EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA INTRODUÇÃO

PUC-SP

Reitor: Antonio Carlos Caruso Ronca
Vice-Reitora Acadêmica: Sueli Cristina Marquesi

EDUC – Editora da PUC-SP

Anna Franchi • Benedito Antonio da Silva • José Luiz Magalhães de Freitas • Luiz Carlos Pais • Maria Cristina S. de A. Maranhão • Regina Flemming Damm • Sonia Barbosa Camargo Igliori • Silvia Dias Alcântara Machado

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA INTRODUÇÃO

educ

1999

Catalogação na Fonte - Biblioteca Central/PUC-SP

Educação Matemática: uma introdução / Silvia Dias Alcântara Machado ... et al. - São Paulo : EDUC, 1999.
208 p.; 18 cm. – (Série Trilhas)

ISBN 85-283-0158-3

1. Matemática - Estudo e ensino. I. Machado, Silvia Dias Alcântara. II. Série.

CDD 510.7

Série Trilhas. Dirigida por
Maria Eliza Mazzilli Pereira

educ

Direção
Maria do Carmo Guedes
Maria Eliza Mazzilli Pereira

Revisão
Myriam Quartim Barbosa
Sonia Montone

Editoração Eletrônica
Artsoft Informática

Capa
Projeto: *Ângela Mendes*
Realização: *Waldir Antonio Alves*

Rua Ministro Godói, 1213
05015-001 - São Paulo - SP
Telefax: (011) 3873-3359

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A obra que aqui apresentamos resultou do Endipe de 1998, quando Luiz Carlos Pais, Regina Damm e eu constatamos que, apesar de vários pesquisadores brasileiros da área de Educação Matemática estarem utilizando o referencial teórico da Didática da Matemática, há falta de material em português que trate de seus conceitos básicos. Dessa constatação nasceu a idéia de escrevermos um livro que servisse para um primeiro contato de alunos em iniciação científica, de alunos de pós-graduação ou de pesquisadores em geral, com os principais conceitos desse corpo teórico.

Decidimos apresentar oito conceitos de Didática da Matemática e convidamos mais cinco colegas pesquisadores que se encarregaram cada um de um dos capítulos restantes. Após o término da primeira redação nos reunimos, os oito autores, e discutimos cada um dos capítulos, buscando uma melhor articulação entre os diferentes assuntos. Tivemos a intenção de apresentar os temas de uma forma simples, exemplificados, sempre que possível, com a nossa realidade e sem a pretensão de esgotar nenhum dos conceitos abordados; entretanto, incluímos referências bibliográficas para aqueles que desejarem uma análise mais detalhada das noções apresentadas.

Esperamos estar contribuindo para a divulgação desses conceitos, que têm se mostrado de grande valia para uma melhor compreensão dos problemas de ensino/aprendizagem da Matemática.

Silvia Dias Alcântara Machado

INTRODUÇÃO

Luiz Carlos Pais

Nas últimas décadas podemos constatar, tanto no Brasil como em outros países, um grande impulso nas reflexões relativas à área de *Educação Matemática* abrangendo uma diversidade de temas, aspectos e questões inerentes ao processo de ensino-aprendizagem do conhecimento matemático. Constata-se assim a existência de um considerável movimento educacional, em plena evolução, que trabalha na estruturação de um saber pedagógico voltado para o ensino da matemática. A justificativa para a defesa social desse desenvolvimento se intensifica em face da necessidade de responder aos desafios de uma crise generalizada que atinge toda a educação escolar e, nesse sentido, não se trata de um problema localizado no que se refere somente ao ensino da matemática. De uma forma geral, há um descontentamento com o ensino da matemática em todos os níveis da escolaridade; o seu significado real e a sua função no currículo escolar passam a ser questionados e pesquisados de uma forma bem mais consciente, pontual e contextualizada. Quanto ao desenvolvimento da própria área de Educação Matemática, Dario Forentini (1994), em sua tese de doutorado, descreve quatro fases que bem caracterizam a evolução da Educação Matemática no Brasil, desde suas origens até os anos 90. Essa análise já apontava para o fato de que foi a partir da década de 60 que algumas mudanças foram implementadas no ensino da matemática, propondo novos programas, metodologias de ensino, conteúdos e currículos para a formação de professores. Essas propostas representaram o início do período de gestação da área cujo desenvolvimento no Brasil permite hoje identificar *uma grande diversidade de tendências teóricas* abrangendo enfoques culturais, psicológicos, históricos, filosóficos, matemáticos e outros.

Essas tendências revelam ainda variadas concepções da própria educação, passando pelo enfoque tradicional até uma forma mais libertadora de idealizar a prática escolar. É a partir dessa diversidade de pesquisas, que hoje caracteriza a Educação Matemática no Brasil, que podemos destacar uma determinada forma particular de descrever e compreender os fenômenos subjacentes a essa prática educativa que constitui o que chamamos de *Didática da Matemática*. É para fazer frente ao risco de uma indesejável fluidez nas informações que buscamos, que as questões educacionais do ensino da matemática podem ser delimitadas num contexto bem mais preciso da definição apresentada por Régine Douady no verbete da *Enciclopédia universalis*:

> A Didática da Matemática estuda os processos de transmissão e de aquisição dos diferentes conteúdos desta ciência, particularmente numa situação escolar ou universitária. Ela se propõe a descrever e explicar os fenômenos relativos às

> relações entre seu ensino e sua aprendizagem. Ela não se reduz a pesquisar uma boa maneira de ensinar uma determinada noção particular.

A Didática da Matemática, portanto, não visa simplesmente recomendar modelos ou receitas de solução a determinados problemas de aprendizagem. Por outro lado, é necessário destacar que é somente a partir de seus resultados de pesquisas, sobretudo em sala de aula, que se pode indicar propostas pedagógicas com a finalidade de contribuir para uma melhor compreensão do fenômeno da aprendizagem da matemática e uma conseqüente contribuição para a melhoria do seu ensino.

Nesse sentido, cabe destacar que a finalidade principal deste livro é apresentar uma descrição de alguns elementos fundamentais de um referencial teórico da Educação Matemática, cujo corpo de conhecimentos teve sua origem na França e hoje se encontra em pleno processo de desenvolvimento em diversos países. A proposta pedagógica que lhe é subjacente procura estar atenta ao vínculo com a realidade da educação brasileira, à necessária atenção às especificidades do conhecimento matemático e a uma compreensão mais clara de seus valores educativos.

As relações que estruturam os temas apresentados são analisadas através de determinadas noções: Transposição Didática, Contrato Didático, Situações Didáticas, Obstáculos Epistemológicos, Registros de Representações, Dialética Ferramenta-Objeto, Campos Conceituais e Engenharia Didática. A análise e descrição que cada uma dessas oito noções recebe de seus respectivos autores têm enfoques particulares que destacam o estilo e o interesse de cada um. Entretanto, cabe salientar que o interesse comum, que conduziu à redação dos textos, sempre foi o de contribuir para a divulgação de idéias educacionais que certamente estruturam um sólido referencial teórico para a pesquisa em Educação Matemática.

TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Luiz Carlos Pais

Introdução

Uma das questões centrais da educação matemática é o estudo do processo evolutivo por que passa a formação do seu objeto de ensino. Na análise dessa evolução é possível identificar diversas fontes de influências que determinam as transformações do saber ensinado na escola. O que descrevemos neste capítulo é a estrutura dessas transformações através da noção de *transposição didática*. Essa noção, que passa por um processo relativamente recente de evolução teórica, e por isso mesmo é susceptível a determinados aspectos polêmicos, pode ser vista como um caso especial da *transposição dos saberes*, esta sendo entendida no sentido mais amplo da evolução das idéias. No caso específico das áreas de ciências e matemática, fica bem mais evidente que essa evolução ocorre sob o balizamento dos chamados paradigmas científicos[1],

1. "Um paradigma é aquilo que os membros de uma comunidade partilham e, inversamente, uma comunidade científica é composta por homens que partilham de um paradigma" (cf. Kuhn, 1975, pp. 219-225).

respeitando determinadas regras e até mesmo certas tradições históricas e culturais. A rigor, as idéias de *transposição* e *saber* estão fortemente interligadas. Quando falamos em transposição, sempre podemos relacionar a existência de um saber específico. Assim como, quando admitimos um determinado saber, é natural pensar na existência de um movimento de transposição.

Além desse contexto geral da evolução do saber, faz sentido ainda falar da transposição dos conhecimentos restrita ao plano da elaboração pessoal e subjetiva. É nesse nível que se esboça toda a complexidade da problemática da aprendizagem. Assim, quando nos referimos à produção de um saber, quer seja no contexto geral, ou no plano pessoal, somos levados a reconhecer a existência de um processo evolutivo que caracteriza a idéia de transposição. É por esta razão que, ao iniciar o estudo da transposição didática, julgamos conveniente destacar uma diferença que pode ser estabelecida entre o *saber* e o *conhecimento*. Mesmo que na prática não se use realçar essa diferença, pensamos que, para fazer uma análise didática, somos levados a revelar sentidos mais precisos para esses termos.

Na linguagem usada no meio científico, o *saber* é quase sempre caracterizado por ser relativamente descontextualizado, despersonalizado e mais associado a um contexto científico histórico e cultural. Assim, por exemplo, quando se fala em saber matemático se refere a uma ciência que tem sua concepção estruturada num contexto próprio. Por outro lado, o *conhecimento* sempre diz respeito ao contexto mais

individual e subjetivo, revelando algum aspecto com o qual o sujeito tem uma experiência direta e pessoal. Nessa concepção o conhecimento está mais associado ao caráter experimental. É evidente que não se pode estabelecer um limite nítido entre a experiência e a teoria. Entretanto, é bom lembrar que entre as várias formas de valorização do pensamento a mais tradicional procura quase sempre distinguir o conhecimento racional do conhecimento sensorial e essa distinção certamente está baseada numa visão dualista da concepção platônica.

