PEC

CONSTRUINDO SEMPRE

APERFEIÇOAMENTO DE PROFESSORES – PEB II

PROGRAMA DE

EDUCAÇÃO

CONTINUADA

Matemática

112

MÓDULO 2

Matemática

Módulo 2

Nome ACBrelezzi

O Programa *Construindo Sempre – Aperfeiçoamento de Professores PEB II* é uma iniciativa que combina a prática estabelecida na Secretaria de Estado da Educação de formação em serviço de seus professores com o apoio das melhores universidades paulistas e a experiência inovadora de utilização, nesse tipo de capacitação, de diferentes mídias interativas.

Neste Programa, a USP propõe o atendimento de cerca de 2400 professores, que lecionam as disciplinas Língua Portuguesa, Matemática, Geografia, História e Ciências (Biologia, Química e Física), utilizando-se da infra-estrutura que a Secretaria já estabeleceu para outro Programa, o de "Formação de Professores de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental em nível universitário", já finalizado e positivamente avaliado a partir de diferentes perspectivas.

Acompanhado e avaliado, este Programa poderá constituir-se numa sistemática de capacitação contínua dos professores do sistema público estadual, compartilhada entre a USP e a SEE, na busca do aprimoramento crescente do ensino oferecido aos alunos da escola básica, aspiração comum a essas duas instituições educacionais.

Para todos, parabéns pela disposição ao estudo e bom proveito!

Arlete Scotto

Coordenadora da CENP/SEE-SP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – Secretaria de Estado da Educação de São Paulo

Caro professor,

A Universidade de São Paulo sente-se honrada em tê-lo como participante de um trabalho conjunto, envolvendo o PEC - Programa de Educação Continuada, da Secretaria de Estado da Educação, e o Programa Conhecimento e Ação Social, da Universidade de São Paulo. O projeto resultante da confluência desses dois programas recebeu o nome de *Construindo Sempre – Aperfeiçoamento de Professores PEB II.*

A participação da USP no projeto é a mostra de seu compromisso com a formação contínua dos diferentes profissionais, em particular, dos professores da educação básica. Partindo do entendimento de que "a docência não se realiza num quadro abstrato de relações individualizadas de ensino e aprendizagem, mas dentro de um complexo contexto social e institucional" (Projeto de Formação de Professores na USP – 2001), o projeto enfocará o ensino de conteúdos escolares específicos e o seu papel nos objetivos de formação dos educandos.

O propósito é retomar os conhecimentos que você adquiriu em sua formação e imprimir uma reflexão relativa às maneiras mais produtivas para enfrentar os desafios presentes na escola básica pública, especialmente os decorrentes da complexidade da sociedade brasileira contemporânea.

Certamente, um desses desafios refere-se ao fato de que no Estado de São Paulo o expressivo aumento de alunos no segundo ciclo do Ensino Fundamental e no Ensino Médio – dado histórico da maior importância – trouxe para dentro da escola toda a gama de diferenciação existente na sociedade. Tal diferenciação, necessária ela mesma ser bem entendida, indica o valor da rediscussão do projeto pedagógico de sua escola e da programação curricular definida, especialmente a priorização dos tópicos de ensino e das metodologias mais adequadas para serem abordados e compreendidos pelo alunado.

Com a convicção de que o atual projeto será proveitoso tanto para você, professor da rede de Ensino Básico estadual, quanto para os professores da USP, nosso desejo é que a experiência que se inicia fortaleça os vínculos entre as duas instituições.

Sonia Teresinha de Sousa Penin
Pró-reitora de Graduação da Universidade de São Paulo

Este material de apoio do Programa *Construindo Sempre – Aperfeiçoamento de Professores PEB II* abrange o Módulo 2, que será desenvolvido durante três semanas.

Nele, você encontrará a **Apresentação da Área** curricular e a **Apresentação do Módulo** com os temas que serão estudados por meio de atividades presenciais e virtuais.

Em cada semana haverá uma **Videoconferência**. O material traz uma síntese do tema e uma relação de tópicos a serem tratados pelo professor videoconferencista.

A seguir, são apresentados os textos básicos e uma série de atividades que constituem o seu **Trabalho Monitorado** em sala de aula, no qual você receberá assistência do professor tutor.

Na seção **Trabalhando em Sala de Aula**, os autores indicam propostas para você desenvolver com seus alunos.

No final, você encontrará **Referências Adicionais** com indicações, comentadas ou não, de *sites*, livros, teses e filmes relacionados com os temas tratados no Módulo.

Apresentação da Área

A importância da Matemática como ciência básica é indiscutível. Conhecimentos matemáticos são aplicados na interpretação de vários fenômenos em diferentes áreas. A Matemática no Ensino Médio possui, além do caráter formativo, já que ajuda a estruturar o raciocínio dedutivo, um caráter instrumental, pois é encontrada em diversos tipos de situações da vida cotidiana.

Um grande desafio que se coloca a cada professor é o de propiciar ao aluno um aprendizado real e significativo de Matemática. A proposta deste curso é a de trazer subsídios que favoreçam atingir tal objetivo, discutindo alguns temas mais delicados do conteúdo de Matemática, tanto do ponto de vista conceitual como do metodológico.

Baseados nos resultados de exames de avaliação e de exames vestibulares e na nossa experiência com atividades de educação continuada junto a professores da rede pública, escolhemos desenvolver tópicos relacionados ao ensino de Funções, Geometria, Combinatória e Estatística. Estes temas serão tratados de forma integrada, ao longo dos três Módulos.

As Funções serão tratadas como instrumentos para a modelagem de problemas concretos. Os gráficos funcionais serão utilizados para tornar significativas as resoluções de equações e inequações algébricas. Em Geometria serão discutidas as principais características e propriedades das seções cônicas, propiciando um melhor entendimento dos gráficos de várias funções básicas. Os conceitos de área e volume de figuras planas e espaciais também serão tratados. Discutiremos o ensino da trigonometria, enfatizando aplicações. Abordaremos as definições geométricas das funções trigonométricas, para o que será feita uma discussão sobre as medidas de ângulos em graus e radianos. Trataremos dos diversos processos de contagem e da importância do raciocínio combinatório. Discutiremos a importância do desenvolvimento do raciocínio estatístico para conduzir o aluno a selecionar, organizar, relacionar e interpretar dados e informações. É importante que o cidadão hoje conheça a linguagem estatística para formar uma opinião crítica e autônoma dos fatos e das informações.

O computador permitirá ao professor explorar novos e diferentes aspectos dos temas que serão abordados. Mais do que um recurso técnico, o computador será tratado neste curso como um instrumento facilitador do processo de aprendizagem.

O Módulo 2 abordará diversos aspectos da Geometria que, apesar de sua importância, muitas vezes são omitidos dos cursos de Matemática do Ensino Médio.

Desde o Movimento da Matemática Moderna, na década de 1970, a Geometria tem sofrido o estigma de ser um conteúdo difícil, sempre deixado para o final do livro, e assim acabando por não ser dado por falta de tempo.

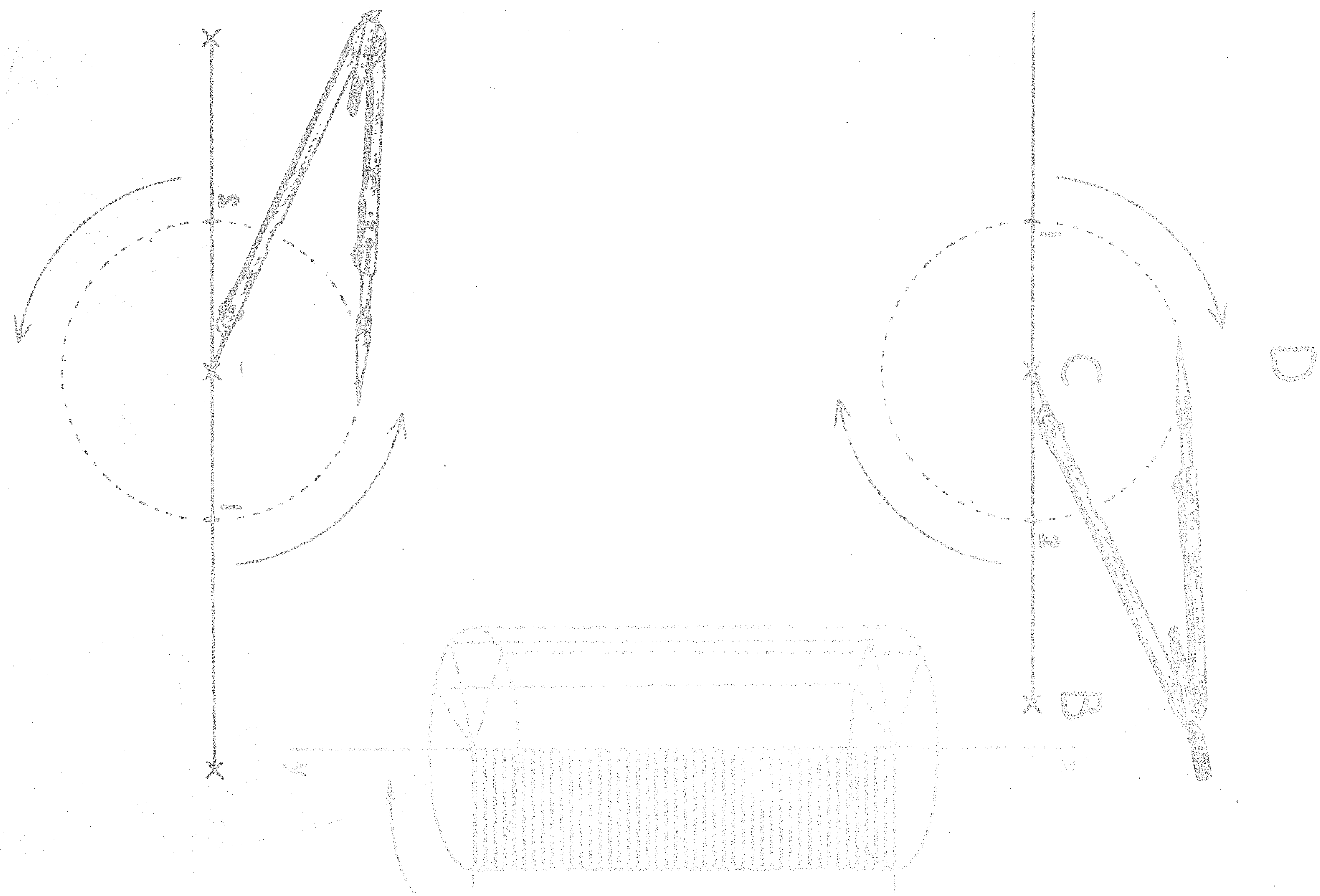
Nas novas tendências, a Geometria volta a ocupar um espaço melhor, intermeando outros assuntos e recebendo poderoso auxílio dos sistemas de computação e de materiais para produção e manipulação de modelos geométricos em laboratórios de ensino de Matemática.

Por outro lado, o papel do ensino de Geometria para o desenvolvimento das inteligências e para a inserção do aluno no mundo da Ciência, do trabalho e da tecnologia tem sido bastante assinalado nas novas propostas. Para além da manipulação de materiais, tem-se verificado uma tentativa de resgate do grande valor histórico e pedagógico da Geometria: o de ser um caminho para o desenvolvimento do pensamento abstrato, tão importante quanto difícil de ser trabalhado com nossos alunos em sala de aula.

Neste Módulo, trataremos alguns tópicos da Geometria com uma abordagem pouco trabalhada nos livros didáticos atuais: cônicas, volumes e o Princípio de Cavalieri. Veremos, assim, a equivalência entre as definições de elipses, parábolas e hipérboles como lugares geométricos de pontos de um plano e como secções de uma superfície cônica. Estudaremos volume utilizando a decomposição de figuras, o método da exaustão e o Princípio de Cavalieri. Mais que apresentar um conjunto ordenado de conhecimentos, optamos por apontar as conexões entre esses assuntos e suas aplicações.

O caráter histórico, as aplicações, as abordagens didáticas e a ênfase nos conceitos corretos permeiam esses tópicos. Com isso, esperamos contribuir para a valorização da Geometria, bem como apontar para um ensino mais significativo para o aluno, visando ao desenvolvimento do raciocínio lógico, competência importante para o exercício da cidadania.

Cônicas, semelhanças, áreas e volumes



Videoconferência 1

Cônicas como lugar geométrico

O reconhecimento de elipses, parábolas e hipérboles se deu na Grécia Antiga, a partir da tentativa de resolução de alguns problemas de construção com régua e compasso.

Posteriormente, foram descobertas muitas utilidades dessas curvas no desenvolvimento da Física, na Arquitetura e também na confecção de objetos óticos destinados à transmissão e à recepção de diversos tipos de ondas.

Tais aplicações decorrem das propriedades características das cônicas como lugar geométrico de pontos de um plano.

Veremos, no Trabalho Monitorado, que essas propriedades permitem identificá-las como gráficos de determinadas funções.

Na Videoconferência, serão abordados os seguintes tópicos:

- Construções de cônicas por meio de dobraduras e de cordões
- Determinação das propriedades geométricas características de parábolas, elipses e hipérboles
- Aplicações de cônicas na construção de objetos refletores
- Intersecção de superfícies cônicas com planos: o teorema de Dandelin

Material de apoio

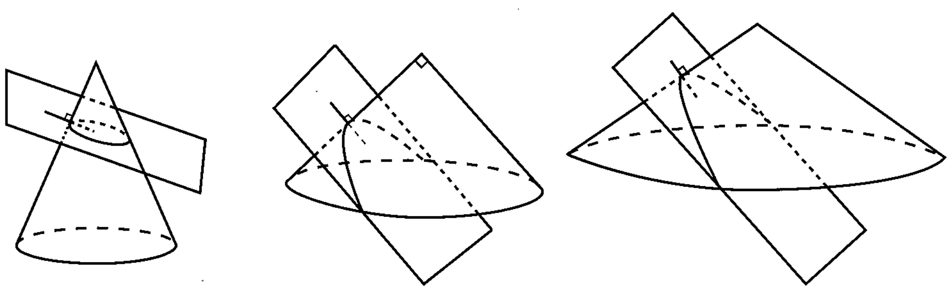
Cônicas como lugar geométrico

Iole de Freitas Druck
Sérgio Alves

As cônicas estão entre os mais antigos tópicos de Matemática estudados de forma sistemática e exaustiva. Aparentemente, foram descobertas por Menaecmus, um grego que viveu entre 375 e 325 a.C., aproximadamente, e foi tutor de Alexandre, o Grande. Seu intuito era tentar resolver os três clássicos problemas de construção com régua e compasso da Antiguidade: a duplicação do cubo, a trissecção de um ângulo arbitrário e a quadratura do círculo (veja a página 44). Para tanto, ele se valeu de uma técnica já conhecida em sua época: as secções de sólidos geométricos. Embora os escritos de Menaecmus tenham se perdido, supõe-se que ele tenha chegado, por volta de 350 a.C., às curvas hoje conhecidas como **elipse**, **parábola** e **hipérbole** seccionando um cone circular reto com um plano perpendicular a uma de suas geratrizes. Conforme o ângulo no vértice do cone fosse agudo, reto ou obtuso, obtinham-se, respectivamente, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole (um ramo).

