÓSITO**	**SALDO 2**
2	1	0,00	0,00	12,00	12,00

Figura 145 – Construção da Planilha
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Aqui, o saldo inicial é zero e, ao final do primeiro mês, só está disponível o depósito efetuado.

	A	B	C	D	E
1	**MÊS**	**SALDO 1**	**JUROS**	**DEPÓSITO**	**SALDO 2**
2	1	0,00	0,00	12,00	12,00
3	A2+1	E2	0,03*B3	D2	B3+C3+D3

Figura 146 – Construção da Planilha
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

A planilha será construída tendo como suposição inicial uma taxa de 3% ao mês, aplicada ao saldo do mês anterior. O saldo ao final do mês é constituído pela soma do saldo inicial, dos juros e do depósito.

	A	B	C	D	E
1	**MÊS**	**SALDO 1**	**JUROS**	**DEPÓSITO**	**SALDO 2**
2	1	0,00	0,00	12,00	12,00
3	2	12,00	0,36	12,00	24,36
4	3	24,36	0,73	12,00	37,09
5	4	37,09	1,11	12,00	50,20
6	5	50,20	1,51	12,00	63,71
7	6	63,71	1,91	12,00	77,62
8	7	77,62	2,33	12,00	91,95
9	8	91,95	2,76	12,00	106,71
10	9	106,71	3,20	12,00	121,91
11	10	121,91	3,66	12,00	**137,57**

Figura 147 – Primeira tentativa
issertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Construída a planilha, observa-se que uma taxa mensal de 3% é insuficiente para que, ao final de 10 depósitos de 12 u.m., o saldo seja de 150 u.m. Fica claro, portanto, que para alcançar tal objetivo é necessário buscar uma taxa mais elevada.

	A	B	C	D	E
1	**MÊS**	**SALDO 1**	**JUROS**	**DEPÓSITO**	**SALDO 2**
2	1	0,00	0,00	12,00	12,00
3	2	12,00	0,59	12,00	24,59
4	3	24,59	1,20	12,00	37,79
5	4	37,79	1,85	12,00	51,64
6	5	51,64	2,53	12,00	66,18
7	6	66,18	3,24	12,00	81,42
8	7	81,42	3,99	12,00	97,41
9	8	97,41	4,77	12,00	114,18
10	9	114,18	5,59	12,00	131,78
11	10	131,78	6,46	12,00	**150,23**

Figura 148 – Planilha finalizada
Dissertação de Mestrado de Cóser Filho (2008)

Com uma taxa mensal de 4,9%, o objetivo é atingido. Mais uma vez, fica claro que a construção da planilha informa muito mais sobre a movimentação do que o simples cálculo da taxa. Por exemplo, pode-se acompanhar o quão vantajoso pode ser um planejamento: o rendimento mensal começa em 0,59 u.m., ao final do 1º mês, e, ao final dos dez depósitos, já é de 6,46 u.m., ou seja, os depósitos são constantes, mas a economia mensal é crescente.

Já foram destacadas, ao longo da descrição do método, várias vantagens da construção de uma planilha se comparada com a aplicação das fórmulas específicas. Para finalizar, o que torna imprescindível o uso de um *software* de planilhas eletrônicas é o fato de que a manipulação dos dados é incomparavelmente mais ágil do que se tal método fosse aplicado manualmente. Em especial, a suposição dos valores para a aproximação do resultado desejado seria uma tarefa das mais trabalhosas, para não dizer que seria inviabilizada. Ainda, o uso do recurso "Atingir meta", que faz essa suposição pelo usuário, depende, é claro, do uso de tais *softwares*.

CONCLUSÕES

Na introdução, três exigências foram feitas: o material aqui apresentado precisaria ser (1) amplo, (2) consistente e (3) adequado. Pode-se afirmar, sem dúvida, que os três requisitos foram cumpridos.

O primeiro momento, antes mesmo de se pensar em uma dissertação, foi a elaboração do esboço do material. "Esboço" é um termo adequado, pois o número de alterações durante esse período foi bastante grande. Como descrito na Introdução, a primeira tentativa de trabalho foi via fórmulas e calculadoras científicas. Somente depois de um ano surgiu a ideia de trabalhar com planilhas eletrônicas. E, a partir do momento em que o livro-texto inicial foi deixado de lado e a iniciativa de escrever um novo material ganhou força, o passo seguinte foi estudar Matemática Financeira, especialmente em livros de Ensino Superior. Muitos dos conceitos, movimentações financeiras e problemas estudados que estão presentes no material aqui apresentado são habitualmente trabalhados ao longo de alguns cursos de graduação, tais como Ciências Contábeis e Administração. Ou seja, o material definitivamente é bastante amplo.