No contexto do ensino da matemática, Brousseau (1988) faz uma distinção entre conhecimento e saber, colocando em evidência o aspecto da *utilidade* e remetendo a questão para a análise das *situações didáticas* envolvidas em cada caso. Nessa análise, o saber aparece associado ao problema da validação do conhecimento, que, no caso da matemática, é a questão do raciocínio lógico-dedutivo. Ainda na análise de Brousseau, o conhecimento aparece vinculado mais ao aspecto experimental, envolvendo algum tipo de ação com a qual o sujeito tenha um contato mais pessoal.

O recurso de associar o caráter de utilidade para diferenciar conhecimento e saber é retomado no trabalho de Conne (1996). Para esse autor, que desenvolve uma análise do ponto de vista cognitivo, o saber é considerado como um tipo especial de conhecimento cuja utilidade se faz com um relativo grau de operacionalidade. A utilidade do saber permite ao sujeito um referencial de análise capaz de lhe proporcionar um olhar mais amplo e indagador. É exatamente essa possibilidade de transformação que permite uma espécie de transposição interna do saber sobre o seu próprio campo epistemológico. Em suma, quando o sujeito passa a ter um relativo domínio sobre um determinado saber, torna-se possível desencadear uma práxis transformadora e também geradora de novos saberes.

A noção de Transposição Didática

No desenvolvimento de toda prática educativa é sempre necessário estabelecer prioridades na condução dos procedimentos pedagógicos. Uma dessas prioridades diz respeito à seleção dos conteúdos que constituem os programas escolares. O conjunto desses conteúdos, que também pode ser chamado de *saber escolar*, tem como fonte original o saber científico. Entretanto, através dos efeitos de todo um processo evolutivo, ocorrem transformações que acabam determinando características bem particulares ao saber escolar. A noção de transposição didática visa estudar esse processo seletivo que ocorre através de uma longa rede de influências envolvendo diversos segmentos do sistema educacional. Essas idéias já aparecem numa primeira definição de transposição didática dada por Chevallard (1991):

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os "objetos de ensino". O "trabalho" que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (p. 39)

O estudo da trajetória percorrida pelo saber escolar permite visualizar as diversas influências recebidas tanto do saber científico como de outras fontes. São influências que moldam não só o aspecto conceitual como também o metodológico. O conjunto das fontes de influências que atuam na seleção dos conteúdos, que deverão compor os programas escolares e que determinam todo o funcionamento do processo didático, recebeu por parte de Chevallard o nome de *noosfera*. Fazem parte da noosfera: cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes da educação.

O resultado do trabalho seletivo da noosfera se resume não só na determinação dos conteúdos escolares, como também acaba exercendo uma influência considerável na estruturação dos valores, objetivos e métodos que conduzem o processo de ensino. Esta é a idéia inicial que esboça a noção de transposição didática, entretanto, devemos retornar a ela várias vezes na busca permanente de sua verdadeira essência.

A escolha dos conteúdos se manifesta principalmente através dos programas escolares e dos livros didáticos. Mas, embora as fontes de referências sejam preexistentes a essas escolhas e às suas publicações, é possível perceber que alguns dos conteúdos são, na realidade, verdadeiras *criações didáticas* incorporadas aos programas. São criações motivadas por supostas necessidades do ensino, para servirem como recursos para outras aprendizagens. A princípio, tais criações têm portanto uma finalidade educacional plenamente justificável. Todavia, o problema surge quando o seu uso acaba sendo processado de uma forma puramente automatizada e desvinculada de qualquer aplicação.

Este é o caso, por exemplo, dos *produtos notáveis* que, quando ensinados isoladamente, sem nenhuma relação com algum outro conteúdo algébrico ou geométrico, passam a figurar apenas como objetos de ensino em si mesmos. Para estar atento a essas possíveis distorções se faz necessário cultivar um permanente espírito de *vigilância intelectual*[2] que deve prevalecer ao longo da análise da transposição didática.

Um exemplo de transposição didática descrito por Chevallard (1982) é o *conceito de distância*. Desde que se pode falar da influência de Euclides na aprendizagem da geometria, a noção de distância entre dois pontos é estudada de uma certa forma espontânea. Entretanto, em 1906 essa noção foi amplamente generalizada pelo matemático Fréchet com o objetivo de trabalhar com os *espaços de funções*[3] (Boyer, 1974). Como conseqüência desse trabalho, a partir de 1971, após passar por uma série de transformações, tal noção foi inserida no currículo escolar francês. Antes dessa data, a noção já era estudada pelos matemáticos mas apenas como uma ferramenta para resoluções de problemas. Após sua inclusão nos programas, ela passou a ser um objeto de estudo em si mesmo e o seu tratamento didático continua a ser modificado, prosseguindo assim o trabalho da transposição didática.

Quando as transformações das idéias matemáticas são analisadas em relação a um determinado conceito específico, como é o caso da noção de distância, trata-se de uma *transposição didática stricto sensu*. Por outro lado, se a análise é desenvolvida no contexto mais amplo, não se atendo a uma noção particular, podemos então falar de uma *transposição didática lato sensu*.

O *movimento da matemática moderna* é um dos exemplos mais marcantes de *transposição didática lato sensu*. O contexto original das idéias defendidas nesse movimento era radicalmente diferente daquele que prevaleceu na proposta curricular. Por outro lado, o resultado prático dessa reforma foi ainda muito diferente da proposta pedagógica que constava no plano das intenções. Acreditava-se na possibilidade de uma abordagem mais estruturalista para o ensino da matemática através de uma visão mais ampla que seria dada, por exemplo, pela ênfase à teoria dos conjuntos, às propriedades algébricas e a uma linguagem topológica para a geometria. Esta tentativa de mudança foi incrementada com o uso de novas técnicas de ensino, esperando com isso que fosse possível obter uma aprendizagem mais "fácil" do que a tradicional. Para isso surgiram diversas *criações didáticas* como é o caso dos *diagramas de Venn*. Tais diagramas, que funcionavam como um instrumento para o matemático, passaram a ser ensinados como um objeto de estudo.

2. A *Vigilância Intelectual* se refere à noção dada por Bachelard (1977). Chevallard (1991) utiliza a expressão "A Vigilância Epistemológica" no capítulo em que estuda a própria existência da transposição didática.
3. Para ver mais detalhes sobre a obra do matemático Fréchet e o seu trabalho na generalização dos espaços de funções veja, por exemplo, Boyer (1974).

Nesse caso, as reformulações ocorridas na transposição didática resultaram em inversões tão fortes que certamente contribuíram para que o movimento resultasse num grande fracasso. Uma análise das desventuras dessa tentativa de reforma do ensino da matemática é apresentada no trabalho de Kline (1976).

Na realidade é o conjunto das *criações didáticas* que evidencia a diferença que há entre o saber científico e o saber ensinado. É nesse sentido que Astolfi e Develay (1990) observam a existência de uma *epistemologia do professor*, que a rigor se relaciona com a epistemologia da ciência, mas que jamais pode ser identificada com ela. Quando olhamos para essa epistemologia que sustenta toda a prática pedagógica, percebemos em seu interior todo um conjunto de crenças que, normalmente, acabam enrijecidas pelo tempo e podem determinar um olhar puramente pessoal sobre a ciência ensinada. Na mesma linha de raciocínio Joshua e Dupen (1993) lembram que pesquisas sobre o ensino da Física, realizadas na França ao longo da década de 70, alertavam para a necessidade de considerar uma "Física do professor" qualitativamente diferente daquela do físico. Essa diferença, que possivelmente pode ser também encontrada em outras disciplinas, molda o estatuto do saber escolar.

A pesquisa realizada por Becker (1993) analisa também a *epistemologia do professor* no cotidiano escolar. Esse trabalho conclui que o pensamento predominante na prática docente, quanto ao significado epistemológico de sua disciplina, é de natureza essencialmente empírica e que normalmente é muito difícil o professor se afastar dessa posição. O que acaba pre-

dominando é uma visão estratificada e isolada da educação, o que leva a uma prática pedagógica fundamentada sobretudo na repetição e na reprodução do conhecimento. As conseqüências dessa postura educacional são no mínimo extremamente inexpressivas para o aluno. Esse pensamento empírico se refere tanto às idéias pedagógicas quanto à maneira de conceber a função educativa do saber, que é o objeto de seu ensino.

Do saber científico ao saber ensinado

Se o conjunto das transformações sofridas pelo saber for visto como um processo mais amplo, não especificando um determinado conceito, então a *transposição didática* pode ser analisada a partir de três tipos de saberes: o *saber científico*, o *saber a ensinar* e o *saber ensinado*.

O objeto do *saber científico* está mais associado à vida acadêmica embora acreditemos que nem toda produção acadêmica possa representar um saber científico. Trata-se de um saber que normalmente é desenvolvido nas universidades ou institutos de pesquisas, mas que não está diretamente vinculado ao ensino médio e fundamental. O seu reconhecimento e a defesa de seus valores são particularmente sustentados por uma cultura científica e estão ainda vinculados a outras áreas de interesses, tais como a política, a economia, a tecnologia, etc. Tais vínculos se devem ao fato de que, na sociedade atual, o saber científico e, sobretudo, a tecnologia estabeleceram laços de profundas ligações mútuas, a ponto de todo o conforto do mundo contemporâneo estar hoje submetido a esse comprometimento.

O desenvolvimento do saber científico e de seus possíveis resultados tecnológicos depende, em grande parte, do financiamento da pesquisa. Todavia, quando o Estado se afasta desse financiamento, os recursos necessários são buscados em outras fontes do poder econômico que, entretanto, passam a ditar a finalidade maior da ciência. Esta dependência coloca uma *questão ética do saber científico* que é crucial para a compreensão da ciência contemporânea. Os benefícios oriundos desse tipo de saber científico, financiado pelo poder econômico, são reservados prioritariamente a uma parcela da sociedade comprometida mais com o consumismo do que com a superação das diferenças sociais. Fourez (1988) apresenta, nesse sentido, uma profunda análise sobre as questões éticas do desenvolvimento das ciências.