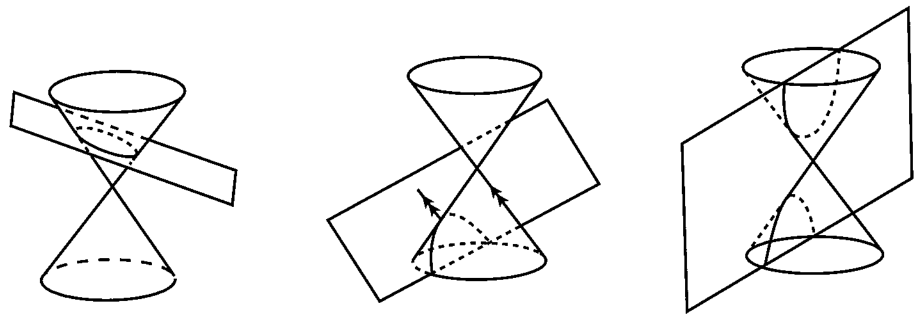
Iole de Freitas Druck é professora do IME-USP, tendo feito doutorado em Matemática (Lógica) na Universidade de Montreal, Canadá. Atualmente, é Coordenadora do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do IME-USP. Co-autora da Proposta Curricular de Matemática para o CEFAM e HEM da CENP, dedicou-se sistematicamente à formação inicial e continuada de professores ao longo de sua carreira profissional.

Sérgio Alves é docente do IME-USP. Mestre em Matemática, tem participado de diversos projetos de formação continuada de professores do Ensino Fundamental e Médio. Atualmente, é vice-diretor do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática – CAEM do IME-USP e responsável pela seção "O Leitor Pergunta", da *Revista do Professor de Matemática*.



Elipse Parábola Hipérbole

Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga são considerados os mais importantes matemáticos da Antiguidade. A fama de Apolônio, que viveu entre 262 e 200 a.C., se deve, principalmente, a seu *Secções Cônicas*, um extraordinário trabalho escrito em oito livros com 487 proposições, sete dos quais se preservaram. Um dos grandes diferenciais de seu trabalho com relação ao de seus predecessores é o fato de ele ter conseguido gerar todas as cônicas a partir de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de intersecção. Também se atribui a Apolônio de Perga o mérito de ter conferido os nomes **elipse**, **parábola** e **hipérbole** às secções cônicas.



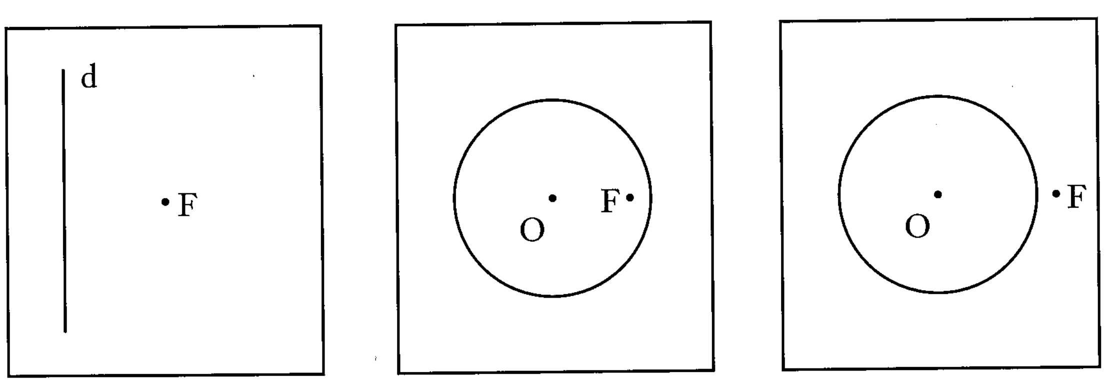
Elipse Parábola Hipérbole

Mais tarde, já na Renascença, as leis de Kepler sobre os movimentos planetários, a Geometria Analítica de Descartes e de Fermat e os primeiros resultados da Geometria Projetiva, obtidos por Desargues, La Hire e Pascal, elevaram as cônicas a um patamar superior. Muitos outros matemáticos contribuíram para o estudo das cônicas, em especial para o desenvolvimento da Geometria Projetiva, em que elas assumem um papel tão fundamental quanto o das circunferências na Geometria Euclidiana.

Vamos iniciar o estudo das cônicas explorando alguns métodos para desenhar seus traçados e as propriedades simples que caracterizam a localização dos pontos dessas curvas relativamente a pontos (focos) ou a retas (diretrizes) especiais a elas associados. Os métodos que serão abordados utilizam dobraduras, malhas circuladas, materiais como cordões e tachinhas e *softwares* de Geometria.

Cônicas através de dobraduras

Tomando-se três folhas de papel vegetal de tamanho ofício, nelas marcam-se uma reta, alguns pontos e duas circunferências com raio de 7 cm, como indicado na figura abaixo.



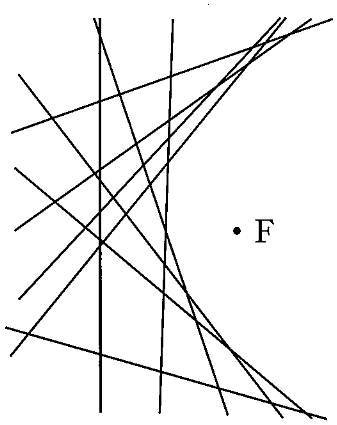
Folha 1 Folha 2 Folha 3

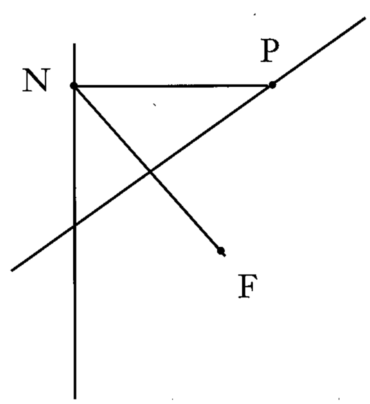
O procedimento consiste em dobrar as folhas fazendo o ponto F sobrepor-se à reta d (Folha 1) ou às circunferências (Folhas 2 e 3) em cerca de 16 pontos distintos, marcando bem o vinco a cada dobra. As retas correspondentes às marcas dos vincos no papel esboçarão claramente o traçado de uma **parábola** (Folha 1), de uma **elipse** (Folha 2) e de uma **hipérbole** (Folha 3). Na verdade, essas retas fazem parte da envoltória de tangentes das respectivas curvas.

As atividades a seguir visam explorar as dobraduras para determinar propriedades que nos permitam definir tais curvas como lugar geométrico de pontos de um plano.

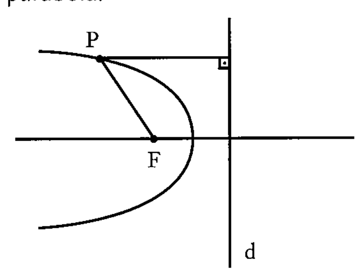
ATIVIDADE 1

Na Folha 1 do seu material, assinale 16 pontos distintos sobre a reta nela desenhada, numerando-os de 1 a 16. Fazendo o ponto F coincidir sucessivamente com cada um dos pontos numerados, marque fortemente os 16 vincos, pressionando as dobras com a unha. Abrindo o papel, você perceberá a forma de uma parábola. Escolha um dos vincos e, com o auxílio de uma régua, reforce, a lápis, o seu traçado. É interessante que cada grupo escolha pontos localizados em diferentes alturas da reta. Discuta com o seu grupo antes de responder.





Parábola é o conjunto de todos os pontos P do plano que são eqüidistantes de uma reta fixa d (chamada **diretriz**) e de um ponto fixo F (chamado **foco**), ambos contidos no plano, com F fora de d. O ponto correspondente à menor distância ao foco (ou à diretriz) é o **vértice** da parábola, e a reta que passa por F e é perpendicular a d é chamada de **eixo** da parábola.

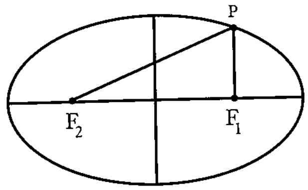


a) Qual a relação da reta desenhada a lápis com o segmento de extremidade F e o ponto numerado N que foi sobreposto a F para formar o vinco?

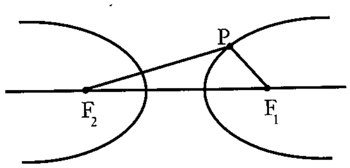
b) Essa reta é tangente à parábola esboçada pelos vincos. Como você determinaria o ponto P da reta que tangencia a parábola?

c) Compare as distintas tangentes reforçadas nos outros grupos e, ainda por meio de dobraduras, verifique que P é o ponto de encontro do vinco reforçado com a reta perpendicular a d, que passa por N. Por que podemos afirmar que as distâncias FP e NP são iguais?

Elipse é o conjunto de todos os pontos P de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos do plano F_1 e F_2 (**focos**) é constante. Esse valor, em geral denotado por 2a, corresponde à distância entre os chamados **vértices** da elipse, pontos estes localizados na intersecção da curva com a reta que contém os focos.

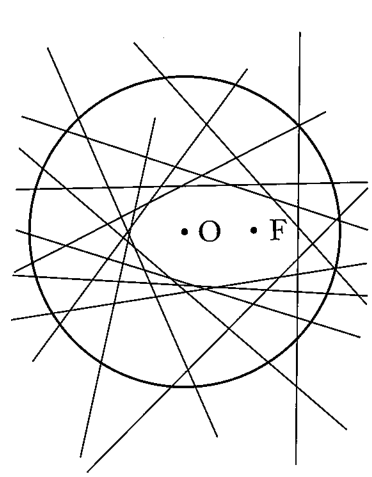


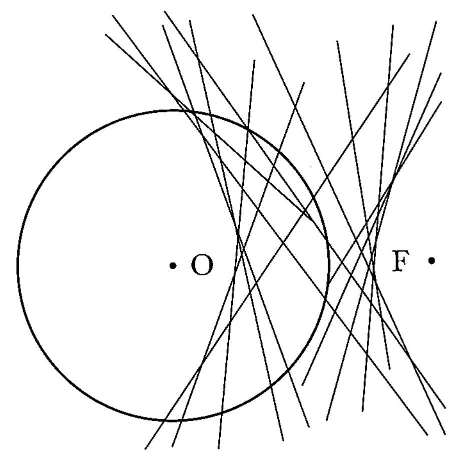
Hipérbole é o conjunto de todos os pontos P de um plano para os quais o valor absoluto da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos do plano F_1 e F_2 (**focos**) é constante. Esse valor, em geral denotado por 2a, corresponde à distância entre os chamados **vértices** da hipérbole, pontos estes situados na intersecção da curva com a reta que contém os focos.



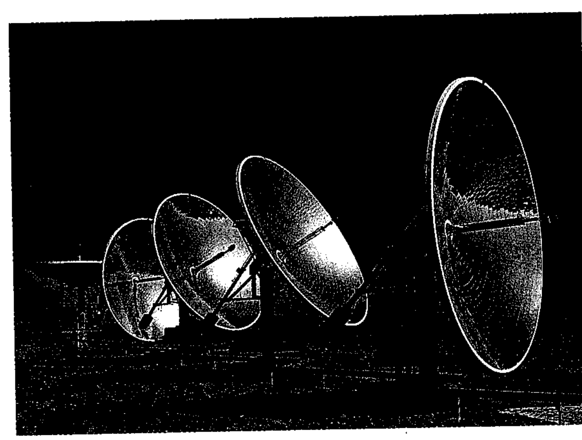
Atividade 2

(Veja também a seção Trabalhando em Sala de Aula na página 31.) Escolha 20 pontos distintos das circunferências das Folhas 2 e 3 e numere-os, procedendo às dobraduras indicadas anteriormente, sempre marcando fortemente os vincos. Na Folha 2, aparecerá uma envoltória de tangentes de uma elipse, com focos no centro O da circunferência e em F. Na Folha 3, o que se verá é uma envoltória de tangentes dos dois ramos de uma hipérbole, com focos também em O e F. Procure determinar os pontos sobre as dobras que tangenciam as curvas. Novamente, é possível identificar as propriedades que caracterizam elipses e hipérboles como lugares geométricos de pontos de um plano, explícitas nas definições ao lado.





Algumas aplicações das cônicas

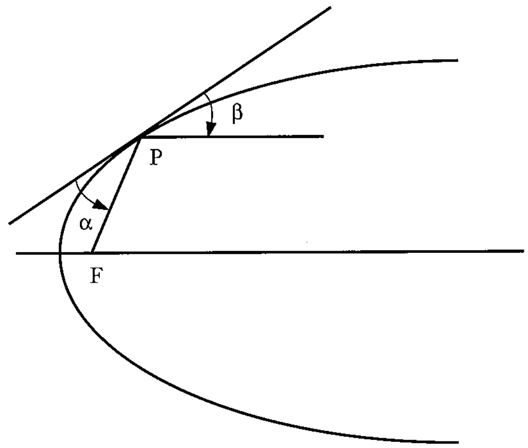


STOCK PHOTOS

Quase todos conhecem as antenas parabólicas, mas nem sempre estabelecem uma relação entre sua forma e a curva que estamos estudando. Os espelhos dos telescópios astronômicos e dos faróis dos automóveis também são parabólicos. Por quê?