A análise de alguns livros didáticos somente reforça essa convicção, visto que a maioria dos livros estudados sequer aborda problemas que envolvam sequências de depósitos, e poucos enfatizam a lógica inerente a um pagamento parcelado. No material aqui apresentado, por outro lado, são estudados problemas que envolvem depósitos em diferentes situações, com destaque ao problema de planejamento de uma previdência individual. Ainda, são estudados problemas de pagamentos de dívidas considerando muitos fatores: com entrada, sem entrada, com carência, com pagamentos diferentes, em prazos diferentes, dentre outros casos. Então, o alcance do material excede aquele dos livros didáticos analisados e aborda temas habitualmente estudados em cursos de graduação, mas que são pertinentes à maioria das pessoas.

O que diferencia basicamente o material aqui proposto dos livros didáticos analisados é a facilidade com que se trabalha recursivamente com planilhas eletrônicas. Trabalhar recursivamente, em Matemática Financeira, é vantajoso: enfatiza a movimentação financeira e evidencia-se a variação à medida que os períodos de tempo vão se sucedendo, não se limitando a informar somente um resultado final. Outra vantagem é a de que a matemática envolvida é bastante simples. O trabalho via recursão depende unicamente do conceito de porcentagem e do conhecimento da essência de cada movimentação financeira, ou seja, toda a matemática necessária é estudada, destacada, explicitada, permite ao aluno compreensão do que está sendo feito e pode ter a lógica alterada caso necessário. Certamente, o material aqui proposto é consistente.

Após a aplicação do material, o passo seguinte foi a análise dos dados obtidos, tendo como fundamentação didática os níveis de sofisticação propostos por David Tall (1998, 1999) ao longo do desenvolvimento cognitivo. Nas primeiras sessões de trabalho, a maior dificuldade foi se apropriar da linguagem específica do *software* que permitiu o uso de planilhas eletrônicas. A apropriação do método, em especial no que diz respeito à implantação da recursividade, ocorreu em paralelo a isso. A seguir, a maioria dos problemas exigia dos grupos que adaptassem a ideia discutida coletivamente com o professor. Foram esses exercícios, aliados aos dados registrados, que possibilitam afirmar que o material proposto é adequado para se trabalhar com Matemática Financeira no Ensino Médio: evidenciou-se a apropriação dos conceitos estudados, assimilação da linguagem de programação e da implementação da recursividade, e, principalmente, de adaptação do método proposto para solucionar problemas diferentes.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

CÓSER FILHO, Marcelo Salvador. *Aprendizagem de Matemática financeira no ensino médio*: uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas. 138 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/14828>. Acesso em: 11 jul. 2008

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENZAIN, David. *Fundamentos de Matemática Elementar.* v. 11. Matemática Comercial, Financeira e Descritiva. Rio de Janeiro: Atual, 2004.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. *Progressões e Matemática Financeira*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993. Coleção do Professor de Matemática.

TALL, David. *Information Technology and Mathematics Education*: Enthusiasms, Possibilities & Realities. 1998. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>. Acesso em: 25 fev. 2008.

__________. *Technology and Cognitive Growth in Mathematics*: A discussion paper for the Conference on Mathematics and New Technologies. Thessaloniki, Grécia. 1999. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>. Acesso em: 25 fev. 2008.

OS AUTORES

Adriana Bonadiman é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua no ensino fundamental como professora de matemática na E.M.E.F. Wenceslau Fontoura e no ensino superior na FAPA (Faculdade Porto-Alegrense).
E-mail: prof.adribonadiman@ig.com.br

Elisabete Zardo Búrigo é Licenciada em Matemática, Doutora em Educação e professora do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS.
E-mail: elisabete.burigo@ufrgs.br

Francisco Egger Moellwald é Doutor em Educação Matemática pela Indiana University, USA, e professor do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS.
E-mail: chico.egger@gmail.com

Gláucia Helena Sarmento Malta é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua no Centro de Ensino Médio Pastor Dohms, na Rede de Ensino Municipal de Porto Alegre e na FAPA - Faculdade Porto-Alegrense.
E-mail: maltamartini@gmail.com