No que se refere ao aspecto educativo, é evidente que o saber científico deveria contribuir também para o desenvolvimento crítico do aluno dando prioridade aos valores éticos da educação. A finalidade educacional desse saber científico deve estar voltada assim para as questões mais essenciais dos problemas humanos. Para o aluno ter acesso ao conhecimento, é necessário a colocação didática do *problema da linguagem* envolvida no saber científico. Nesse sentido, apesar de parecer evidente que o saber científico não pode ser ensinado na forma como se encontra redigido nos textos técnicos, essa questão se constitui num obstáculo que deve ser considerado no processo de aprendizagem. Essa é a questão da formalização pre-

cipitada da linguagem científica. Para viabilizar a passagem do saber científico para o saber escolar, torna-se necessário um trabalho didático efetivo a fim de proceder a uma reformulação, visando a prática educativa. É necessário portanto recorrer à elaboração de uma forma didática, surgindo assim a importância de uma metodologia fundamentada numa proposta pedagógica.

Quanto ao *saber a ensinar* há também toda uma diversidade de aspectos cuja análise é essencial à questão educacional. Em primeiro lugar trata-se de um saber ligado a uma forma didática que serve para apresentar o saber ao aluno. Em seguida, ocorre uma mudança considerável não só no conteúdo em si como também nos objetivos de sua utilização. Na passagem do saber científico ao saber a ser ensinado ocorre a criação de um verdadeiro modelo teórico que ultrapassa os próprios limites do saber matemático. A partir dessa teoria surgem os materiais de apoio pedagógico que fornecem o essencial da intenção de ensino. Nessa etapa há portanto a predominância de uma teoria didática cuja finalidade está voltada para o trabalho do professor.

Nessa perspectiva é preciso destacar que, enquanto a descoberta da ciência está diretamente vinculada ao saber acadêmico, o trabalho do professor envolve mais uma simulação de descoberta do saber. Enquanto o *saber científico* é apresentado à comunidade científica através de artigos, teses, livros especializados e relatórios, o *saber a ensinar* se limita quase sempre aos livros didáticos, programas e outros materiais de apoio.

O processo de ensino resulta finalmente no verdadeiro objeto do *saber ensinado* que é aquele registrado no plano de aula do professor e que, não necessariamente, coincide com aquela intenção prevista nos objetivos programados no nível do *saber a ensinar*. A análise do *saber ensinado* coloca em evidência os desafios da realização prática de uma metodologia de ensino que, por sua vez, não pode ser dissociada da questão dos valores e do próprio objeto da aprendizagem.

Por outro lado, não há nenhuma garantia de que, no nível individual, o resultado da aprendizagem corresponda exatamente ao conteúdo ensinado. Assim, pode-se chegar a informações bem distantes do *saber científico* e que, nos casos extremos, permanecem apenas alguns vestígios do significado original. Por esta razão, na prática educativa, o conteúdo não pode ser concebido apenas como uma simplificação do saber científico. Pois, se de um lado temos uma metodologia científica com sua especificidade, do outro, os objetivos educacionais conduzem a uma metodologia de ensino essencialmente diferente. Finalmente, enquanto o *saber científico* é validado pelos seus paradigmas internos, o *saber ensinado* está mais diretamente sob o controle de um *contrato didático* que rege as relações entre professor, aluno e saber.

Especificidade da didática da matemática

A importância da transposição didática fica mais evidente quando colocamos a questão da especificidade do conhecimento matemático. Nesse sentido

Brousseau (1986) propõe uma análise do saber matemático, bem como do trabalho do matemático, do trabalho do professor de matemática e da atividade intelectual do aluno.

A caracterização do *saber matemático* é na realidade o resultado do tipo de trabalho desenvolvido pelo matemático diante do seu objeto de pesquisa. Esse objeto, que é constituído pelas noções matemáticas, inter-relaciona os trabalhos do matemático, do professor de matemática e do aluno. Entretanto, como não há uma única forma de *conceber* as idéias matemáticas, é possível falar de abordagens distintas tanto na prática científica como na educativa. No que se refere a essas concepções, Davis (1985) observa que toda discussão sobre os fundamentos da matemática acaba apontando três tendências filosóficas: o platonismo, o formalismo e o construtivismo.

Na visão mais radical do *platonismo*, os objetos matemáticos são idéias puras e acabadas, que existem num mundo não material e distante daquele que nos é dado pela realidade imediata. A existência desses objetos é radicalmente objetiva e independe do conhecimento que temos sobre eles. Assim, com base nessa concepção, poderia se falar apenas na descoberta das noções matemáticas e, na realidade, os conceitos não poderiam ser inventados, uma vez que já existiriam *a priori* de qualquer tipo de esforço intelectual do matemático.

Por outro lado, na concepção dada pelo *formalismo,* a rigor, não se pode falar da existência *a priori* dos objetos matemáticos. A matemática consistiria num certo jogo formal de símbolos envolvendo axiomas, definições e teoremas. Para trabalhar com esses elementos existem regras bem definidas que permitem deduzir determinadas seqüências lógicas que representam o essencial da atividade matemática. O significado desses elementos passa a existir a partir do momento em que as fórmulas podem ser aplicadas aos problemas do mundo real.

Quanto ao *construtivismo,* Philip Davis lembra que se trata de uma concepção extremamente inexpressiva em face do platonismo e do formalismo. Esclarece ainda que: "Os construtivistas consideram matemática genuína somente a que pode ser obtida por uma construção finita" (p. 359). Portanto, todas as teorias que envolvem a construção dos números reais ou das séries matemáticas, por exemplo, não são evidentemente aceitas por esse tipo de visão da matemática.

Assim, em relação ao problema da existência e da realidade das idéias matemáticas, o formalismo e o platonismo se constituem em duas posições extremas, contraditórias e predominantes na prática científica. Do ponto de vista educacional, acreditamos que o desafio maior está em cultivar uma prática que, antes de tentar eliminar essas posições contraditórias, busque a sua superação através de uma abordagem puramente dialética. Pensamos que, nesse nível, a única certeza que nos parece evidente é o fato de que não é possível a adoção exclusiva e radical de uma dessas concepções na prática educativa da matemática.

O *trabalho do matemático* é conduzido por uma visão predominantemente platônica, sem no entanto deixar de ser também formalista (cf. Davis e Hersh, 1985). Assim, a atividade científica do matemático

apóia-se não exatamente em uma, mas, sim, em duas concepções que, em suas raízes, são até mesmo contraditórias. O certo é que essas concepções determinam uma influência direta na formação dos professores. Como conseqüência dessa forma de conceber a matemática, no ensino médio e fundamental ocorre ainda uma forte reprodução das interpretações originais do matemático quanto à sua ciência. É a partir dessa visão que o matemático trabalha diretamente com toda a complexidade do processo de descoberta da matemática. Apesar dessa elaboração do saber matemático visar noções que sejam absolutamente objetivas, abstratas e gerais, não há como negar a intermediação necessária de uma dimensão puramente subjetiva, pessoal e particular. Do ponto de vista pedagógico, dizemos que a construção do aspecto objetivo da ciência passa necessariamente pela intermediação do subjetivo, ou seja, a especificidade didática passa por essa consideração.

A descoberta da matemática passa, primeiramente, por uma etapa de síntese do novo conhecimento, para, em seguida, receber uma formalização através da redação de uma demonstração. Muitas vezes, a demonstração obtida pelo matemático não corresponde exatamente ao problema que estava sendo pesquisado. Nesse caso, para não se perder a demonstração obtida, o que se faz é redefinir o problema original. Ou seja, a atividade científica da matemática não consiste somente na solução de problemas, mas também na criação ou reformulação de novos desafios.

Na etapa de redação de uma demonstração, algumas partes julgadas desnecessárias são eliminadas, algumas operações não são mostradas e outras são apenas comentadas. Essa forma de redação, que é devidamente valorizada no contexto do trabalho do matemático, é totalmente inadequada para servir de apresentação do saber no contexto escolar.

Finalmente, o matemático procura ainda sempre apresentar o saber científico na maior generalidade possível. Esta busca da generalidade, que é uma finalidade legítima e sempre presente na pesquisa matemática, acaba também determinando uma prática pedagógica escolar que consiste em também apresentar o conteúdo em sua forma mais geral possível. Entretanto, a construção da generalidade do conhecimento matemático, para as finalidades educacionais, não se inicia por ela mesma. O trabalho pedagógico dialético entre os aspectos particular e geral parece ser extremamente necessário. Na continuidade da produção científica, as idéias matemáticas são ainda submetidas a um processo permanente de reformulações, buscando níveis mais gerais de validade.

É preciso ainda relacionar *o trabalho do professor de matemática* com o trabalho do matemático, não excluindo evidentemente a possibilidade de conciliação dessas duas atividades. Porém, é importante lembrar que o tipo de trabalho desenvolvido pelo matemático acaba determinando uma influência considerável na prática pedagógica.

Na realidade, quando se fala de competência técnica, o trabalho do professor envolve um importante desafio que consiste em realizar uma atividade que é, num certo sentido, inversa daquela do pesquisador. Pois, enquanto o matemático elimina as condições

contextuais de sua pesquisa e busca níveis mais amplos de abstração e generalidade, o professor de matemática, ao contrário, deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais significativa para o aluno. Todavia o contexto reconstituído nunca é o mesmo daquele em que o saber foi elaborado, pois, no meio científico, prevalece uma realidade totalmente distinta daquela da escola. Enquanto para o pesquisador o saber é o objeto principal de sua atividade, na prática escolar, o conhecimento é um instrumento educacional que tem natureza própria. São essas diferenças que fazem com que, em sala de aula, prevaleça sempre a existência de uma *situação didática* com toda sua especificidade pedagógica.