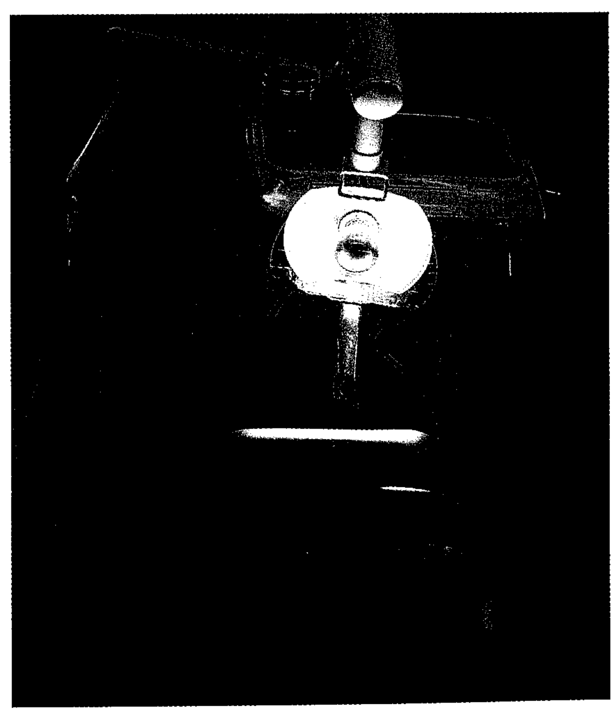
Os sinais que recebemos do espaço (ondas de rádio ou de luz) são, em geral, muito fracos. Por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto, para que sejam naturalmente amplificados. Assim, a superfície da antena deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam redirecionados para um único ponto após a reflexão.

Retomando a dobradura de papel efetuada na Atividade 1 (ou a construção com cordões vista na fita de vídeo apresentada durante a Videoconferência 1), observamos que a parábola possui exatamente essa propriedade: uma vez que o ângulo de incidência com a reta tangente é congruente ao ângulo de reflexão, um sinal emitido numa direção paralela ao eixo, após refletir na parábola, converge para o foco.



Por outro lado, os raios de uma fonte de luz pontual colocada no foco, depois de refletirem na parábola, são irradiados numa direção paralela ao seu eixo. Essa é a razão de os espelhos dos faróis dos automóveis serem parabólicos.

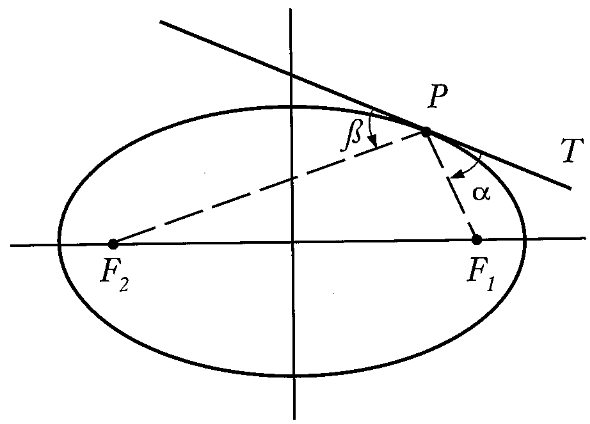
Em 1604, Galileu descobriu que, lançando-se um projétil horizontalmente do topo de uma torre, supondo que a única força atuante seja a da gravidade – isto é, ignorando a resistência do ar e outros fatores complicadores –, sua trajetória seria uma parábola.



ARQUIVO

Existem situações em que precisamos concentrar os raios luminosos refletidos em um ponto, e não ao longo de uma direção. É o que acontece, por exemplo, nos consultórios odontológicos, em que o dentista ajusta uma luminária com essas características para iluminar o dente que está sendo tratado. Dessa forma, ele concentra o máximo de luminosidade no ponto em que está trabalhando e evita que a luz ofusque o paciente, o que causaria desconforto durante o tratamento dentário.

Enquanto os holofotes comuns – como os dos faróis de automóveis – se valem de um espelho parabólico, os holofotes dentários são espelhos elípticos. Isto ocorre devido à propriedade de reflexão da elipse: os raios de uma fonte de luz pontual colocada num dos focos, depois de refletirem na elipse, convergem para o outro foco.

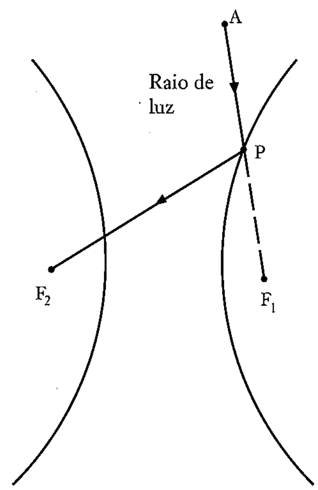


Essa mesma propriedade explica o funcionamento de diversos aparelhos de emissão de raios usados em tratamentos médicos, como, por exemplo, a radioterapia, que devem destruir os tecidos doentes sem afetar os tecidos sadios ao seu redor.

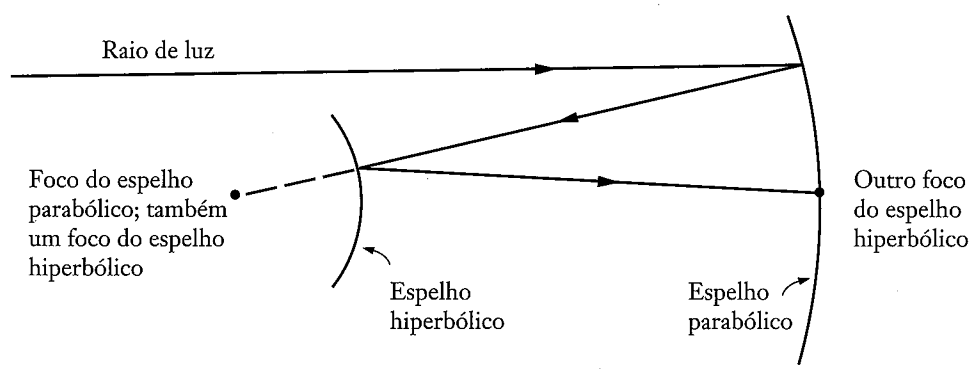
Curiosas aplicações das elipses são as chamadas **salas de sussurros**: trata-se de construções de forma oval cujo chão tem marcados dois pontos, a uma certa distância. Nestas salas, duas pessoas – de pé, uma sobre cada ponto – conseguem se comunicar, por meio de sussurros, sem serem ouvidas pelas demais pessoas. Para projetá-las, fixam-se dois pontos – P e Q –, localizados à altura da cabeça das pessoas que vão se comunicar, e toma-se uma elipse E que tenha P e Q como focos. As salas são construídas de modo que todo plano que passe por esses pontos intercepte a sala segundo uma elipse congruente a E.

Outra importante aplicação envolve o movimento planetário. Um dos grandes eventos da história da Astronomia ocorreu em 1609, quando Kepler (1571-1630) publicou sua descoberta de que a órbita de Marte era uma elipse e lançou a hipótese de que todos os planetas se moviam em órbita elíptica. Cerca de 60 anos mais tarde, Newton (1642-1727) provou matematicamente que a órbita planetária elíptica é causa e conseqüência de uma lei de atração gravitacional, baseada no inverso do quadrado das distâncias. Para explicar o mecanismo do Sistema Solar, Newton formulou e publicou a famosa Teoria da Gravitação Universal, considerada a maior contribuição feita por um só homem à Ciência. Exceto por pequenas perturbações resultantes da influência de outros planetas, cada planeta do Sistema Solar gira ao redor do Sol numa órbita elíptica, tendo este astro num dos focos.

A hipérbole também possui sua propriedade de reflexão. Vamos imaginar um espelho refletor com o formato de um ramo de hipérbole e a parte refletora do "lado de fora". Suponhamos que um raio de luz proveniente de um ponto A incida no espelho em P, de modo que a reta AP passe por um dos focos. Então, o raio refletido passará pelo outro foco.

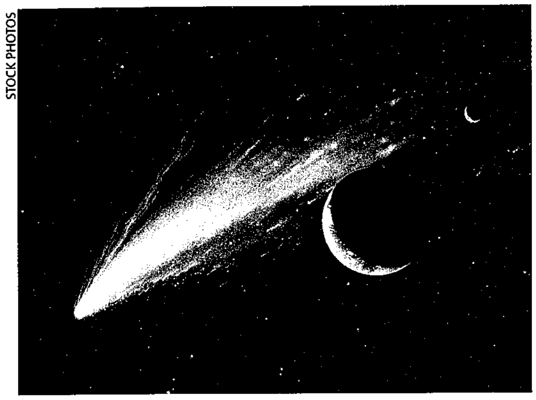


Essa propriedade das hipérboles é o princípio essencial da montagem de telescópios refletores proposta pelo astrônomo francês Cassegrain, em 1672, que utiliza, simultaneamente, espelhos parabólicos e hiperbólicos. Como mostra a figura abaixo, um foco do espelho hiperbólico está no foco do espelho parabólico e o outro está no vértice do espelho parabólico, em que está localizada uma ocular ou uma câmera. Raios paralelos de luz estelar são, portanto, refletidos pelo espelho parabólico em direção ao seu foco e, depois, interceptados pelo espelho hiperbólico e refletidos de volta, em direção à ocular ou à câmera.



Essas montagens só começaram a ser utilizadas nos telescópios cerca de um século após terem sido propostas. Desde então, passaram a ser largamente usadas e, hoje, estão presentes não apenas nos telescópios óticos, mas também nos radiotelescópios.

O famoso telescópio ótico do Observatório de Monte Palomar, que fica 80 quilômetros a nordeste de San Diego, na Califórnia, utiliza várias montagens como as propostas por Cassegrain.



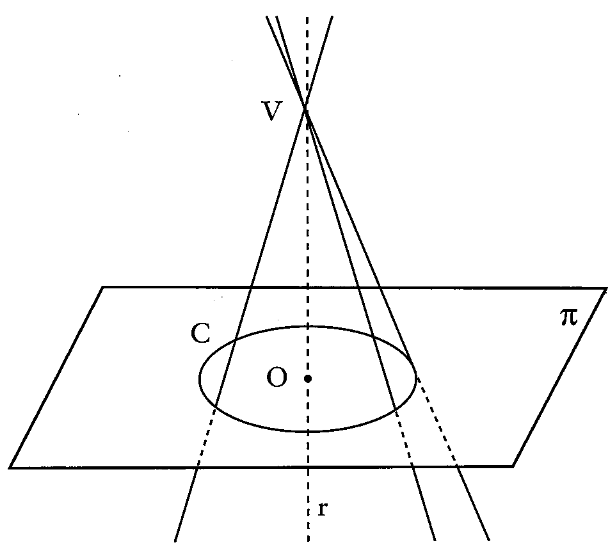
Os cometas que são membros permanentes do Sistema Solar – como o famoso Cometa Halley – viajam em órbitas elípticas, com o Sol posicionado num dos focos. Outros têm órbitas hiperbólicas – também com o Sol num dos focos –, entram velozmente no Sistema Solar, contornam o Sol e voltam ao espaço. O que distingue um cometa de outro é a sua energia total E, a soma de sua energia cinética (devida ao movimento) com sua energia potencial (devida à atração gravitacional do Sol). Se $E > 0$, a órbita é uma elipse, e, se $E < 0$, a órbita é uma hipérbole. O caso $E = 0$ é considerado improvável pelos astrônomos.

Interseccionando superfícies cônicas com planos

Elipses, hipérboles e parábolas são também chamadas de **cônicas**, pelo fato de serem obtidas pela secção de um cone de duas folhas por determinados planos. No entanto, as definições apresentadas para essas curvas exprimem distâncias que envolvem certos pontos – os focos – e que, por isso, são denominadas **propriedades focais** das cônicas.

Vamos, agora, estabelecer a identidade entre as duas versões: cônicas como lugar geométrico e como secções de um cone duplo. Iniciaremos com algumas definições.

Considere uma circunferência C contida num plano π e seja r a reta perpendicular a π, passando pelo centro O da circunferência C. Seja, ainda, V um ponto de r não pertencente ao plano π.



O conjunto S, formado pela reunião das retas determinadas pelo ponto V e pelos pontos de C, é chamado de **superfície cônica de revolução**.

Cada reta $\overleftrightarrow{VP}$ com $P \in C$ chama-se **geratriz** de S. O ponto V é denominado **vértice** e a reta r, o **eixo de revolução** de S.

Se γ é o plano paralelo a π passando por V, temos que γ divide o espaço em dois semi-espaços, E_1 e E_2. Cada conjunto $S \cap E_1$ e $S \cap E_2$ é chamado de **folha** de S.

Uma observação com respeito à nomenclatura: temos nos referido a **cone** em vez de **superfície cônica**. Abusos de linguagem como esse são freqüentes em Matemática. Mais adiante, entenderemos **cone** como uma figura sólida cujo volume devemos calcular. Entretanto, no presente contexto, ao falarmos de cone, estamos, na verdade, nos referindo à superfície cônica de revolução, tal como foi definida.

Verificaremos, a seguir, quais figuras obtemos ao interseccionar uma superfície cônica de revolução S com um plano α arbitrário.

Se o plano α contém o vértice V de S, temos que $S \cap \alpha$ é um ponto, uma única reta ou um par de retas concorrentes.

Estamos interessados, principalmente, no caso em que α não contém V. Embora esse problema tenha sido estudado por Apolônio de Perga, um dos mais importantes matemáticos da Antiguidade, nossa discussão seguirá uma linha moderna de argumentação, desenvolvida pelo matemático belga G. P. Dandelin, em 1822.

Suas idéias utilizam esferas que são inscritas na superfície cônica S – esferas centradas no eixo de revolução e tangentes a S – e também tangentes ao plano α.

Vamos tratar detalhadamente do caso em que o plano α determina uma elipse. O principal resultado a ser desenvolvido é o seguinte:

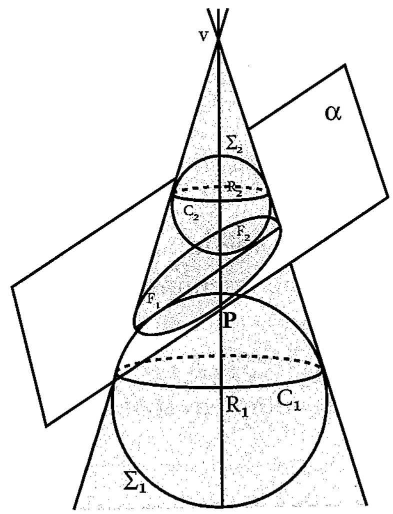
> Seja α um plano que intercepta apenas uma folha de uma superfície cônica de revolução S e que não é paralelo a nenhuma geratriz de S. Nessas condições, $S \cap \alpha$ é uma elipse.