Gustavo Quevedo Carvalho é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua no ensino médio, como professor de matemática no Colégio Militar de Porto Alegre.
E-mail: garotinhoqc@gmail.com

Juliana Bender Goulart é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua no ensino superior, como professora tutora de matemática na UNISINOS.
E-mail: julianabgoulart@yahoo.com.br

Karina Disconsi Maliuk é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua como professora de matemática no ensino fundamental da rede municipal de ensino de Porto Alegre.
E-mail: kadismal@bol.com.br

Marcelo Salvador Cóser Filho é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua no ensino médio como professor de matemática no colégio Monteiro Lobato - Boa Vista.
E-mail: coser@marcelocoser.com.br

Marcus Vinicius de Azevedo Basso é Licenciado em Matemática, Mestre em Psicologia do Desenvolvimento, Doutor em Informática na Educação e professor do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS.
E-mail: mbasso@ufrgs.br

Maria Alice Gravina é Bacharel em Matemática, Mestre em Matemática, Doutora em Informática na Educação, e professora no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática/UFRGS.
E-mail: gravina@mat.ufrgs.br

Maria Cristina Varriale é Doutora em Física e professora do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS.
E-mail: cris@mat.ufrgs.br

Marilaine de Fraga Sant'Ana é Doutora em Matemática pela UNICAMP, Bacharel e Mestre em Matemática e professora do Instituto de Matemática do Mestrado em Ensino de Matemática.
E-mail: marilaine@mat.ufrgs.br

Marina Menna Barreto é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS e tutora a distância do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática, do PPGENSIMAT/UFRGS e UAB/MEC.
E-mail: marinambarreto@gmail.com

Morgana Scheller é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua no ensino médio, técnico e superior, como professora na área de matemática e iniciação científica no Instituto Federal Catarinense - Campus Rio do Sul.
E-mail: morganascheller@yahoo.com.br

Newton Bohrer Kern é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua no Ensino Fundamental como professor de matemática no Centro de Ensino Médio Pastor Dohms.
E-mail: newton.kern@gmail.com

Pedro Sica Carneiro é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua no Ensino Médio, como professor de Matemática nos Colégios Província de São Pedro e Israelita.
E-mail: pedroscpoa@yahoo.com.br

Ricardo de Souza Santos é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua como professor da rede municipal de ensino de Porto Alegre e no Centro de Educação Superior de Cachoeirinha (CESUCA).
E-mail: profricardosantos@yahoo.com.br

Vandoir Stormowski é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atualmente é professor na FAPA (Faculdade Porto-Alegrense) e na rede municipal de ensino de Porto Alegre.
E-mail: vandoir@yahoo.com.br

Vera Clotilde Garcia é Licenciada e Mestre em Matemática e Doutora em Educação. É professora do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS e membro da equipe coordenadora do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática.
E-mail: veraclot@ufrgs.br

Vilmar Trevisan é Doutor em Matemática Aplicada e professor do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS.
E-mail: trevisan@mat.ufrgs.br .

Viviane Raquel Backendorf é Mestre em Ensino de Matemática pela UFRGS. Atua como professora de matemática nas escolas: Estadual de Ensino Médio Monsenhor Seger e Municipal de Ensino Fundamental Pedro Pretto.
Email: vrbackendorf@yahoo.com.br .

1. A MATEMÁTICA NA ESCOLA
Elisabete Zardo Búrigo
Maria Alice Gravina
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Vera Clotilde Vanzetto Garcia (Org.)

Tipologia utilizada no texto: Lapidary333 BT, 12/15
Papel: Off set 90g
Impresso na Editora Evangraf – www.evangraf.com.br

Editora da UFRGS • Ramiro Barcelos, 2500 – Porto Alegre, RS – 90035-003 – Fone/fax (51) 3308-5645 – editora@ufrgs.br – www.editora.ufrgs.br • Direção: Sara Viola Rodrigues • Editoração: Luciane Delani (Coordenadora), Carla M. Luzzatto, Fernanda Kautzmann, Michele Bandeira e Rosangela de Mello; suporte editorial: Alexandre Giaparelli Colombo, Débora Lima, Jaqueline Moura e Jeferson Mello Rocha (bolsistas) • Administração: Najára Machado (coordenadora), Aline Vasconcelos da Silveira, Jaqueline Trombin, Laerte Balbinot Dias, Maria da Glória Almeida dos Santos e Valéria da Silva Gomes; suporte administrativo: Getúlio Ferreira de Almeida e Janer Bittencourt.