É evidente que o *trabalho intelectual do aluno* não é diretamente comparável com o trabalho do matemático ou do professor de matemática. Mesmo assim, essas atividades guardam entre si algumas correlações cuja análise é de interesse para a educação matemática. O aluno deve ser sempre estimulado a realizar um trabalho na direção de uma iniciação à "investigação científica". Nesse sentido, a atitude intelectual do aluno, diante de um problema, deveria ser semelhante ao trabalho do matemático diante de sua pesquisa. Aprender a valorizar sempre o espírito de investigação. Esse é um dos objetivos maiores da educação matemática, ou seja, despertar no aluno o hábito permanente de fazer uso de seu raciocínio e de cultivar o gosto pela resolução de problemas. Não se trata evidentemente de problemas que exigem o simples exercício da repetição e do automatismo.

É preciso sempre buscar problemas que permitam mais de uma solução, que valorizem a criatividade e admitam estratégias pessoais. Essa valorização didática do problema fundamenta-se na crença de que seja possível, mesmo através de uma modesta solução, o aluno sentir uma verdadeira motivação pela busca do conhecimento. O trabalho com a resolução de problemas redefine assim os valores educativos da educação matemática. O desenvolvimento dessas habilidades possibilita ao aluno um desempenho que certamente o capacita a melhor enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

Outros elementos da Transposição Didática

A *textualização do saber* é um processo de preparação prévia por que passa o conteúdo a ser ensinado na escola, e sua realização ocorre sob o controle de certas regras que visam a estruturação de uma forma didática. Toda proposta educativa pressupõe necessariamente a existência de uma tal preparação. Entre essas regras que estruturam a textualização do saber, podemos destacar, a partir da análise de Chevallard (1991): a *desincretização*, que consiste na exigência de proceder a uma divisão da teoria em várias áreas e em especialidades bem delimitadas; a *despersonalização*, que consiste na exigência da separação do saber de qualquer contexto pessoal; a *programabilidade*, que consiste no estabelecimento de uma programação da aprendizagem segundo uma seqüência progressiva e racional; a *publicidade* que é a definição explícita do saber que deverá ser ensinado.

Na análise da estrutura da *textualização do saber*, podemos destacar duas variáveis fundamentais que são o *tempo didático* e o *tempo de aprendizagem*. Não podemos pensar numa programação de ensino sem considerar atentamente essas duas condicionantes.

O *tempo didático* é aquele marcado nos programas escolares e nos livros didáticos em cumprimento a uma exigência legal. Ele prevê um caráter cumulativo e irreversível para o saber. Isso implica o pressuposto de que seja possível de alguma forma "enquadrar" o saber num determinado espaço de tempo. Há uma forte crença na possibilidade de que o processo de ensino-aprendizagem seja progressivo, lógico e racional, que seria possível organizá-lo através de uma seqüência linear de conteúdos. Como se fosse possível comparar a aprendizagem da matemática à linearidade de sua apresentação formal. Seu compromisso está mais diretamente voltado para o texto do saber e para o cumprimento do programa do que para a aprendizagem em si.

O *tempo de aprendizagem* é aquele que está mais vinculado com rupturas e conflitos do conhecimento, exigindo uma permanente reorganização de informações, e que caracteriza toda a complexidade do ato de aprender. É o tempo necessário para o aluno superar os bloqueios e atingir uma nova posição de equilíbrio. Trata-se de um tempo que não é seqüencial e nem pode ser linear na medida em que é sempre necessário retomar as antigas concepções para poder transformá-las. Cada sujeito tem o seu próprio tempo de aprendizagem. Enquanto alguns aprendem rapidamente, outros necessitam de um espaço de tempo bem maior.

Na comparação entre esses dois tempos, devemos sempre considerar que a temporalidade subjetiva jamais pode ser igualada às exigências do planejamento didático. São duas idéias que não podem ser identificadas e que marcam um ponto crucial no problema da avaliação. Na prática tradicional é possível identificar uma certa ilusão pedagógica que consiste em desconsiderar a distância entre esses dois tempos.

A superação didática dessa distância passa por uma retomada constante das noções já estudadas, nas mais variadas situações, sempre buscando novos níveis de formalização dos conceitos envolvidos. Trata-se de buscar uma convivência permanente com os diversos níveis de conceitualização. Em suma, devemos estabelecer um constante movimento de aproximação do saber.

Para compreender melhor esses dois tempos é necessário voltar a uma outra *especificidade do ensino da matemática,* que é a resolução de problemas. O problema, que é sempre o elemento propulsor do saber matemático, é também um elemento essencial da prática pedagógica. Mesmo que no ensino o seu estatuto seja diferente daquele da pesquisa, o problema sempre envolve uma relação entre o que já se encontra assimilado pelo sujeito e um novo conhecimento. No plano pessoal, essa relação leva a uma dialética entre algo que representa o *novo* para o espírito do aluno e o *antigo* que ele já conhece. Daí, para que ocorra a aprendizagem é preciso a superação das contradições inerentes a essa dialética.

O problema maior é que essa superação não pode ser medida em termos quantitativos, o que evidencia todas as dificuldades pertinentes à avaliação nesse nível da aprendizagem. Desta forma, um determinado conteúdo pode permanecer por muito tempo como um bloqueio para o aluno. Este é o caso, por exemplo, quando encontramos alunos, nas séries finais do ensino médio, que ainda não compreendem noções trabalhadas nas séries iniciais do ensino fundamental.

As *noções paramatemáticas* são idéias que se caracterizam como "ferramentas" auxiliares à atividade matemática, mas que normalmente não se constituem em objetos de um estudo específico. A importância de conhecer tais noções é enfatizada por Chevallard (1991). Ao contrário dos conceitos matemáticos, tais noções normalmente não são ensinadas de uma forma explícita e também são excluídas de uma avaliação direta. Elas são concebidas como idéias possíveis de serem "aprendidas" no transcorrer da própria aprendizagem. Entretanto, são sempre necessárias tanto ao ensino como à aprendizagem da matemática.

As noções de parâmetro, equação, definição, demonstração, fatoração são exemplos de noções paramatemáticas. Na prática da matemática, é sempre necessário realizar uma demonstração, proceder à escolha adequada de parâmetros, ou fazer substituições de variáveis convenientes. Trata-se de procedimentos indispensáveis ao desenvolvimento do pensamento matemático. Sempre se pede ao aluno para resolver uma equação ou demonstrar um teorema, mas quase nunca se pergunta o que é uma equação, uma demonstração ou uma definição matemática.

As *noções protomatemáticas* formam uma categoria de habilidades que não se referem diretamente às noções matemáticas em si, mas que são exigidas de uma forma implícita na sua aprendizagem escolar. Logo quando se inicia o estudo de uma noção matemática, mesmo nas séries iniciais do ensino fundamental, já se exige do aluno um desempenho mínimo que o capacite, no plano intelectual, a empreender uma iniciação ao saber. São competências que antecedem ao próprio conhecimento matemático, tais como habilidade de raciocínio, percepção de modelos, identificação e formulação de questões, etc.

Chevallard exemplifica tais noções através das situações em que o aluno é solicitado a *reconhecer* as igualdades algébricas envolvidas no estudo dos produtos notáveis. Nesse mesmo nível dessas habilidades, está a exigência do domínio de uma *linguagem* mínima, seja para a compreensão de textos, seja para a própria expressão de uma idéia pelo aluno. Em suma, são competências necessárias à aprendizagem da matemática e que também não são objetos de um ensino intencional. Elas adquirem sentido num contexto específico e geralmente associado a uma situação didática. Essas habilidades geralmente estão associadas à história individual de cada aluno e certamente as condições sociais e culturais já determinam uma tendência de sucesso ou de fracasso escolar nessa direção.

A noção de *prática social de referência* (cf. Joshua e Dupin, 1993) é estudada na análise de uma

transposição didática com a finalidade de contribuir na estruturação de uma educação mais significativa. Para isso, é necessário indagar qual era o contexto que deu origem às idéias que constituem o ensino da matemática. A história dessas idéias, o seu contexto científico e o quadro de referência que lhes deram origem possibilitam uma abordagem mais coerente e adaptada à prática educativa. Essa abordagem revela uma postura eminentemente crítica e plenamente possível de ser praticada através da transposição didática.

Joshua e Dupin (1993) destacam a necessidade de estudar as relações que podem ser estabelecidas entre a prática pedagógica e essas práticas de referências. A prática de referência serve como uma âncora que contextualiza o saber a ser ensinado e permite assim uma compreensão melhor dos seus possíveis valores educativos. Entretanto, compete ao professor fazer a devida recontextualização sem inverter o significado original do conhecimento.

Há toda uma diversidade de fontes de referências que podem ser consideradas no ensino da matemática, tais como as ciências e as técnicas de uma forma geral e até mesmo certos problemas vinculados ao cotidiano. Diversos problemas são motivados a partir de questões até mesmo internas à área da matemática. Acreditamos que o indesejável é a redução do ensino a uma única fonte de referência, o que certamente reduz também o seu significado educativo. A noção de prática de referência permite ao professor uma postura crítica que consiste em priorizar os valores educativos sem no entanto reduzir o seu aspecto científico.

Metodologia do ensino e Transposição Didática

Um dos maiores equívocos encontrados na educação matemática consiste na adoção do próprio método axiomático como uma metodologia exclusiva e ideal de ensino. O método científico de organização lógica do discurso matemático tem sido usado igualmente como a alternativa metodológica quase que permanente para o seu ensino. Assim, poderia até parecer que não haveria nenhuma questão a ser discutida quanto à metodologia de ensino, pois ela já estaria "naturalmente" dada pela própria matemática. Nesse sentido podemos dizer que há uma *identificação metodológica* entre a condução do ensino e a forma de validação do saber matemático.