No caso em que α é perpendicular ao eixo de revolução r de S em P, é fácil mostrar que $S \cap \alpha$ é uma circunferência de centro P.

Suponha agora que α não é perpendicular a r. Nesse caso, as esferas inscritas em S tangenciam o plano α em dois pontos **distintos**: F_1 e F_2.*

* A construção de tais esferas será descrita no Trabalho Monitorado posterior à Videoconferência 2.

Mostraremos que $S \cap \alpha$ é uma elipse de focos F_1 e F_2, isto é, que a soma das distâncias de um ponto arbitrário de $S \cap \alpha$ a F_1 e F_2 é constante.

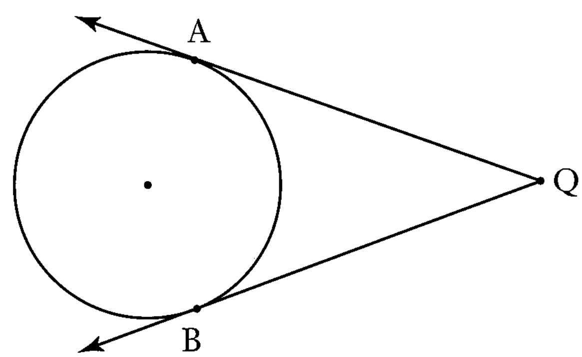


Seja P um ponto arbitrário de $S \cap \alpha$. A reta $\overleftrightarrow{PF_1}$ é tangente à esfera Σ_1 em F_1, enquanto $\overleftrightarrow{PF_2}$ é tangente à esfera Σ_2 em F_2 (conforme a figura acima), pois Σ_1 e Σ_2 são tangentes a α nesses pontos.

Consideremos as circunferências C_1 e C_2, onde Σ_1 e Σ_2, respectivamente, tangenciam S.

A geratriz $\overleftrightarrow{VP}$ encontra C_1 e C_2 nos pontos R_1 e R_2, e, como Σ_1 e Σ_2 são tangentes a S ao longo de C_1 e C_2, segue que $\overleftrightarrow{VP}$ é tangente a Σ_1 em R_1 e a Σ_2 em R_2.

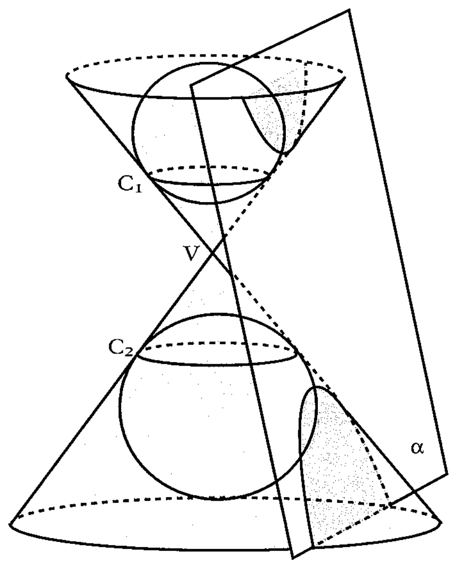
Como os segmentos de tangentes a uma circunferência, a partir de um ponto em seu exterior, são congruentes, vale que $PF_1 = PR_1$ e $PF_2 = PR_2$; portanto, $PF_1 + PF_2 = PR_1 + PR_2$.



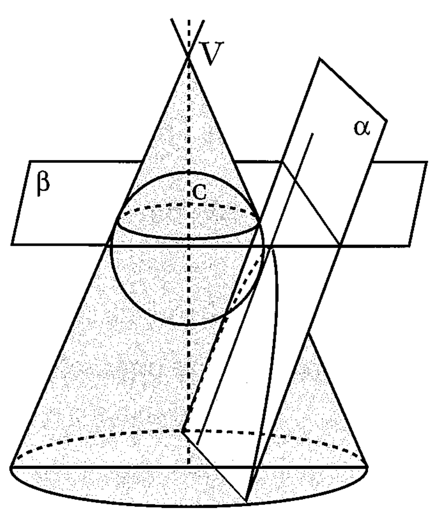
QA = QB

Mas $PR_1 + PR_2 = R_1R_2$, que é a distância entre as circunferências C_1 e C_2. Como essa distância não depende da escolha do ponto P, segue que $PF_1 + PF_2$ é o mesmo para todo $P \in S \cap \alpha$, ou seja, $S \cap \alpha$ é uma elipse de focos F_1 e F_2.

Com pequenas modificações, essa argumentação funciona também no caso em que o plano α corta as duas folhas de S. Utilizamos, aqui, uma esfera em cada folha de S, com as esferas tangentes a α em F_1 e F_2, respectivamente. O resultado obtido é que $S \cap \alpha$ é uma hipérbole de focos F_1 e F_2, ou seja, o módulo da diferença das distâncias de um ponto arbitrário de $S \cap \alpha$ a F_1 e F_2 é constante.



Finalmente, quando o plano α intercepta apenas uma folha de S e é paralelo a uma geratriz, utilizamos uma única esfera Σ tangente a α. A intersecção $S \cap \alpha$ é, nesse caso, uma parábola cujo foco é o ponto de tangência F entre α e Σ e sua diretriz é a reta d, em que α corta o plano β da circunferência C, ao longo da qual Σ intersecciona S. Temos que as distâncias de um ponto qualquer de $S \cap \alpha$ a F e à reta d são iguais.



Trabalho monitorado

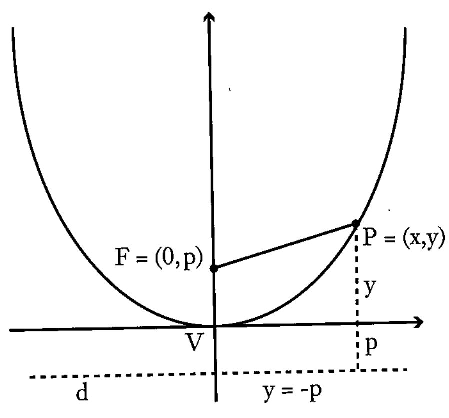
Equações das cônicas

Usaremos, agora, a Geometria Analítica para equacionar as cônicas anteriormente definidas. Iniciaremos com a **parábola**.

Introduzimos um sistema de coordenadas em que o foco é o ponto de coordenadas $F = (0, p)$, onde p é um número positivo e a diretriz d é a reta de equação $y = -p$.

Utilizando-se a fórmula da distância, temos que um ponto $P = (x, y)$ está na parábola (de foco F e diretriz d) se, e somente se, vale

(1) $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|$.



Elevando-se ao quadrado e simplificando, obtemos

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

ou

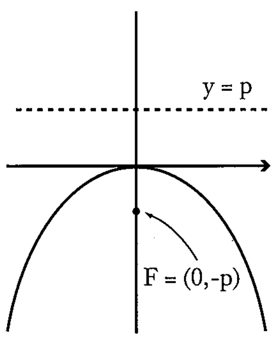
(2) $x^2 = 4py$.

Invertendo-se os passos, verificamos que (1) pode ser deduzido a partir de (2).

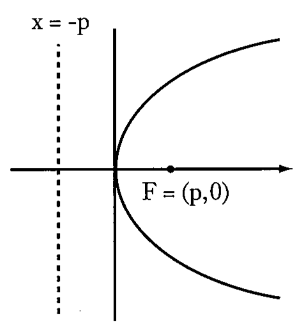
Logo, a parábola de foco $F = (0, p)$ e diretriz d dada por $y = -p$ pode ser descrita como o conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem (2), que é chamada de **equação reduzida da parábola.**

Obviamente, escolhendo-se outros sistemas de coordenadas, a equação da parábola muda. Eis alguns casos:

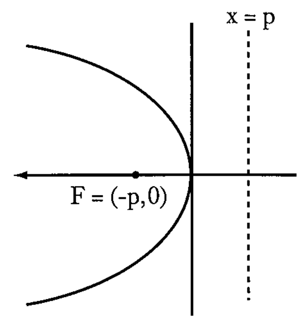
$x^2 = -4py$



$y^2 = 4px$



$y^2 = -4px$



As Atividades a seguir devem ser realizadas em grupos.

ATIVIDADE 1

Determine o foco, o vértice e a diretriz de cada uma das parábolas abaixo, fazendo um esboço do seu desenho:

a) $7y = 2x^2$ b) $y^2 = 16x$ c) $y^2 + 28x = 0$

ATIVIDADE 2

Conhecendo os dados abaixo, escreva a equação de cada parábola:

a) vértice: (0, 0); eixo: reta $x = 0$; ponto da parábola (5, 10).

b) foco: (3, 1); diretriz: $y + 3 = 0$.

ATIVIDADE 3

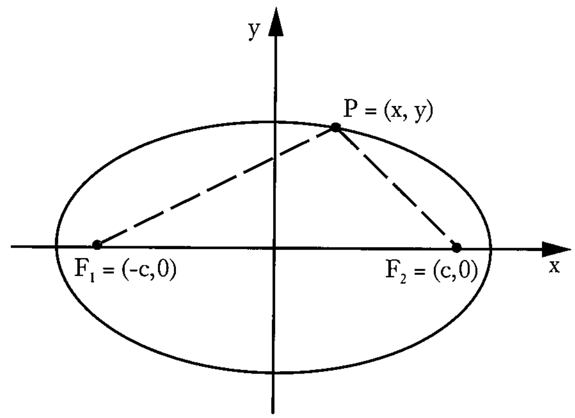
No Módulo 1, foi afirmado que o gráfico da função $y = a(x + m)^2 + k$ é uma parábola. Pretendemos, aqui, comprovar tal afirmação.

a) Determine a equação da parábola de foco $F = (p, q)$ e diretriz dada pela equação $y = d$.

b) Considere a função $y = f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$, igualando essa expressão com aquela obtida no item a. Determine os valores de p, q e d nesse caso.

c) Considere, agora, a função $y = f(x) = a(x + m)^2 + k$. Repetindo o procedimento anterior, relacione os valores a, m e k com os valores p, q e d.

Vejamos agora a equação da **elipse**, tomando um sistema de coordenadas de modo que os focos são dados por $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, onde $c > 0$. Pela definição 2, temos $PF_1 + PF_2 = 2a$ com $c < a$.



Usando a fórmula da distância, temos que um ponto $P = (x, y)$ está na elipse (de focos F_1 e F_2) se, e somente se, vale

$$(3) \qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Isolando um dos radicais, elevando ambos os membros ao quadrado e efetuando as simplificações possíveis, obtemos

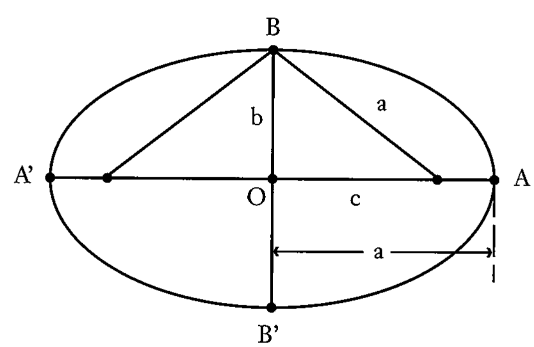
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, chegamos ao resultado

$$\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2$$

ou, ainda,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$



Sendo $b^2 = a^2 - c^2$ (veja interpretação geométrica na figura anterior), obtemos, finalmente,

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Invertendo-se os passos, podemos mostrar que (4) implica (3).

A relação (4), que caracteriza os pontos (x, y) pertencentes à elipse de focos F_1 e F_2, é chamada de **equação reduzida da elipse**.

O segmento AA', que contém os focos, é chamado de **eixo maior**, e o segmento BB', de **eixo menor** da elipse. Eles estão contidos nos eixos de simetria da elipse, e seus comprimentos são, respectivamente, 2a e 2b. O ponto de intersecção desses eixos chama-se **centro** da elipse. Os números a e b, que aparecem em (4), são os comprimentos do **semi-eixo maior** e do **semi-eixo menor**.

ATIVIDADE 4

Baseando-se nos dados a seguir, encontre a equação de cada elipse:

a) focos em (2, 0) e (–2, 0) e eixo maior de comprimento 10;

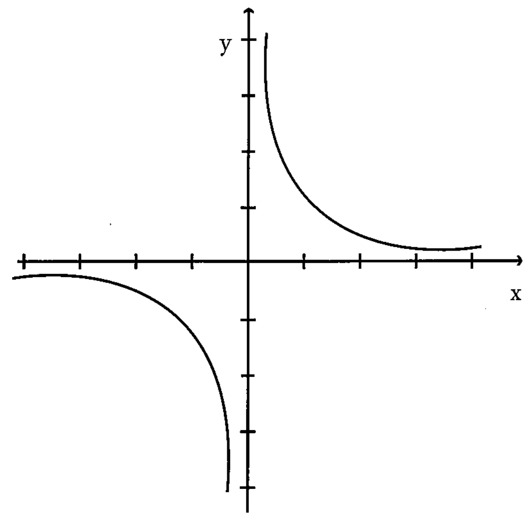
b) centro na origem, passando por (6, 0); um extremo do eixo maior tem coordenadas (0, 8).

ATIVIDADE 5

Uma elipse é tal que a soma das distâncias de um ponto seu qualquer aos focos (1, –3) e (1, –1) é igual a 4. Encontre a equação da elipse. Observe que o centro está fora da origem do sistema de coordenadas.

Vejamos, em seguida, o caso da terceira cônica. No Módulo 1, afirmou-se que o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ é uma **hipérbole**. Para verificarmos tal afirmação, vamos procurar as coordenadas de dois pontos, F_1 e F_2 (focos), e o valor de uma constante, a > 0, de modo que P = (x, y) pertence ao gráfico de $y = \frac{1}{x}$ se, e somente se, $|PF_1 - PF_2| = 2a$.