É preciso retomarmos aqui o fato de que a etapa da descoberta matemática não equivale ao processo de sua validação lógica. São duas etapas distintas cuja análise interessa ao ensino da matemática. A criação do saber envolve todos os procedimentos necessários à síntese do resultado novo. Toda tentativa de compreender essa criação esbarra nas questões de ordem subjetivas e psicológicas. Alguns autores consideram até mesmo inadequado admitir a existência de uma lógica para explicar esse processo criativo. A esse propósito Popper (1974) separa claramente os dois aspectos do descobrimento científico:

> (...) distinguirei nitidamente entre o processo de conceber uma idéia nova e os métodos e resultados de seu exame sob um prisma lógico. Quanto à tarefa que toca à lógica do conhecimento – em oposição à psicologia do conhecimento – partirei da suposição de que ela consiste apenas em investigar os métodos empregados nas provas sistemáticas a que toda idéia nova deve ser submetida para que possa ser levada em consideração. (p. 3)

Essa distinção evidencia o núcleo do problema didático do ensino da matemática. Pois o desafio maior da aprendizagem ocorre mais intensamente no nível da descoberta. A apresentação axiomática, de fato, apresenta algumas vantagens para o ensino da matemática. Por exemplo, ela permite, a cada instante, se necessário for, definir novas noções a partir do que foi previamente exposto, e desta maneira "preparar" o aluno para novas aprendizagens. Tem-se a impressão de que é possível, num mínimo espaço de tempo, a apresentação de um máximo de informações. O uso do método axiomático no ensino, que privilegia o encadeamento "natural" das idéias, pode ser associado ao método dos passos formais de Herbart (apud Luckesi, 1994) que tem sido a tendência predominante na prática tradicional do ensino da matemática.

Alguns elementos de síntese

A análise da evolução do saber escolar através da transposição didática possibilita uma fundamentação para uma prática pedagógica reflexiva e uma melhor compreensão do saber científico e de seus valores educativos. Podemos dizer assim que a transposição didática significa uma maneira de expressar o verdadeiro espírito de *vigilância intelectual* na prática educativa. Dada essa sua importância para o ensino, é necessário um esforço de pesquisa educacional que vise a identificação de boas transposições didáticas adequadas às exigências da realidade em que se insere a escola. Uma análise dialética da noção de transposição didática mostraria que há também a possibilidade de inverter o fluxo de observações, isto é, a partir de pesquisas feitas em sala de aula, contribuir para a consolidação de um saber acadêmico especificamente pertinente à área de Educação Matemática. Na prática pedagógica a concepção platônica deve ser cuidadosamente ponderada apenas como uma forma não exclusiva de visualizar as noções matemáticas. O conceito considerado fixo e eterno deve ceder lugar a uma abordagem que permita visualizar as noções, do ponto de vista da aprendizagem, sempre em estado de evolução. É preciso admitir um permanente *espírito de retificação das idéias* na direção da objetividade, da abstração e da generalidade.

A construção das idéias matemáticas não se faz por simples acréscimos ou reformulação do conhecimento popular. Na maioria das vezes ocorre uma verdadeira *ruptura com o conhecimento empírico.* Em face dessa dificuldade há duas posições pedagógicas igualmente radicais: uma consiste na tentativa de reduzir o saber escolar a um tipo de conhecimento desprovido de valor educativo para a matemática, a outra busca isolar o ensino aos limites internos de sua própria dimensão científica, totalmente isolado da realidade do aluno. Temos portanto que o desafio didático passa pela superação dessas posições extremas e a interação do conhecimento popular com o saber escolar sintetiza a questão da coerência e do significado da educação. No contexto educacional interessa destacar o problema da *transposição dos conhecimentos populares* para o contexto escolar. Essa passagem se constitui num dos principais desafios que a escola deve enfrentar para proporcionar uma educação que seja mais significativa. O saber escolar mesmo não podendo ser jamais identificado ao saber científico deve estar sempre voltado para os valores educativos das ciências. Todo esforço deve ser feito no sentido de não reduzir o conteúdo escolar a uma validação pura e simples dos conhecimentos do senso comum. Por outro lado, é preciso que o saber escolar se constitua a partir do conhecimento do aluno. Caso contrário estabelece-se um verdadeiro conflito entre o saber escolar e a realidade do aluno.

O uso exclusivo do *método axiomático no ensino da matemática* fornece apenas um meio de apresentação do conteúdo, mas as questões mais desafiadoras da construção do conhecimento não chegam a ser por ele alcançadas. Além disso, o ensino baseado exclusivamente nesse método desconsidera as questões inerentes ao desenvolvimento do saber e apaga todos os vínculos com as práticas de referências. A transposição didática é o recurso teórico que possibilita a restituição dessa perda de significado buscando compreender todas as questões contextuais e científicas. A análise da transposição didática envolve, além das noções matemáticas, noções que, mesmo sendo necessárias à aprendizagem, geralmente não são ensinadas. O estudo didático dessas noções, chamadas de *paramatemáticas* e *protomatemáticas,* é relevante para a compreensão do fenômeno educacional da matemática. No sentido amplo percebemos a existência de saberes e competências que devem ser aprendidos, porém dificilmente são ensinados. Essa incongruência nos leva, mais uma vez, a refletir sobre a verdadeira função que a matemática tem exercido na educação escolar. No que se refere à epistemologia do professor de matemática, acreditamos que ocorre um certo tipo de *contágio do saber científico na prática pedagógica*. A natureza do conhecimento matemático acaba influenciando nas concepções pessoais do professor quanto à sua visão educacional. Por exemplo, por ter a matemática um caráter de rigor intrínseco à sua natureza, o professor de matemática normalmente é rigoroso em suas relações pedagógicas. Isso ocorre não somente com o aspecto do rigor, mas também em relação a outras características do pensamento matemático.

Bibliografia

ASTOLFI, J-P. e DEVELAY, M. *A didática das ciências*. Papirus. Campinas, 1990.

BACHELARD, G. *La formation de l'esprit scientifique*. 14ª ed., Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1989.

BACHELARD, G. *O racionalismo aplicado*. Rio de Janeiro, Zahar, 1977.

BECKER, F. *A epistemologia do professor - o cotidiano da escola*. 5ª ed., Petrópolis, Vozes, 1997.

BOMBASSARO, L. C. *As fronteiras da epistemologia*. 3ª ed., Petrópolis, Vozes, 1997.

BOYER, C. *História da matemática*. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. v.7, n.2, pp.33-115, Grenoble, 1986.

____. Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v.9, n.3, pp. 309-336, Grenoble, 1988.

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, La Pensée Sauvage, 1991.

CONNE, F. Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.12, n.23, pp. 221-270, Grenoble, 1992.

DAVIS, P. e HERSH, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1985.

FOUREZ, G. *La construction des sciences – introduction à la philosophie et à l'ethique des sciences*. Bruxelas, Editions De Boeck, 1988.

GONSETH, F. *Les mathématiques et la réalité*. Paris, Librairie Scientifique et Technique Albert Branchard, 1974.

JOSHUA, S. e DUPIN, J-J. *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris, Presses Universitaires de France, 1993.

KANT, E. *Critique de la raison pure*. 11ª ed., Paris, Presses Universitaires de France, 1986.

KUHN, T. S. *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo, Perspectiva, 1975.

KLINE, M. *O fracasso da matemática moderna*. São Paulo, Ibrasa, 1976.

LUCKESI, C. L. *Filosofia da educação*. São Paulo, Cortez, 1994.
LUZURIAGA, L. *História da educação e da pedagogia*. 8ª ed., São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1976.
PASTOR, J. R. e ADAM P. P. *Metodologia de la matematica elemental*. 2ª ed., Buenos Aires, Ibero Americano, 1948.
POPPER, K. *A lógica da pesquisa científica*. São Paulo, Cultrix, 1974.
QUILLET, P. *Introdução ao pensamento de Bachelard*. Rio de Janeiro, Zahar, 1977.
REZENDE, A. M. *Concepção fenomenológica da educação*. São Paulo, Cortez, 1990.

CONTRATO DIDÁTICO

Benedito Antonio da Silva

Introdução

As idéias de Contrato Didático aqui apresentadas baseiam-se na definição devida a Guy Brousseau e nas contribuições sobre o assunto encontradas nos trabalhos de Régine Douady. Os leitores que pretendam se aprofundar na matéria, encontrarão subsídios nas obras que constam nas referências bibliográficas apresentadas no final deste capítulo. Nelas também se encontra uma ampla listagem de materiais que versam sobre o assunto.

A relação professor-aluno está subordinada a muitas regras e convenções que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Essas regras, porém, quase nunca são explícitas, mas se revelam principalmente quando se dá a transgressão das mesmas. O conjunto das cláusulas, que estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber, constitui o chamado *contrato didático*.

Segundo Brousseau (1986),

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de

A NOÇÃO DE "OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO" E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Sonia Barbosa Camargo Igliori

A ciência não foi fabricada para ser ensinada, ela tem seus meandros próprios que são, como diz o adágio, de compreender o mundo e de o transformar.
(Radford, 1997)

Ce qui est objet d'enseignement n'a que la force que lui prête celui qui est enseigné
(Francisco Sanches-1541)

Este texto tem por objetivo apresentar algumas considerações sobre a noção de obstáculo epistemológico e suas relações com a didática da Matemática. Foi elaborado recuperando, de forma sintética, alguns dos enunciados apresentados por pesquisadores de Educação Matemática. Com certeza, o assunto é por demais profundo e polêmico, para que se atinjam as diversas visões existentes. Procuramos destacar alguns pontos que julgamos essenciais para um primeiro contato. Assim, organizamos o texto em três partes: numa primeira expomos mais geralmente as questões sobre o relacionamento entre Epistemologia e Didática; numa segunda apresentamos a noção de obstáculo epistemológico e suas influências na pesquisa em Educação Matemática e numa terceira exploramos pontos de vista dos pesquisadores sobre o tema e alguns exemplos.

É importante ressaltarmos que a Educação Matemática que, praticamente, tem três décadas de existência está em fase de constituição e seus fundamentos estão sendo constantemente revistos.[1] É neste contexto que se coloca a importância do relacionamento Epistemologia e Didática da Matemática. Conhecer os debates em torno desta questão e tomar contato com as pesquisas recentes é fundamental para os pesquisadores da Educação Matemática e para todos os que se dedicam ao ensino da Matemática.

É intuito deste texto despertar a atenção para esse ponto essencial a ser conhecido e tomado como parâmetro para o estudo dos problemas do ensino/aprendizagem da Matemática. As dificuldades encontradas no ato de ensinar Matemática e a necessidade social da busca de caminhos que possam diminuí-las é um incentivo para o desenvolvimento da pesquisa em Educação Matemática.