A constante 2a é a distância entre os vértices da hipérbole. Por outro lado, os vértices do gráfico de $y = \frac{1}{x}$ são os pontos (–1, –1) e (1, 1), o que nos leva a considerar $2a = 2\sqrt{2}$.



Como os focos pertencem à reta que passa pelos vértices e são simétricos em relação ao ponto médio do segmento determinado por esses vértices, temos que $F_1 = (-c, -c)$, $F_2 = (c, c)$, onde $c > 1$.

Para acharmos o valor de c, consideramos um ponto (x, y) do gráfico de $y = \frac{1}{x}$, com $x > 0$.

Substituindo $PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y+c)^2}$, $PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-c)^2}$ em $PF_1 - PF_2 = 2\sqrt{2}$, obtemos, após os devidos cálculos, $c^2\left[(x+y)^2 - 4\right] = 2\left(x^2 + y^2 - 2\right)$. Como $y = \frac{1}{x}$, concluímos que $c = \sqrt{2}$. O mesmo resultado seria obtido se $x < 0$, considerando-se, nesse caso, $PF_2 - PF_1 = 2\sqrt{2}$.

Assim, temos provado que, se um ponto P = (x, y) está no gráfico de $y = \frac{1}{x}$, então, $|PF_1 - PF_2| = 2\sqrt{2}$, onde $F_1 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e $F_2 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Reciprocamente, se P = (x, y) é tal que $|PF_1 - PF_2| = 2\sqrt{2}$, então

$$|PF_1 - PF_2|^2 = \left|\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2}\right|^2 =$$

$$\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2 + \left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2}\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2} = 8.$$

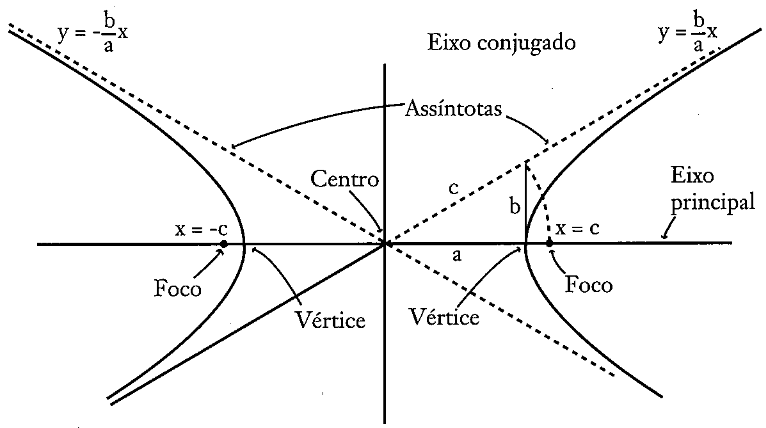
Efetuando os cálculos necessários, obtemos:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 16 - 16xy}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, concluímos que xy = 1, ou seja, (x, y) está no gráfico de $y = \frac{1}{x}$.

ATIVIDADE 6

Seguindo passos análogos aos empregados na dedução da equação reduzida da elipse, obtenha a **equação reduzida da hipérbole**, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Considere os focos dados por $F_1=(-c,0)$, $F_2=(c,0), c>0$, e utilize a definição 3, $|PF_1-PF_2|=2a$. O número b é definido por $b^2=c^2-a^2$, e sua interpretação está na figura a seguir.



ATIVIDADE 7

Encontre a equação da hipérbole com centro na origem, sabendo-se que:

a) seus vértices são (4, 0) e (–4, 0) e seus focos, (5, 0) e (–5, 0);

b) passa por (2, 4) e tem vértices em (0, 3) e (0, –3);

c) seus focos são (4, 0) e (–4, 0) e um de seus pontos é (5, 3).

Atividades complementares

ATIVIDADE 1

Considerando os dados abaixo, escreva a equação de cada parábola:

a) vértice: (0, 0); dois pontos da parábola: (6, 18) e (6, –18);

b) foco (–4, –2); diretriz: 2x + y = 0;

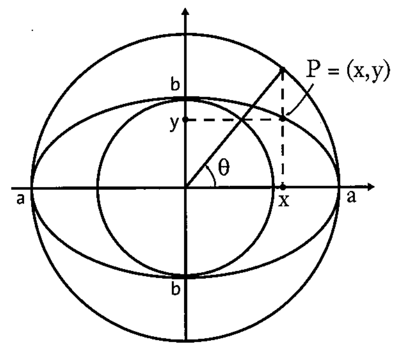
c) vértice: (1, 4); foco: (3, 2).

ATIVIDADE 2

Dada a elipse de equação $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$, determine seus focos, semi-eixos, vértices e centro.

ATIVIDADE 3

Considere duas circunferências centradas na origem com raios a e b, onde a > b. A partir da origem, trace uma semi-reta que intercepte a circunferência menor em Q e a maior em R. Se a reta horizontal pelo ponto Q e a reta vertical por R interceptam-se num ponto P = (x, y), mostre que P está na elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



ATIVIDADE 4

Encontre os pontos de intersecção da elipse $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ com a hipérbole $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{10}=1$. Mostre que essas duas cônicas são confocais, isto é, têm os mesmos focos.

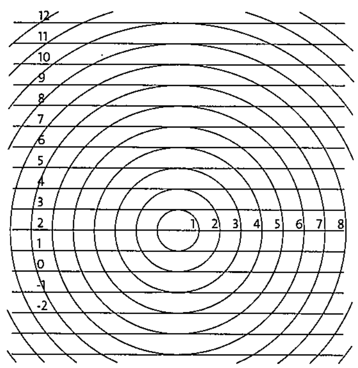
Trabalhando em sala de aula

Determinando pontos das cônicas em malhas circuladas

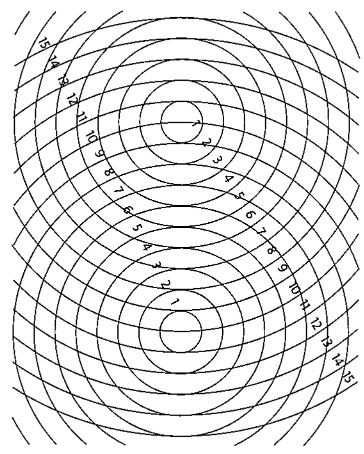
Um método especialmente simples para desenhar cônicas utilizando suas propriedades como lugar geométrico é fazer o seu esboço em malhas circuladas. Esta atividade pode ser realizada em sala de aula.

Tomam-se três folhas de papel sulfite nas quais estão desenhadas várias retas paralelas igualmente espaçadas (Folha 1) e circunferências concêntricas com raios aumentando de 1 cm em 1 cm (Folhas 1, 2 e 3).

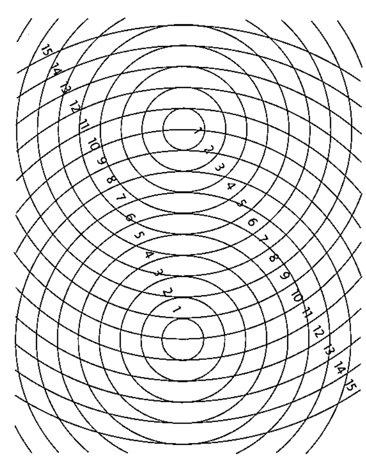
Folha 1



Folha 2



Folha 3



1. Com base nas definições dadas e justificando suas conclusões, determine:

a) pontos nas intersecções das circunferências e retas da Folha 1, pertencentes à parábola de foco F e diretriz d. Unindo esses pontos, você obterá um bom esboço de parábola;

b) pontos nas intersecções das circunferências da Folha 2, localizados sobre a elipse de focos F_1 e F_2 e com distância entre os vértices $2a = 12$ cm. Esboce a elipse. Que outras elipses com os mesmos focos, mas diferentes distâncias entre os vértices, é possível esboçar na Folha 2?

2. Como você pode esboçar uma hipérbole na Folha 3 com focos em F_1 e F_2 e distância entre os vértices $2a = 4$? Que outras hipérboles podem ser esboçadas na mesma folha?

Determinando cônicas no computador por meio de suas envoltórias

Se você tiver acesso a um programa que trace circunferências, segmentos e mediatrizes – como o Cabri, o CAR ou o GSP –, construa, com seus alunos, o esboço das envoltórias de tangentes de uma elipse e de uma hipérbole, a partir das circunferências indicadas nas dobraduras da Atividade 2 do Material de Apoio da Videoconferência 1 (veja a página 16). Observe que cada "linha de dobra" é a mediatriz do segmento que une o ponto F a um ponto P sobre a circunferência, em cada uma das duas situações (com F dentro ou fora do círculo). A seguir, verifique que a curva é o lugar geométrico dos pontos que estão simultaneamente na mediatriz e no segmento OP. Identifique suas propriedades características, justificando-as de modo análogo ao que fez na Atividade 1.

Apresentamos, até aqui, algumas atividades de reconhecimento de cônicas. Vimos, no vídeo, que também é possível desenhá-las utilizando cordões, tachinhas e com o auxílio de réguas e esquadro, por meio de procedimentos que deixam bem claras as propriedades de suas definições. É importante que você elabore um projeto para a construção de um material concreto, que possa ser utilizado pelos alunos, em sala de aula, de forma prática e eficaz.

Videoconferência 2

Áreas, semelhanças, volumes e o método da exaustão

Com esta Videoconferência, esperamos contribuir para a compreensão de importantes idéias geométricas – como áreas, semelhanças e volumes –, de uma forma inter-relacionada e tendo como pano de fundo a contextualização em problemas históricos que resultaram no desenvolvimento de conceitos e métodos fundamentais para a Matemática, buscando uma compreensão do desenvolvimento das idéias matemáticas em um contexto de resolução de problemas.

Nas atividades sugeridas, procuraremos relacionar esses conceitos com outros vistos anteriormente e sugerir situações de sala de aula para uma abordagem mais significativa da Geometria.

Serão abordados os seguintes tópicos:

- Método da exaustão, usado para a obtenção da área do círculo e do volume de cubos e blocos retangulares
- Método de Sócrates, utilizado para abordar o problema da duplicação do quadrado
- Raciocínio de Arquimedes, usado para obter a área do círculo
- Construção conceitual da medida do volume de cubos e blocos retangulares com arestas racionais ou irracionais

Áreas, semelhanças, volumes e o método da exaustão

Antonio Carlos Brolezzi
Iole de Freitas Druck

Heródoto, um dos primeiros historiadores da humanidade, afirmava que os gregos teriam trazido a Geometria do Egito.

É bem conhecida a história de que as cheias do Rio Nilo desfaziam as divisões entre as terras, que, para serem refeitas, precisavam de cálculos e medidas de áreas. Daí a palavra *geometria* – "medida da terra". Entretanto, Aristóteles, grande filósofo da Grécia Antiga, dizia que a Geometria teria nascido no Egito, não em razão de suas aplicações práticas, mas pelo fato de os sacerdotes terem tempo livre o suficiente para se dedicar à apreciação das formas da natureza e ao estudo lúdico dessas formas.

Na Grécia Antiga, a Geometria assumiu outro papel: o de ser a primeira área do conhecimento a ser formalizada logicamente. Tales e Pitágoras inauguraram esse modo de tratar a Geometria, visando ao reconhecimento de padrões e propriedades que pudessem ser demonstrados.

Conta-se que Tales de Mileto teria sido o primeiro a propor métodos indiretos para medir distâncias inacessíveis, como a distância de um navio no mar, a largura de um rio e a altura de montanhas. Tais métodos seriam baseados na idéia de semelhança.

Tales, em viagem ao Egito, teria surpreendido todos ao determinar a altura de uma pirâmide baseando-se apenas na sombra de um bastão. Aparentemente, ele teria aguardado até que a sombra e o comprimento se igualassem para, então, dizer que a altura da pirâmide seria, naquele momento, igual ao comprimento de sua sombra.

Antonio Carlos Brolezzi é professor do Departamento de Matemática do IME-USP. É Mestre e Doutor em Educação pela Faculdade de Educação da USP. Com vasta experiência no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, trabalhou por vários anos com a formação de professores. Interessa-se pela pesquisa na área de História da Matemática e seu uso em sala de aula, bem como pelo uso da tecnologia na educação matemática.


Gravura representando Tales de Mileto (cerca de 624-547 a.C.).

Platão (427-347 a.C.) e Aristóteles (384-322 a.C). Detalhe de *A escola de Atenas*, de Rafael.

De acordo com outros relatos, Tales de Mileto estabeleceu uma proporção entre dois triângulos retângulos semelhantes: um deles teria catetos com as mesmas medidas dos comprimentos do bastão e de sua sombra; o outro, com as medidas da altura e da sombra da pirâmide.

Problema de Sócrates

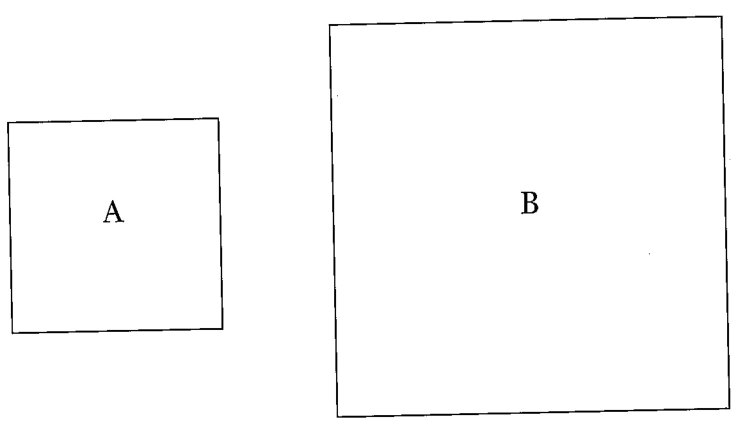
A Geometria passou a ser, na Grécia, o modelo do raciocínio dedutivo. Tanto é que na famosa Academia de Platão, berço da filosofia e do pensamento científico, havia uma placa que alertava o recém-chegado: "Quem não souber Geometria, não entre aqui".

Sócrates (469-399 a.C.). Detalhe de *A morte de Sócrates*, de Jacques-Louis David.

De fato, Sócrates utiliza exemplos da Geometria para ilustrar seu método de discussão filosófica, denominado **maiêutica**, cujo objetivo é fazer nascer uma idéia na mente do próprio interlocutor, por meio de perguntas e respostas. Sócrates, em um dos diálogos transcritos por Platão, discute com Meno o que seria "área": "Medida de superfície? Mas o que é superfície?" "Aquilo onde os sólidos terminam", dizia Meno. Sócrates relembrava que os pitagóricos denominavam **superfície** "a pele das figuras".

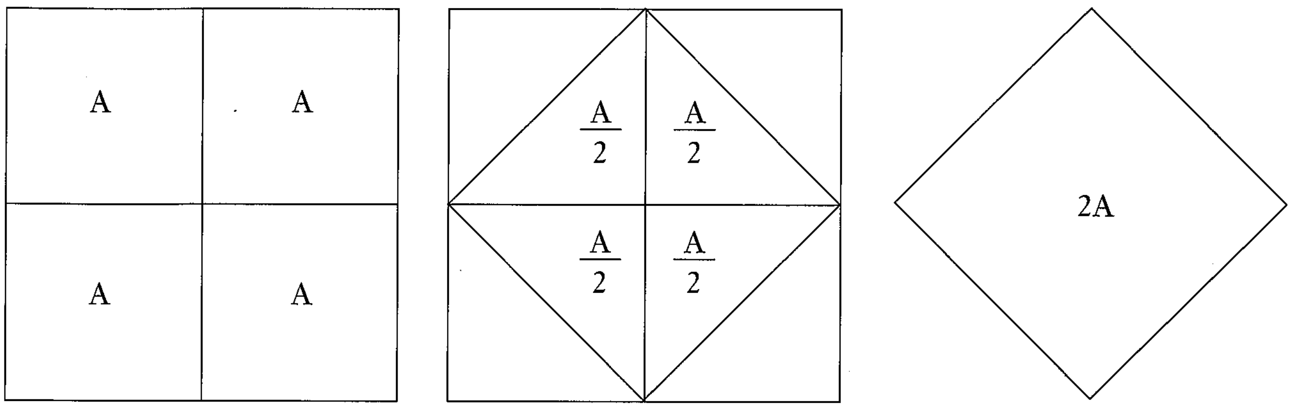
Nessa tentativa de definir as coisas, foram surgindo os conceitos. Os gregos se interessavam por definir os termos por meio de suas propriedades. Vejamos como Sócrates procura definir a área de uma figura decompondo-a em unidades de medida-padrão.

É célebre seu problema sobre como obter o lado de um quadrado que tenha o dobro da área de um quadrado dado. Sócrates o propunha em banquetes nos quais filósofos discutiam sobre tudo e dizia que ele podia ser resolvido mesmo por quem nunca tivesse estudado Geometria. Para provar isso, chamava um servo que atendia à mesa.



B = 2A?

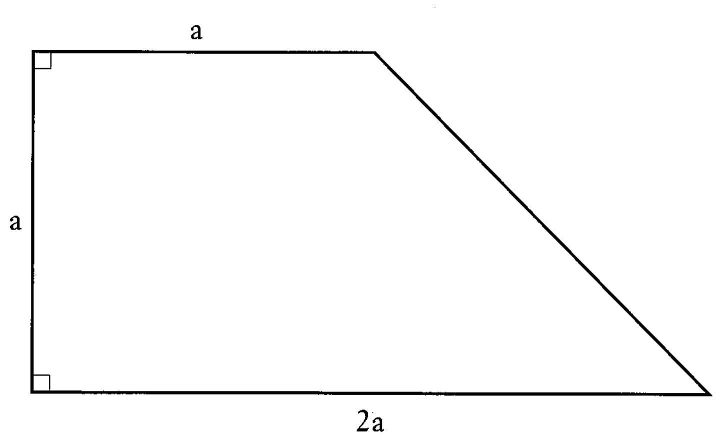
A primeira opinião do servo era que o novo quadrado deveria ter o lado medindo o dobro do lado do quadrado dado. Sócrates, então, fazia o servo verificar, através de desenhos, que tinha obtido um quadrado com quatro vezes – e não duas – a área do quadrado dado. O passo seguinte seria fazê-lo indicar como tomar a metade desse novo quadrado. O servo concluía que bastava tomar metades de cada um dos quatro quadrados que compunham o quadrado maior.



Com esse método de abordagem da Geometria, Sócrates introduziu uma técnica muito útil pedagogicamente: o tratamento de áreas e volumes com a idéia de composição e decomposição de figuras e sólidos.

ATIVIDADE 1: DIVIDINDO UM TRAPÉZIO

Divida a figura abaixo em quatro partes de mesma forma e tamanho.



Ao resolver este problema, o aluno pode descobrir que a razão de semelhança entre as áreas das figuras é igual à razão entre os quadrados de seus lados.

Uma vez que obtenha a divisão em três partes iguais – uma primeira tentativa bastante natural –, o aluno pode verificar que, necessitando dividir em quatro partes, pode subdividir cada parte em quatro, obtendo uma reprodução em escala da figura original. Esta é a figura desejada.

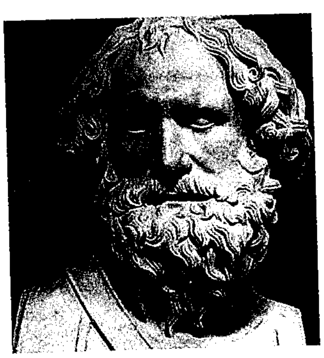
Outra idéia importante, referente ao problema de Sócrates, é que a relação de semelhança entre figuras implica uma determinada relação entre áreas. No problema proposto por ele, fica claro que, dobrando os lados do quadrado, obteremos um outro quadrado, com quatro vezes a área do quadrado original. Esse fato, na verdade, se generaliza. Temos sempre que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança entre elas.

Euclides de Alexandria (aprox. 325-265 a.C.). Detalhe de *A escola de Atenas*, de Rafael.

O método da exaustão

O estudo de áreas e volumes receberá uma importante contribuição de Eudoxo (408-355 a.C.), criador do **método da exaustão**, que consiste em obter uma área por sua aproximação através de uma seqüência de polígonos. Esse método será utilizado por Arquimedes para obter e provar o cálculo de áreas de figuras e volumes de sólidos diversos.

Euclides registrou o tratamento de áreas e volumes e o método da exaustão em sua obra *Os Elementos*, o livro com maior número de edições depois da Bíblia. Euclides foi o grande organizador da Matemática, e sobre seus trabalhos se desenvolveu grande parte da Matemática hoje conhecida.

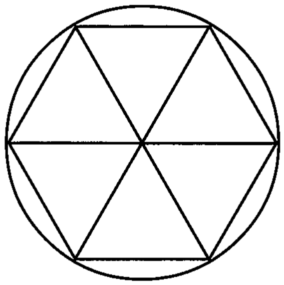


Busto de Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.).

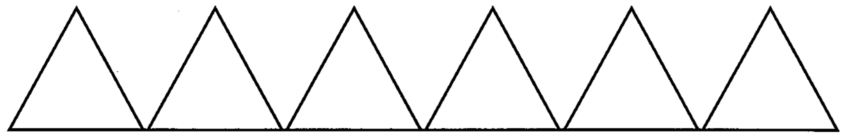
Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), que estudou com os discípulos de Euclides em Alexandria, criou tanta matemática, que se pode atribuir a ele o título de precursor do cálculo integral. Ele se antecipou, em quase dois mil anos, aos trabalhos de Newton e Leibniz.

Do ponto de vista didático, o método de raciocínio de Arquimedes sobre áreas é muito interessante, constituindo-se em uma primeira **heurística** explícita. Ele obtém a área de um círculo considerando dois polígonos regulares de n lados: um inscrito e um outro circunscrito ao círculo. Vejamos uma ilustração utilizando um hexágono.

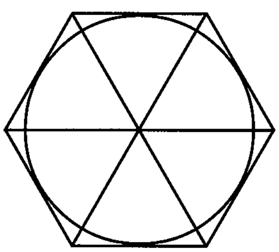
Heurística: arte de inventar, de fazer descobertas; ciência que tem por objeto a descoberta do fato.



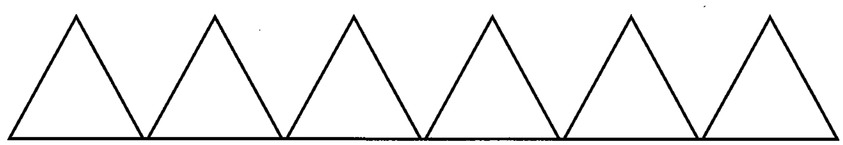
n = 6



O perímetro do hexágono inscrito é um pouco menor que o comprimento C da circunferência. A altura dos triângulos que compõem o hexágono é também um pouco menor que o raio r do círculo. Considerando-se um polígono com um número maior de lados, podemos imaginar que a medida do perímetro ficará mais próxima do comprimento da circunferência e que a altura dos triângulos em que o polígono se decomporá ficará mais próxima à do raio do círculo. Como a área de cada triângulo é a metade da altura vezes a base (um dos lados do polígono), a área do polígono ficará sempre mais próxima de rC/2, à medida que aumentar o número de lados do polígono. Arquimedes considerou que a limitação inferior à área do círculo fazia com que essa área nunca fosse inferior a rC/2. De forma similar, ele propunha considerar um polígono regular circunscrevendo o círculo para n = 6, como na ilustração abaixo. Aumentando o valor de n, a área do polígono circunscrito tende a rC/2. Dada essa limitação superior, a área do círculo não pode ser maior que rC/2.

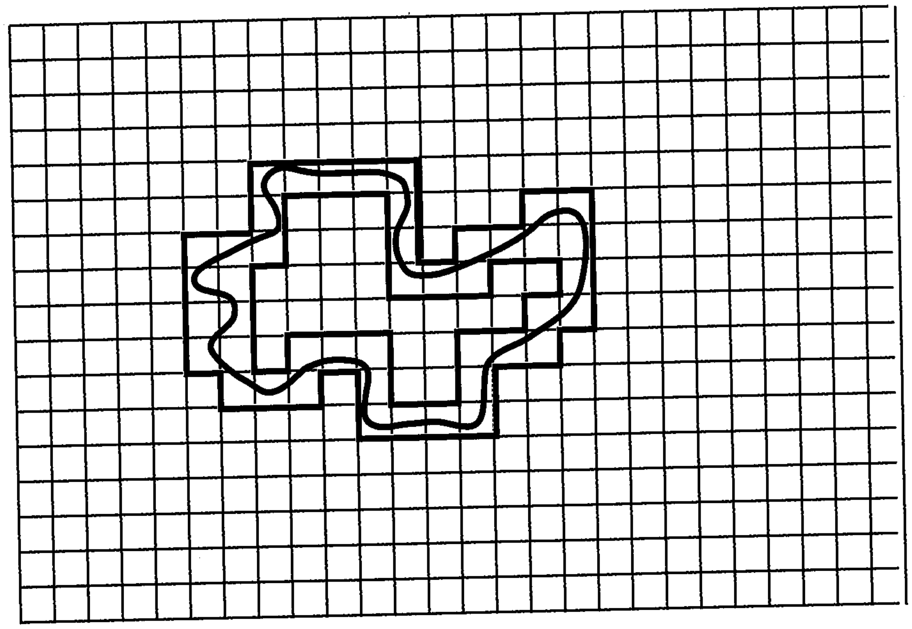


n = 6



Arquimedes conclui seu raciocínio afirmando que, se a área do círculo não pode ser menor que rC/2 nem maior que rC/2, então, ela deve ser igual a rC/2.

O trabalho com composição e decomposição de figuras, inspirado na Geometria grega, também pode ser muito útil em nossas aulas de Matemática. É possível trabalhá-las desde as séries iniciais, ainda que sem lidar, necessariamente, com o conceito de área ou com a representação algébrica de grandezas. O cálculo aproximado da área de uma figura qualquer, por excesso ou falta, a partir de uma malha quadriculada, é um bom exemplo de uso de uma heurística com fundamento na História da Matemática.

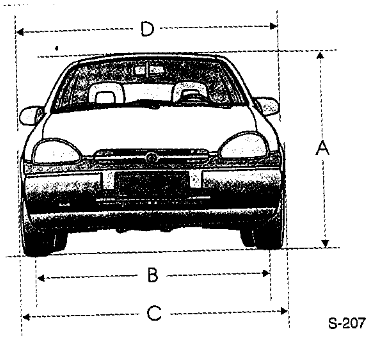


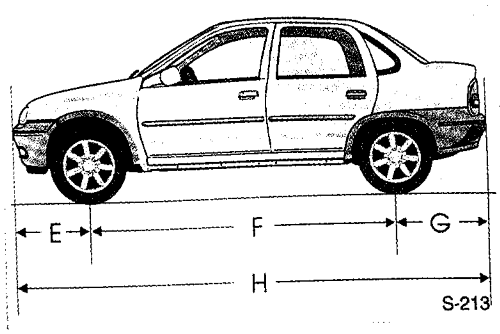
Podemos encontrar idéias semelhantes ao compor e decompor outras figuras, visando ao reconhecimento de propriedades já conhecidas de triângulos, paralelogramos, trapézios etc.

É interessante, mesmo no Ensino Médio, não se deter apenas nas fórmulas das áreas de figuras conhecidas, pois o aluno deve adquirir o hábito de enxergar as composições de figuras por trás do cálculo de áreas. Isso pode ser muito útil para o desenvolvimento de noções mais sofisticadas, como a noção de **integral**.

Volumes de sólidos

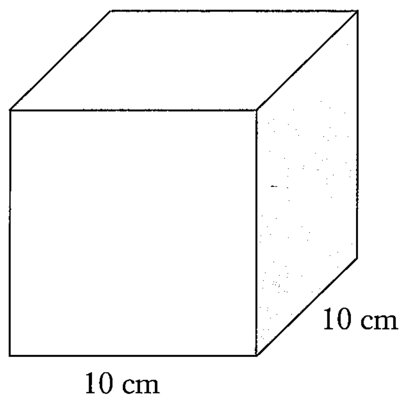
A idéia intuitiva de medir volume consiste em atribuir um valor numérico à "quantidade de espaço" ocupada por alguma coisa, em comparação com uma unidade de volume estabelecida. Muitas vezes, em vez de uma unidade de volume, utiliza-se uma unidade de capacidade. O volume do porta-malas de um carro, por exemplo, costuma ser dado em litros – um carro grande tem porta-malas com capacidade de 500 litros. Isso significa que seu volume corresponde a 500 cubos de aresta 10 cm, já que 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico.