---

1. Os primeiros passos da educação científica foram dados no início do século 19 com as reformas ocorridas nas Universidades protestantes da Prússia. Dois grandes momentos marcam a história do ensino científico no século 20: o ano de 1900, e os anos entre 1960-1970 nos quais acontece renovação profunda no ensino da Matemática e da Física.

A epistemologia e a didática

De uma maneira bastante simplificada podemos dizer que a Epistemologia é o ramo do saber que se interessa por questões tais como:

O que é o conhecimento?

Como se processa o conhecimento?

Qual a natureza dos objetos que compõem uma determinada ciência (a Matemática, por exemplo)?

Em que sentido a Matemática é, ao mesmo tempo, um conjunto de ferramentas e um conjunto de objetos?

Qual é a natureza e a função de um novo conceito, um novo procedimento, um novo tipo de raciocínio, uma nova representação na história da Matemática?

Qual deve ser o relacionamento entre novas competências e concepções matemáticas e os problemas práticos ou teóricos de modo a torná-los úteis e significativos?

A Epistemologia tem muitas facetas: pode ser histórica, filosófica, social ou psicológica.

Numa perspectiva gonsèthiana, isto é, aquela em que a construção do conhecimento pode ser considerada ou segundo uma estratégia de fundamentos ou segundo uma estratégia de engajamento, Bkouche (1997) distingue três aspectos da Epistemologia, que consideramos importante citar aqui. São eles:

A epistemologia dos fundamentos – que se propõe ao estudo das condições de legitimação da atividade científica.

A epistemologia do funcionamento – que se propõe à análise dos procedimentos, baseando-se menos nos fundamentos de um conhecimento que em seus significados, quer sejam num plano técnico ou num plano conceitual.

A epistemologia das problemáticas – que se propõe a analisar como os problemas, que têm conduzido o homem a produzir o conhecimento científico, modelaram as teorias inventadas para resolver estes problemas.

No que se refere à epistemologia da Matemática, citamos as abordagens de Vergnaud (1990) em:

• o estudo do conhecimento matemático a partir das reflexões espontâneas dos próprios matemáticos sobre a natureza de seu conhecimento e dos processos de invenção e de descoberta;

• a perspectiva histórica, para entender os ambientes sociais e científicos em que novos conceitos e técnicas da Matemática emergiram e se desenvolveram;

• a incorporação do embate matemático–filosófico sobre os fundamentos da Matemática, que incluem o logicismo, o intuicionismo, o formalismo, o construtivismo entre outros.

A epistemologia da Educação Matemática, por sua vez, desenvolve-se em consonância com campos distintos, tais como a própria Matemática, a Psicologia e outros, pois a Educação Matemática se dá em uma determinada sociedade, em uma determinada instituição, em uma determinada sala de aula, e com objetivos diversos como, por exemplo, o de educar um

futuro matemático ou ainda o de formar um cidadão para o qual a Matemática é um instrumento.

Um outro aspecto para o qual é interessante chamar a atenção nesta apresentação é o processo de ampliação que sofre a Epistemologia. Para isto aproveitamos algumas reflexões feitas por Gascón (1993).

Depois do esgotamento do empirismo clássico, surgiram duas escolas de pensamento: o empirismo lógico de Carnap, que afronta essencialmente o problema dos fundamentos do conhecimento, com o que constitui a lógica da justificação (ou avaliação formal de teorias); o racionalismo crítico de Popper que afronta o problema do conhecimento científico, com o problema do método: a lógica da descoberta.

Com a "Lógica da investigação científica", a epistemologia clássica sofre primeira ampliação e isto se dá ao mostrar a interconexão, ou dependência mútua, entre o problema do método e o problema do desenvolvimento do conhecimento científico. (Lakatos, 1977)

A epistemologia clássica, centrada em análises dos fundamentos do conhecimento científico, pressupunha e propugnava implicitamente um modelo trivial ("tosco" e "enganoso" como dizia Popper) do desenvolvimento do conhecimento científico e da própria atividade científica, interpretando a Ciência como uma acumulação linear e contínua das descobertas mais ou menos individuais.

Em contraposição a este modelo ingênuo, as investigações histórico-epistemológicas contemporâneas têm defendido modelos diversos do mecanismo do desenvolvimento do conhecimento científico, propugnando que, ao largo de tal desenvolvimento, se produzem mudanças muito importantes e inesperadas no campo dos problemas, das técnicas pertinentes para estudá-los, das teorias (que interpretam os problemas, justificam as técnicas e integram uns e outros em um modelo mais compreensivo) e das próprias regras do jogo científico.

No caso específico da Matemática, um dos primeiros trabalhos de Lakatos consistiu em esboçar um modelo de desenvolvimento da matemática informal que põe em destaque a unidade intrínseca entre a "lógica da descoberta" e a "lógica da justificação" iniciando no caso a ampliação da epistemologia propugnada por Popper.

A conseqüência mais importante desta ampliação consiste em esboçar a dependência mútua entre a epistemologia e a história da ciência, sem negar para ela sua autonomia relativa.

Gascón (1993), na perspectiva de Lakatos, considera que a epistemologia da Matemática expõe os modelos do desenvolvimento do conhecimento matemático com a ajuda do qual o historiador da Matemática reconstrói a "história interna" e constitui, deste modo, uma explicação racional do desenvolvimento do conhecimento matemático. Por sua vez, os modelos epistemológicos podem ser avaliados com ajuda dos dados históricos. Por fim, toda reconstrução racional necessita ser completada com uma "história externa" (sociopsicológica).

Gascón (1993) defende em seu artigo a necessidade de uma nova ampliação da epistemologia da Matemática. Do lado da Didática ele propugna também a necessidade de uma ampliação radical da problemática didática que inclua, como objeto de estudo, as transformações que sofrem os conhecimentos matemáticos a serem ensinados e os modelos mais ou menos explícitos do saber matemático que são construídos inevitavelmente antes de serem incluídos em um processo didático e que continuam evoluindo ao largo deste processo.

Brousseau (1983) acredita que uma boa teoria epistemológica acompanhada de uma boa "engenharia didática" são indispensáveis para responder muitas das questões que têm sido colocadas para a pesquisa em didática da Matemática. Questões como: os saberes advindos de disciplinas fundamentais permitem, sem modificações e independentemente uns dos outros, explicar os fenômenos do ensino? E estes saberes produzem de maneira controlada as modificações que se desejam realizar neste ensino? Ou, ao contrário, é preciso criar conceitos novos, um campo de conhecimentos e métodos adequado para estudar as situações didáticas? Existe uma "variante didática" dos conceitos de sentido, de estrutura, de decimal, etc., desconhecida na Lingüística, na Psicologia, na Matemática?

Ele considera também que a análise epistemológica permite a um pesquisador da Educação Matemática a identificação de obstáculos, entre as dificuldades detectadas no processo da aprendizagem.

Para Artigue (1995), a análise epistemológica ajuda um didata a manter, à distância e sob controle, as "representações epistemológicas" da Matemática (representações que são forjadas neste domínio do conhecimento por um indivíduo através de sua própria vivência matemática), induzidas pelo ensino: ajudando-o a contextualizar historicamente os conceitos matemáticos que o ensino usual tende a apresentar como objetos universais, às vezes no tempo e no espaço; ajudando-o a dar historicidade às noções da metamatemática como é o caso do rigor, uma vez que este mesmo ensino cultiva a ficção de um rigor eterno e perfeito da Matemática.

Para ela, a análise epistemológica coloca em evidência a evolução ao longo do tempo da noção de rigor, sua dependência dos domínios matemáticos concernentes e do nível de elaboração que ele manipula. Permite igualmente, ao didata, medir as disparidades existentes entre o "saber sábio" e o "saber a ser ensinado".

A concepção de Bachelard (1938), de que o desenvolvimento do pensamento científico se processa na superação dos obstáculos, e a introdução da noção de obstáculo epistemológico contribuíram para desenvolver um relacionamento maior entre a Epistemologia e a Didática.

As considerações feitas até agora podem dar ao leitor uma idéia da ordem de complexidade das questões que envolvem a relação Epistemologia e Didática da Matemática. É preciso que se analise com cautela a interdependência destes dois campos de conhecimento.

Algumas reflexões de Bkouche (1997) a propósito da corrente que defende uma perspectiva histórica para o ensino da Matemática servem de alerta para a atitude a ser tomada pelos professores diante da utilização de novos conhecimentos, em sua prática docente. Diz ele: "No cruzamento entre a militância e a cientificidade, um entusiasmo justificado leva a um certo estado de espírito de proselitismo, de proselitismo necessário na medida em que permite aos professores interessar-se pelos aspectos históricos das disciplinas que eles ensinam, ou seja, a maneira pela qual ela foi construída e como se desenvolveu até o estado atual. Proselitismo perigoso, porém, desde que ele leve a procurar, na história da Matemática e na reflexão epistemológica que a acompanha, as condições que deverão permitir, enfim, o sucesso do ensino da Matemática".

A noção de obstáculo epistemológico na Educação Matemática

É principalmente na noção de obstáculo que se pode perceber a interdependência entre Epistemologia e Didática.

A noção de obstáculo epistemológico tem sido utilizada principalmente pelos didatas franceses em suas investigações em Educação Matemática.

Esta noção, de obstáculo epistemológico, foi introduzida na Didática da Matemática por Brousseau em 1976 e foi inspirada nas idéias do filósofo francês Bachelard apresentadas em 1938.

Um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar e que se pode em princípio encontrar na história do conceito.

A noção de obstáculo pode ser utilizada tanto para analisar a gênese histórica de um conhecimento como o ensino ou a evolução espontânea do aluno. Pode-se portanto pesquisar os obstáculos epistemológicos a partir de uma análise histórica ou a partir de dificuldades resistentes entre os alunos procurando confrontá-las.