Dimensões
Comprimento total – 4,753 m
Largura total (excluindo retrovisores) – 1,812 m
Distância entre os eixos – 2,754 m
Peso bruto total – 1.865 kg
Volume do porta-malas com encosto na posição normal – 500 litros

Cubo com capacidade de 1 litro

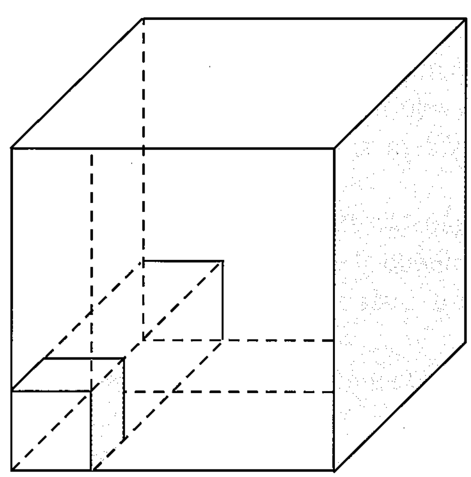


A idéia de decompor o volume em cubos é a base do cálculo desse volume.

Vamos, agora, obter o volume dos sólidos por meio de uma construção conceitual*. Tomemos como unidade de medida de volume um cubo com aresta medindo uma unidade de comprimento e volume igual a 1. Trata-se do **cubo unitário**.

Para obtermos a medida do volume de um cubo de aresta n unidades (n natural), podemos decompô-lo em n^3 cubos unitários. Assim, um cubo de aresta 5 terá 125 cubos unitários e seu volume será 125.

Mas o que ocorre se decompusermos o próprio cubo unitário? Se dividirmos cada aresta de um cubo unitário em q partes inteiras, teremos q^3 cubinhos. Portanto, um cubo de aresta $1/q$ tem volume $1/q^3$.



* Conforme LIMA, Elon Lajes. **Medida e forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. 98 p.

Se tivermos um cubo de aresta p/q, com p e q inteiros, poderemos decompor cada aresta em p partes de comprimento 1/q. Ou seja, o cubo será decomposto em p^3 cubos de aresta 1/q. Seu volume, então, será $p^3 \times 1/q^3 = (p/q)^3$.

Já comprovamos que, dado um cubo de aresta a – um número racional –, o volume será igual a a^3. Mas o raciocínio feito não se aplica para provar que um cubo de aresta irracional b tem volume b^3.

Nesse caso, podemos utilizar o método da exaustão, que propõe o seguinte esquema: dado um cubo C de aresta b irracional, provamos primeiro que, se x for um número menor que b^3, $x < \text{vol}(C)$, e depois que, se y for um número maior que b^3, então, $y > \text{vol}(C)$. Conclui-se, pois, que b^3 deve ser igual a vol (C).

A idéia das provas acima é a seguinte: se x for um número tal que $x < b^3$, poderemos aproximar o número irracional b por um valor racional $r < b$, tão próximo de b que teremos $\sqrt[3]{x} < r < b$ e, assim, $x < r^3 < b^3$. Existe um cubo D de aresta r contido estritamente em C. Como r é racional, vol (D) = r^3. Como D está contido e é diferente de C, vol (D) < vol (C). Portanto, $\text{vol}(D) = r^3 < \text{vol}(C)$. Assim, também $x < \text{vol}(C)$, pois $x < r^3$. De modo análogo, chegaremos ao resultado de que se $y > b^3$, então, $y > \text{vol}(C)$. Resta que $\text{vol}(C) = b^3$.

Atividade 2: volume do paralelepípedo

Para utilizar o resultado do volume do cubo no cálculo do volume de um paralelepípedo, também poderemos percorrer a linha de raciocínio adotada para o cubo. Tomemos, inicialmente, um paralelepípedo com arestas racionais, que podem ser expressas como a/q, b/q e c/q (reduzindo as medidas ao mesmo denominador, se for necessário). Teremos, então, abc cubos com 1/q de aresta e, portanto, um volume de $abc.1/q^3 = a/q.b/q.c/q$. A passagem para um paralelepípedo de arestas a, b, c, que podem ser irracionais, é semelhante ao que foi feito para o cubo*.

Assim, com o método da exaustão, também podemos dizer que basta multiplicar a área da base pela altura do paralelepípedo: V = Bc, em que B = ab e c é a altura do paralelepípedo, sejam quais forem os valores a, b, c de suas arestas.

As questões a seguir servem para organizar esse raciocínio.

a) Sejam n, m e r três números naturais. Por que se pode concluir que o volume do paralelepípedo reto-retângulo, cujas arestas medem exatamente n, m e r, tem valor nmr? Faça um esboço.

* Há, no entanto, um cuidado extra (qual?) a ser tomado para a construção do paralelepípedo de arestas racionais contido no bloco retangular inicial e cujo volume é maior do que um número $x<a.b.c$.

b) Elabore, agora, argumentos para comprovar que a mesma fórmula vale para o volume de um paralelepípedo reto-retângulo, cujas arestas valem p_1/q_1, p_2/q_2 e p_3/q_3, sendo p_i e q_i números naturais (esboce, como apoio, um sólido de arestas 2/3, 3/4 e 2/5).

c) Utilizando o método da exaustão, mostre que, mesmo que um paralelepípedo tenha arestas a, b e c irracionais, seu volume mede abc.

Observação: como a unidade de medida é o cubo de aresta unitária, todos os argumentos feitos valem somente para o bloco retangular (cujos ângulos são todos retos, como no cubo). O fato de o volume de um paralelepípedo genérico (possivelmente inclinado) em geral valer o produto da área de sua base pela altura depende de outros fatores e será explorado na Videoconferência 3.

Trabalho monitorado

Congruência e semelhança

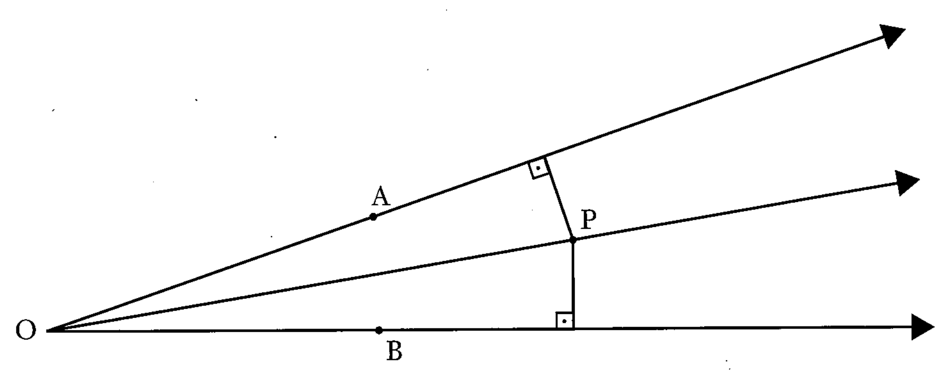
No trabalho com Geometria, algumas idéias fundamentais aparecem reiteradamente em contextos variados. Destacamos duas delas – congruência e semelhança – para serem desenvolvidas aqui, por sua marcada importância na justificativa de temas tratados ao longo deste Módulo.

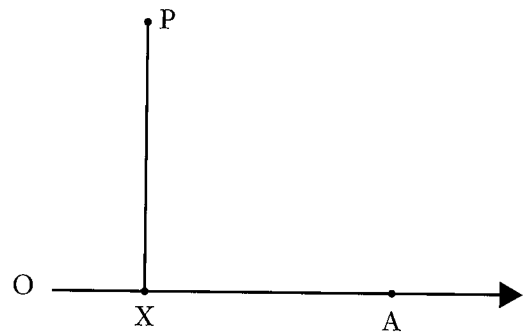
Congruências foram utilizadas, implícita ou explicitamente, na detecção das propriedades características das cônicas e em algumas situações da Videoconferência 2. Também abordaram-se as semelhanças, que serão utilizadas nas atividades seguintes e, ainda, na Videoconferência 3. É importante que nossos alunos entendam bem a relação entre a razão de semelhança entre duas figuras e a razão entre suas áreas e volumes.

A demonstração do Teorema de Dandelin utilizou, de forma implícita, os resultados a seguir, que garantem a construção das esferas inscritas na superfície cônica. As atividades permitem o detalhamento de tais procedimentos.

ATIVIDADE 1

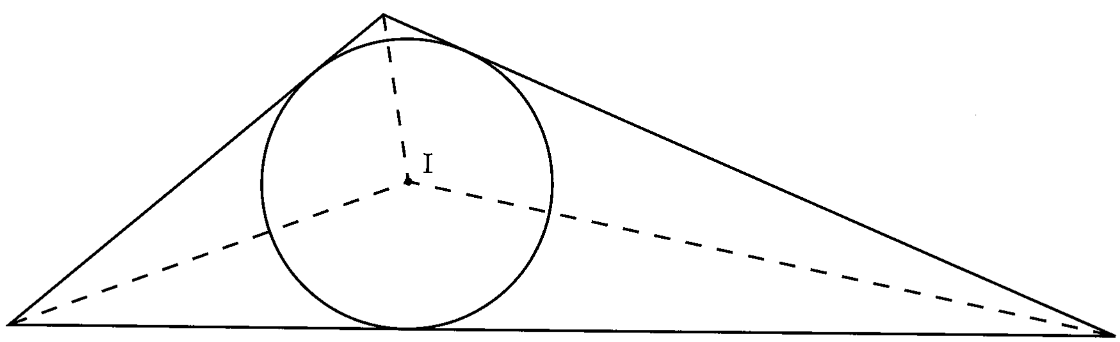
a) Seja P um ponto do interior de um ângulo $\angle AOB$. Mostre que P está na bissetriz do $\angle AOB$ se e somente se $\text{dist}\left(P, \overleftrightarrow{OA}\right) = \text{dist}\left(P, \overleftrightarrow{OB}\right)$.





Lembre que dist $\left(P, \overleftrightarrow{OA}\right) = PX$, onde X é o pé da perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OA}$, traçada a partir de P.

b) Mostre que as três bissetrizes de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto I e que existe uma circunferência centrada em I, tangente aos três lados do triângulo. Essa circunferência é dita **inscrita ao triângulo.**



c) Mostre como construir uma esfera inscrita numa superfície cônica de revolução S e tangente a um plano que corta apenas uma folha de S. Considere, num plano adequado, a circunferência do item b e a rotacione em torno do eixo do cone.

d) Verifique que a área de um triângulo arbitrário é igual a rp, em que p = (a + b + c)/2 é o semiperímetro do triângulo e r é o raio da circunferência inscrita.

Atividade 2

Suponha que $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$ sejam retas tangentes a uma circunferência nos pontos distintos A e B, respectivamente. Mostre que AP = BP. Além disso, mostre que a bissetriz do $\angle APB$ passa pelo centro da circunferência. Proponha e comprove um resultado correspondente para retas tangentes a uma esfera. Onde esse resultado foi utilizado nas construções do Teorema de Dandelin?

ATIVIDADE 3

Leia o texto e responda às questões a seguir.

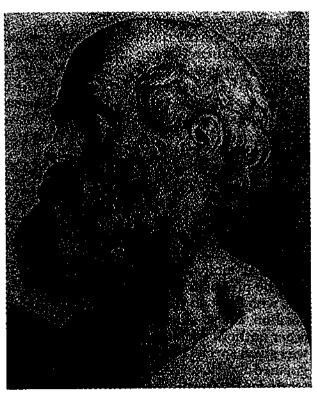
Cônicas e a duplicação do cubo

Os três clássicos problemas de construção com régua e compasso

Duplicação do cubo: construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado.

Trissecção de um ângulo: dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais.

Quadratura do círculo: construir um quadrado com área igual à de um dado círculo.



Hipócrates de Cós (aprox. 470-410 a.C.)

O interesse grego pelas secções cônicas provavelmente teve início na tentativa de resolver o problema clássico da duplicação do cubo, um dos três problemas insolúveis da Grécia Antiga (insolúveis, dentro da Geometria, com os instrumentos euclidianos, isto é, com régua sem marcas e compasso. Os outros dois são a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo).

Uma das histórias do problema da duplicação do cubo diz que, para se verem livres de uma peste, os habitantes de Delos teriam recebido orientação do Oráculo de Apolo para dobrar o tamanho do altar desse deus, que tinha o formato de um cubo. Tal problema teria sido levado à Academia de Platão, onde foram sugeridos vários procedimentos.

Por volta de 440 a.C., Hipócrates reduziu o problema à obtenção de duas médias proporcionais (digamos, x e y) entre dois segmentos de retas medindo a e 2a. Talvez ele tenha observado as seguintes relações entre as arestas de um cubo e do cubo duplicado: sendo **a** a aresta de um cubo original e **x** a do cubo duplicado a partir deste, temos $2a^3 = x^3$. Duplicando x^3 e chamando a nova aresta de y, obtemos $2x^3 = y^3$. Através de nova duplicação, chegamos a $2y^3 = 4x^3 = 8a^3 = (2a)^3$.

Ou seja, há uma proporcionalidade entre os segmentos a, x, y e 2a do tipo: a:x :: x:y :: y:2a. Em notação moderna, podemos escrever as proporções por meio das igualdades $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, que são equivalentes às duas equações de parábolas: $y^2 = 2ax$ e $x^2 = ay$.

Mais tarde, Menaecmus (aprox. 380-320 a.C.) descobriu que o problema poderia ser resolvido pelo estudo de um cone circular com um ângulo reto no vértice, e, provavelmente, foi o primeiro a identificar uma família de novas curvas, que mais tarde receberiam os nomes de **elipse**, **parábola** e **hipérbole**.

Seu raciocínio contava apenas com a Matemática da época; ele não foi auxiliado pela notação algébrica da Geometria Analítica, nem pôde utilizar esquemas traçados em um plano cartesiano. Menaecmus propunha que se poderiam encontrar as médias x e y de Hipócrates observando o encontro de duas parábolas no cone, o que, em notação moderna, significaria resolver o sistema de duas equações: $y^2 = 2ax$ e $x^2 = ay$. O ponto de encontro das parábolas indicaria os valores de x e y, tais que $a/x = x/y = y/2a$.