A noção de obstáculo como constituinte do pensamento científico apareceu, pela primeira vez, em 1938 com o epistemólogo francês Gaston de Bachelard, em seu livro: "A formação do espírito científico". Neste livro, o autor se propõe a mostrar o destino grandioso do pensamento científico abstrato. Ele propugna aí que é em termos de obstáculos que se assenta o conhecimento científico, que é no ato mesmo de conhecer que aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, as perturbações e as lentidões, nas quais se mostram as causas de estagnação e de inércia do pensamento, as quais ele denomina obstáculos epistemológicos. Um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado.

Para Bachelard, a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação, não sendo este estudo cômodo em nenhum dos dois casos, pois a história é por princípio hostil a todo julgamento normativo.

Bachelard distingue bem as funções do historiador das ciências e o epistemólogo, dizendo que o primeiro toma as idéias como fatos e o segundo deve tomar os fatos como idéias inserindo-os num sistema de pensamento. "Um fato mal interpretado por uma época permanece, para o historiador, um fato. Para o epistemólogo, é um obstáculo, um contra–pensamento".

O epistemólogo deve triar os documentos recolhidos pelo historiador e julgá-los do ponto de vista da razão evoluída; é somente nos nossos dias que podemos plenamente julgar os erros do passado espiritual.

Questionar quais são as funções reservadas ao didata é possibilitar a caracterização do *status* epistemológico do saber escolar.

A História da Matemática tem sido utilizada num contexto de ensino, já desde o fim do século passado. No entanto a idéia de analisar o conhecimento matemático numa perspectiva histórica para obter algumas luzes de como se dá o processo de construção do conhecimento pelos estudantes só tomou força nos últimos vinte anos, muito em função dos estudos de Bachelard.

Um dos pioneiros no tratamento dessa questão foi Brousseau. Em 1976, ele expõe pela primeira vez, numa conferência no XXVIII encontro do Cieaem: "Os obstáculos epistemológicos e os problemas em Matemática", conferência essa que resulta em seu artigo com mesmo título publicado em 1983. Ele introduz, neste momento, a noção de obstáculo epistemológico como sendo aquele obstáculo ligado à resistência de um saber mal-adaptado, no sentido de Bachelard, e o vê como um meio de interpretar alguns dos erros recorrentes e não aleatórios, cometidos pelos estudantes, quando lhes são ensinados alguns tópicos da Matemática. A concepção dessa noção, segundo Brousseau, permite mesmo mudar o estatuto do erro cometido pelo aprendiz, pois evidencia que o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se crê nas teorias empíricas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente mal adaptado.

Os conhecimentos sobre as relações entre os números naturais constituem, por exemplo, obstáculos para o conhecimento dos números decimais. A afirmação "o quadrado de um número é sempre maior que ele" pode ser considerada como máxima pelos alunos.

O que é característico deste tipo de erro é que ele está ligado a uma maneira de conhecer, a uma concepção característica, coerente e mesmo correta, a um conhecimento antigo que teve sucesso em todo um domínio de ação. Estes erros não são forçosamente explicitáveis, é preciso uma ação consciente dos didatas para que eles venham à tona.

Algumas visões sobre a noção de obstáculo e exemplos

A utilização da noção de obstáculo epistemológico tem criado controvérsias entre os pesquisadores de Educação Matemática, considerando-se a dificuldade apresentada no reconhecimento de tal obstáculo e, em conseqüência, as diferentes conceituações que se pode a ela atribuir.

Para Brousseau o obstáculo é constituído como um conhecimento, com os objetos, as relações, os métodos de apreensão, com as evidências, as ramificações imprevistas. Ele vai resistir, ele tentará (como se

deve) adaptar-se localmente, modificar-se, otimizar-se num campo reduzido, seguindo um processo de acomodação bem conhecido.

Brousseau distingue três tipos de obstáculos que se apresentam no sistema didático: os de origem ontogênica, que são aqueles que se processam a partir de limitações de ordem do tipo neurofisiológicas entre outras, do sujeito, no momento de seu desenvolvimento; os de ordem didática que dependem somente das escolhas realizadas para um sistema educativo; e os de ordem epistemológica, que são aqueles dos quais não se pode nem se deve escapar, pois são constitutivos do conhecimento visado.

Analisando a epistemologia dos números negativos, por exemplo, Glaeser (1981) utilizou os termos obstáculo, dificuldade, barreira e sintoma, de maneira ingênua, por estar convencido de que era prematuro fechar estes conceitos em formulações muito rígidas. Dizia que um dos objetivos mais importantes da didática da Matemática é o de determinar os obstáculos que se opõem à compreensão e à aprendizagem desta ciência. Dizia ainda que apesar de muitos matemáticos, como ele próprio, terem feito tentativas de cercar, de precisar e de dar nuanças em Matemática à noção de obstáculo epistemológico introduzida por Bachelard, acreditava no entanto que, só após o desenvolvimento de numerosos trabalhos, é que se seria capaz de analisar as diferentes concepções de obstáculo e de julgar as distinções pertinentes e úteis para o desenvolvimento da didática da Matemática.

Para Duroux (1982), um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou falta de conhecimentos. Este conhecimento produz respostas adaptadas num certo contexto freqüentemente reencontrado. Mas ele engendra respostas falsas fora deste contexto. Como, por exemplo, o problema de se atrelar os números decimais às medidas leva os estudantes a pensar neles como uma simples mudança de unidades. Por exemplo a unidade 3,25 m é pensado como 325 cm expresso em metros.

Numa pesquisa diagnóstica, que realizamos com alunos do terceiro grau (Igliori e Silva, 1998), pudemos encontrar alguns dos aspectos apontados por Brousseau e reforçados por Duroux como, por exemplo, a incapacidade de encontrar um número decimal entre 3,25 e 3,26. O estudante diz nessa pesquisa que o "sucessor" de 3,14 é 3,15, numa nítida transposição do conceito de sucessor, conceito esse existente no contexto dos números naturais e transposto para os números decimais. Outro obstáculo cujas características se encaixam nas apresentadas por Duroux é o da "concepção" de que "multiplicar sempre aumenta e dividir sempre diminui".

Um ponto de vista que vale a pena ressaltar aqui é o de Artigue (1990), que faz o seguinte questionamento: para se conferir o estatuto de obstáculo epistemológico em didática é essencial fornecer a ele o atestado histórico das dificuldades análogas?

Analisando um trabalho sobre a epistemologia da noção de limite, Artigue (1990) de uma certa forma responde essa questão por ela mesma colocada quando expõe sua impressão:

> o que fundamenta, de alguma maneira, o obstáculo epistemológico é mais a aparição e a resistência na história de certos conceitos, bem como a observação de concepções análogas entre os alunos, do que a constatação da resistência a estes conceitos entre os estudantes da atualidade.

Ela se posiciona para além da identificação dos obstáculos na história ou na aprendizagem de tal ou tal noção, mas antes numa busca de identificação de processos produtores de obstáculos em Matemática. Ela cita como exemplo destes processos: *a generalização abusiva, a regularização formal abusiva; a fixação sobre uma contextualização ou uma modelização familiares; a aderência exclusiva a um ponto de vista.*

Analisando o exemplo apresentado por Brousseau de que o conjunto dos naturais é obstáculo para a aprendizagem do conjunto dos números decimais diz Artigue: na realidade o que parece plausível é atribuir a N (conjunto dos naturais) o estatuto de obstáculo epistemológico em relação a D (conjunto dos decimais), porque se apercebe, no funcionamento deste obstáculo, a manifestação de um processo que tem se revelado historicamente gerador de obstáculo: *a generalização abusiva.*

Como exemplos de resultante do processo da *regularização formal abusiva*, ela apresenta erros do tipo: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ou $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Um momento de exposição das controvérsias sobre a noção de obstáculo epistemológico está registrado num debate entre Brousseau e Glaeser (1984).

A noção de obstáculo está em fase de se constituir e de se diversificar na Educação Matemática. Portanto, não é fácil dizer generalidades pertinentes a respeito dessa noção. É melhor analisar casos. Muitas das contribuições dos pesquisadores foram nessa direção, na análise de casos. Por isto, achamos oportuno apresentar ainda o exame de outros exemplos encontrados na literatura, para situar melhor o leitor.

As noções de números, de função, de limites são noções que causaram obstáculos persistentes no processo de construção e continuam a causar no processo de aprendizagem, e por esta razão têm sido analisadas por diversos pesquisadores.

A noção de número, por exemplo, foi sendo elaborada num processo de enfrentamento de obstáculos. É o caso, por exemplo, da conceituação dos números negativos, da introdução do número zero, da conscientização da existência de um número irracional, do número imaginário.

Brousseau (1983), num retrospecto histórico do ensino dos decimais na França, diz que a "vulgarização" dos decimais se tornou um problema e que foram necessários dois séculos para se dar o primeiro passo.

Ele destaca alguns dos aspectos da disseminação, através do ensino, do conceito de decimal, os quais expõem de que maneira foram sendo forjadas muitas das dificuldades encontradas até os nossos dias. Numa edição de 1784, escrita pelo abade Bossut, os decimais são apresentados como sendo um inteiro com vírgulas, servindo para representar as medidas. Nesta edição, o aspecto fração decimal é relegado a um apêndice. Uma fratura se anuncia aí entre as frações decimais e os "decimais populares" aqueles al-

goritmos maravilhosamente simples que permitiam vulgarizar totalmente a contabilidade comercial.

A concepção dos racionais e dos decimais como razões, ou ainda como operadores lineares sobre Q (conjunto dos racionais), constituem-se na história em um grande obstáculo epistemológico para a conceituação dos números. Havia uma atrelagem dos números decimais às medidas de grandezas.

Outro exemplo exposto na literatura é o obstáculo gerado pelo algoritmo euclidiano da divisão entre os inteiros, veiculando a idéia de que o dividendo deve ser maior que o divisor.

Glaeser (1981) se propõe analisar os obstáculos existentes no estudo dos números relativos. Diz ele que a construção dos números negativos foi de uma lentidão surpreendente (1500 anos, de Diofante a nossos dias), mas que este fenômeno parece ter escapado da análise de muitos historiadores. Destaca ele que, em geral, também os didatas davam pouca atenção para as dificuldades existentes na aprendizagem da regra de sinais. Como por exemplo, o trabalho de Hans Freudental, que examina as dificuldades ligadas à aprendizagem dos números, dá pouco destaque às relacionadas à regra dos sinais. Segundo ele estas regras são geradoras de muitas dificuldades na aprendizagem.

Em seu artigo Glaeser seleciona, através do estudo do trabalho de dez autores (Diofante, Stevin, Descartes, Mac Laurin, Euler, d´Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy e Hankel), seis obstáculos que apareceram na constituição dos números relativos: *inaptidão para manipular as quantidades negativas isola-*

das; dificuldade de dar um sentido às quantidades negativas isoladas; dificuldade de homogeneização da reta numérica; a ambigüidade dos dois zeros – zero absoluto e zero origem; a estagnação no estágio das operações concretas (por oposição ao estágio das operações formais), ou seja, a dificuldade de se afastar de um sentido "concreto" atribuído aos entes numéricos; desejo de um modelo unificante: isto é, por exemplo, o desejo de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo (da perda e do ganho), para o domínio multiplicativo.

Glaeser faz notar que o modelo comercial, que facilita a compreensão da adição dos relativos, é um obstáculo para a multiplicação.

As análises epistemológicas das dificuldades encontradas na institucionalização dos números negativos no decorrer dos tempos e das encontradas por nossos alunos nos dias de hoje no processo de aprendizagem poderiam indicar que tais dificuldades são constitutivas do conhecimento e assim são os números positivos um obstáculo epistemológico para o aparecimento dos números negativos.

Radford (1997) avalia que as dificuldades apresentadas na aprendizagem dos negativos é mais um problema cultural que constitutivo do próprio conhecimento. Como defesa de seu argumento ele destaca a cultura chinesa na qual os matemáticos utilizam uma maneira inteligente de trabalhar com as quantidades negativas a partir da utilização de bastões coloridos, utilização essa que tem evitado dificuldades na aprendizagem dos alunos chineses a exemplo das dificuldades para os ocidentais. Para Radford, a dificuldade

que os números positivos colocam no aparecimento dos números negativos não é um problema intrínseco do conhecimento, depende de características locais, idéias culturais sobre ciência, matemática, seus objetos e métodos.

Um outro exemplo estudado por vários pesquisadores é o conceito de limite.

O conceito matemático de limite é uma noção particularmente difícil e tem uma posição central em todo estudo da Análise e Matemática, como fundamento da teoria da aproximação, da continuidade e do Cálculo Diferencial e Integral. As dificuldades na aprendizagem deste conceito têm sido objeto de diversos trabalhos da Educação Matemática.

O de Cornu (1981) é um deles. Em seu trabalho, a noção de limite foi historicamente introduzida para resolver principalmente: problemas geométricos (como por exemplo os relacionados ao cálculo de áreas); problemas de soma e raio de convergência de séries; problemas de diferenciação.

A partir daí Cornu destaca o que segundo ele são os quatro grandes obstáculos epistemológicos na história do conceito de limite: 1) *a impossibilidade de estabelecer ligação entre o geométrico e o numérico*; 2) *a noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno;* 3) *o aspecto metafísico da noção de limite; 4) o questionamento se um limite é atingido ou não.*

O aspecto metafísico da noção de limite foi um entrave para a sua introdução na matemática e se apresenta também hoje como um dos principais obstáculos para a aprendizagem. Os estudantes têm relutância em aceitar a noção de infinito por acharem "não rigorosa", "que não existe", "muito abstrata".

Este obstáculo, acrescido do fato de que os cálculos que envolvem limites não são os familiares da aritmética e da álgebra, torna a compreensão do conceito de limite extremamente difícil.

O questionamento indicado em 4) perpassou a história deste conceito. Uns, como Robins (1697-1751) diziam que um limite nunca pode ser atingido, a exemplo da seqüência de polígonos regulares com lados cada vez maiores, inscritos num círculo. Eles nunca serão iguais ao círculo.

Cornu (1981) apresenta o debate entre os estudantes dos dias de hoje, relatado abaixo, como uma indicação de que a questão 4) persiste:

Diálogo:

- quanto mais n aumenta, mais 1/n se aproxima de zero.
- aproxima-se tanto quanto se gostaria?
- não, porque senão um dia eles se encontrarão.

Em Sierpinska (1985) podemos encontrar um outro estudo sobre os obstáculos epistemológicos ligados à noção de limite.

Este trabalho apresenta uma abordagem diferente da de Cornu. A autora analisa os entraves na construção da noção de limite agrupando-os da seguinte maneira: os advindos do *horror ao infinito*; os ligados à noção de função; os obstáculos "geométricos"; os obstáculos "lógicos"; e ainda o obstáculo do símbolo. E cada um destes tipos ela ainda divide em subtipos. Vale a pena destacar alguns deles como o denominado

"algébrico", qual seja: utilizar métodos da álgebra, próprios para as grandezas finitas, para as grandezas infinitas. A transferência das propriedades dos termos de uma seqüência para seu limite e ainda o obstáculo de não atribuir "a passagem ao limite" o estatuto de uma operação matemática.

Um outro candidato a obstáculo epistemológico foi estudado por Scheneider (1991). Ela se propõe a caracterizar o obstáculo do que denomina a "heterogeneidade das dimensões", à luz das características através das quais Brousseau e Sierpinska especificam obstáculo epistemológico.

Partindo do pressuposto de que uma certa percepção de grandezas se imiscui nos cálculos de áreas e volumes, grandezas de dimensões distintas são misturadas no seio desta percepção (sólidos com superfícies ou superfícies com linhas). Ela indica como manifestação do obstáculo da "heterogeneidade das dimensões" as conclusões abusivas de que duas grandezas estão entre elas assim como seus indivisíveis, pois elas são subdivididas por estes últimos; o emprestar aos comprimentos de segmentos uma propriedade verificada pelas áreas das superfícies das quais eles são os resíduos.

Alguns pesquisadores em Educação Matemática se interrogam sobre a necessidade da referência histórica para determinar os obstáculos. Eles relacionam talvez mais os obstáculos a um contexto cultural de uma época, do que constitutivos do conhecimento.

Vale ainda ressaltar o ponto de vista de Serpinska que numa releitura de Bachelard identifica para a análise dos obstáculos quatro pontos que a ela parecem transferíveis ao conhecimento matemático:

• um conhecimento funciona como obstáculo se se começa a assim o crer, se ele se torna um preconceito, se ele não é mais questionado, se ele não exige mais ser validado;

• a opinião é um obstáculo ao conhecimento científico;

• um conhecimento científico degenerado em hábito intelectual;

• a concretização de objetos abstratos.

Algumas reflexões feitas por Glorian (s/d) são oportunas para conclusão:

• as concepções que ocasionam obstáculos no ensino da matemática são raramente espontâneas, mas advindas do ensino e das aprendizagens anteriores;

• os mecanismos produtores de obstáculos são também produtores de conhecimentos novos e fatores de progresso;

• o obstáculo está relacionado a um nó de resistência mais ou menos forte segundo os alunos, o ensino recebido, pois o obstáculo epistemológico se desmembra freqüentemente em obstáculos de outras origens, notadamente o didático.

Referências bibliográficas

ARTIGUE, Michéle. Episthemologie et didactique. *RDM*, vol.10/2.3, pp. 241-286. Grenoble, 1990.

____. The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relastionishipsmathematics education. *Proceedings of the 1995 Annual Meeting of Canadian Mathematics Education Study Groups*. University of Western Ontario, Y.M Ponthier, 1995, pp. 7-21.

BACHELARD, Gaston. *La formation de l'esprit scientifique*. Seizième tirage. Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1938.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathématiques. *RDM,* vol.4, nº 2, pp. 165-198. Grenoble, 1983.

BKOUCHE Rudolf. Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. *For the learning of mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, vol.17, number 1, pp. 34-42. Canada, FLM Publishing Association Vancouver, B.C., 1997.

CORNU, Bernard. Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propes. In: COMIT, C. e VERGNAUD, G. (eds.). *Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Grenoble, 1981, pp. 322-329.

GLAESER, Georges. Épistémologie des nombres relatifs. *RDM*, vol. 2.3, pp. 303-346. Grenoble, 1981.

GLAESER, Georges. A propos des obstacles epistemologiques. Reponse a Guy Brousseau. *RDM*, vol. 5.2, pp. 229-234. Grenoble, 1984.

GASCÓN, Josep. Desarrollo del conocimiento matematico y analisis didatico: del patron de analisis-sintesis a la génesis del lenguagaje algebraico. *RDM*, vol.13, nº 3, pp. 295-331. Grenoble, 1993.

GLORIAN, M. J. Perrin. Utilisation de la notion d´obstacle en didactique des mathématiques. *Actes du seminaire de l´IUFM*. Grenoble, s/d.

IGLIORI, Sonia e SILVA, Benedito Antonio. Conhecimento de concepções prévias sobre números reais: um suporte para a melhoria do ensino/aprendizagem. *Anais da 21ª Reunião Anual da ANPEd*, 1998.

LAKATOS, I. *Mathematics, science and epistemology: philosophical papers*. vol. 2 Cambridge, University Press, 1977.

RADFORD, Luis. On psychology, historical epistemology and teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the learning of mathematics. An International journal of Mathematics Education,* vol.17, nº 1, pp. 26-33. Canadá, FLM Publishing Association Vancouver, B.C, 1997.

SCHENEIDER, Maggy. Un obstacle episthémologique soulevé par des "decoupages infinis" des surfaces et solides. *RDM*, vol. 11.2.3, pp. 241-294. Grenoble, 1991.

SIERPINSKA, Anka. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *RDM*, vol.6, nº 1, pp. 5-67, 1985.

VERGNAUD, Gérard. Epistemology and Psichology of Mathematics Education. *Mathematics and Cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of Mathematics Education.* ICMI Study Series, pp. 14-30. Cambridge University Press, 1990.