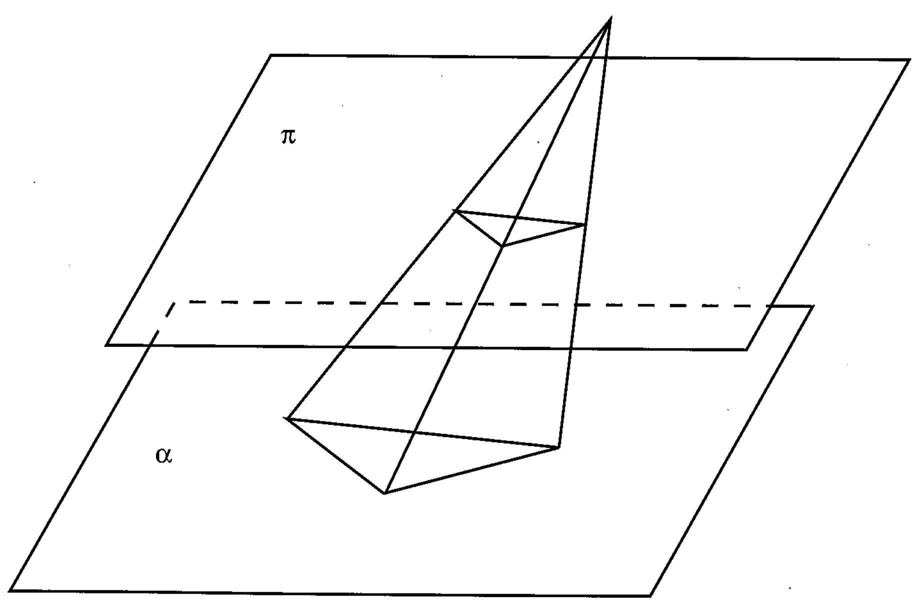
A. Mostre que, partindo das equações das parábolas acima, é possível provar que as coordenadas (x, y) da sua intersecção ($\neq (0,0)$) satisfazem $x^3 = 2a^3$ e $y^3 = 4a^3$.

B. Partindo do item A, conclua que $a/x = x/y = y/2a = 1/2^{1/3}$.

Observe que obtivemos algo que nos parece evidente: $x = 2^{1/3}a$; sabemos que essa igualdade é equivalente a $x^3 = 2a^3$. Embora os gregos não trabalhassem com Álgebra simbólica, nem com representações de números irracionais, mostraram que o problema da duplicação do cubo poderia ser resolvido por meio de construções geométricas, utilizando secções cônicas. Isso se daria de modo análogo à solução geométrica para a duplicação do quadrado, no caso do problema de Sócrates. A associação entre a idéia de proporcionalidade, mais presente no estudo das semelhanças, e outras idéias, como medidas de volumes e áreas, é bem típica da contribuição grega para o crescimento da Geometria.

ATIVIDADE 4

Considere uma pirâmide de base triangular cortada por um plano p paralelo ao plano a da sua base. Atribua valores (numéricos ou literais) aos comprimentos das arestas e à altura da pirâmide, bem como à distância entre os planos α e π, mostrando que o triângulo da base é semelhante àquele determinado pela intersecção de π com a pirâmide.

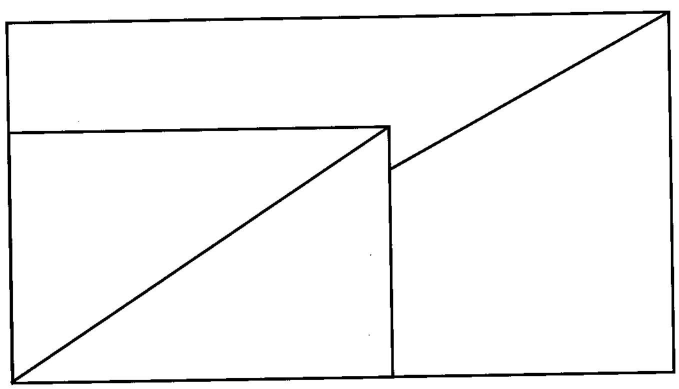


Trabalhando em sala de aula

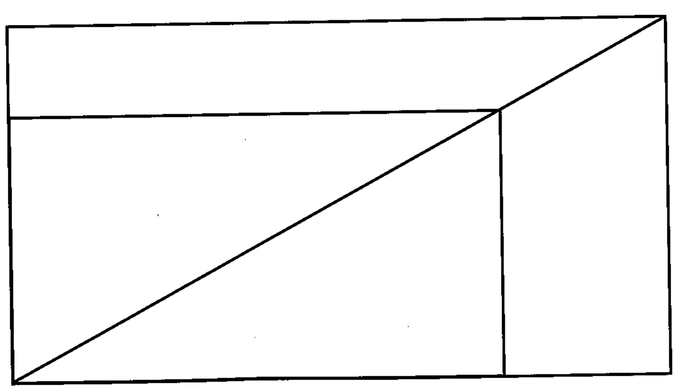
Atividades com semelhança

Algumas atividades práticas com semelhança podem ser realizadas em sala de aula, a fim de tornar mais concretas as propriedades geométricas das figuras. Uma delas é o **teste da projeção**, que consiste em comparar duas figuras quaisquer, a fim de verificar se elas são semelhantes: para isso, coloca-se uma delas (a menor) no retroprojetor e outra diretamente sobre a tela ou sobre a lousa em que se projeta a figura. Desse modo, pode-se verificar que a semelhança entre as figuras está relacionada ao fato de uma poder ser superposta à outra, com as devidas ampliações ou reduções. Outra atividade consiste em recortar diversos retângulos com diferentes proporções e dobrá-los na diagonal. A superposição desses retângulos permitirá a realização do **teste da diagonal**: de acordo com esse teste, os retângulos são semelhantes apenas quando suas diagonais estão na mesma direção. Observe as figuras:

Situação A: Pares de retângulos não-semelhantes



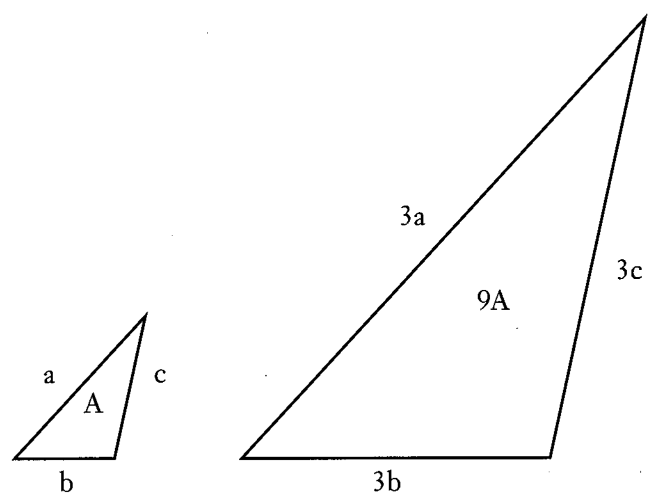
Situação B: Pares de retângulos semelhantes



Você conhece outras atividades que trabalham com a idéia de semelhança?

Divisão em figuras semelhantes

Desenvolvendo essa idéia, o professor pode fazer com que o aluno perceba que a razão de semelhança entre figuras pode ser um instrumento para o cálculo de áreas, desde que a figura seja dividida em figuras semelhantes. É importante que a razão entre as áreas seja igual ao quadrado da razão entre os elementos retilíneos da figura, ou seja, em uma ampliação de uma figura em razão 3, a área deverá ser multiplicada por 9. Verifique isso, dividindo o triângulo abaixo em 9 triângulos semelhantes ao triângulo original.



Videoconferência 3

Princípio de Cavalieri e cálculo de volumes

Nesta Videoconferência, procuraremos mostrar como a aplicação do Princípio de Cavalieri nos permite construir a medida do volume de diversos sólidos geométricos e sua importância para pesquisas em outras áreas do conhecimento, como a Medicina.

Nossa intenção é trabalhar, de maneira integrada, diversos assuntos da Geometria, de forma a permitir, nas atividades sugeridas, uma abordagem pedagógica que considere o desenvolvimento histórico das idéias, em face da resolução de problemas que podem auxiliar na construção significativa de conceitos e métodos geométricos, com referência a algumas de suas aplicações práticas.

Na Videoconferência, serão discutidos os seguintes tópicos:

- Princípio de Cavalieri
- Cálculo dos volumes de cilindros, cones, prismas, pirâmides e esferas
- Raciocínio de Arquimedes, relacionando volumes e áreas de círculos, esferas e cilindros

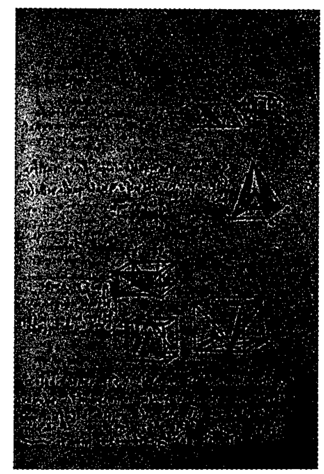
Material de apoio

Princípio de Cavalieri e cálculo de volumes

Antonio Carlos Brolezzi

Princípio de Cavalieri

O cálculo do volume dos sólidos geométricos interessou aos povos da Antiguidade tanto pela sua utilidade prática como pelos desafios que representava. A **Estereometria** – estudo do cálculo de volumes dos sólidos – aparece em obras egípcias de 3500 anos atrás. O estudo da Geometria dos Sólidos foi bastante incentivado por Platão (427-347 a.C.).



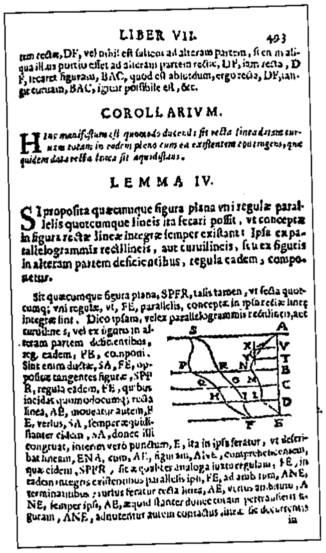
Página de um manuscrito sobre Estereometria de Leonardo da Vinci (1452-1519), escrito por volta de 1503, que se encontra na Biblioteca Nacional de Madri.

O estudo de problemas estereométricos chamou a atenção de Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), um padre jesuíta italiano que se interessou por Matemática e decidiu aprofundar-se no assunto, após um encontro com Galileu, de quem se tornou discípulo. Cavalieri estudou diversas áreas da Matemática, tendo um interesse pelas secções cônicas e pelos fundamentos que, mais tarde, gerariam o cálculo diferencial e o cálculo integral. Ficou famoso por estabelecer, em 1635, um método para tratar áreas e volumes.

A idéia que ficou conhecida como Princípio de Cavalieri diz que:

1. Se os segmentos determinados pela intersecção de qualquer reta perpendicular a uma direção fixa com duas figuras planas tiverem sempre o mesmo comprimento, então, as superfícies têm a mesma área.

2. Se as áreas das secções por qualquer plano perpendicular a uma direção fixa de dois sólidos forem iguais, então, os sólidos têm volumes iguais.



LIBER VII. 493

... rectæ, DF, vel nihil est [illegible] ad alteram partem, si enim aliqua illius portio esset ad alteram partem rectæ, DF, iam recta, DF, secaret figuram, BAC, quod est absurdum, ergo recta, DF, tangit curuam, BAC, igitur possibile est, &c.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est quomodo ducenda sit recta linea datam curuam tangens in eodem plano cum ea existentem ... quidem data recta linea sit æquidistans.

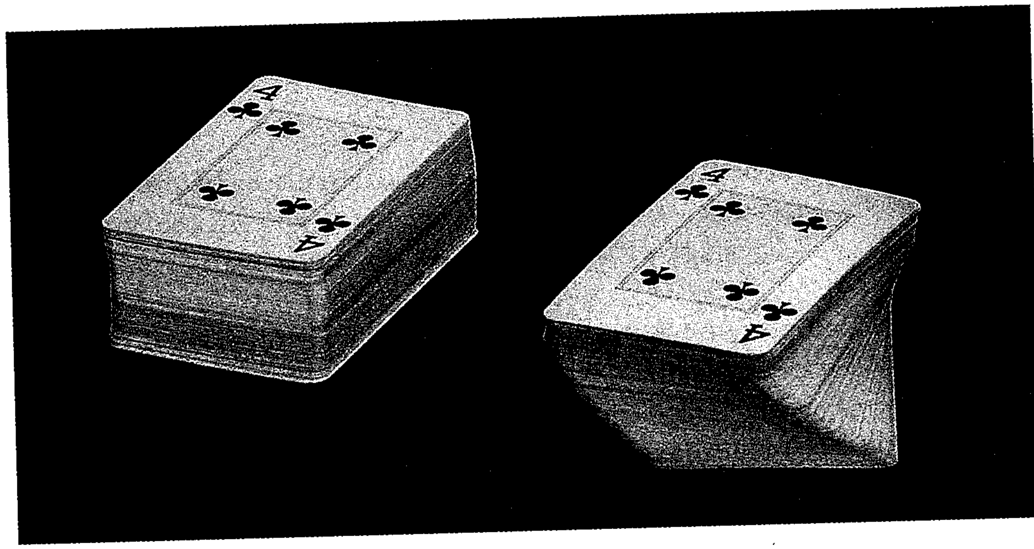
LEMMA IV.

Si proposita quæcumque figura plana vni regulæ parallelis quotcumque lineis ita secari possit, vt conceptæ in figura rectæ lineæ integræ semper existant: Ipsa ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, seu ex figuris in alteram partem deficientibus, regula eadem, componetur.

Sit quæcumque figura plana, SPFR, talis tamen, vt secta quotcumq; vni regulæ, vt, FE, parallelis, conceptæ in ipsa rectæ lineæ integræ sint. Dico ipsam, vel ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, vel ex figuris in alteram partem deficientibus, reg. eadem, FE, componi. Sint enim ductæ, SA, FE, oppositæ tangentes figuræ, SPFR, regula eadem, FE, quibus incidat quomodocumq; recta linea, AE, moueatur autem, FE, versus, SA, semper æquidistanter eidem, SA, donec illi congruat, interim verò punctum, E, ita in ipsa feratur, vt describat lineam, ENA, cum, AE, figuram, ANE, [illegible]

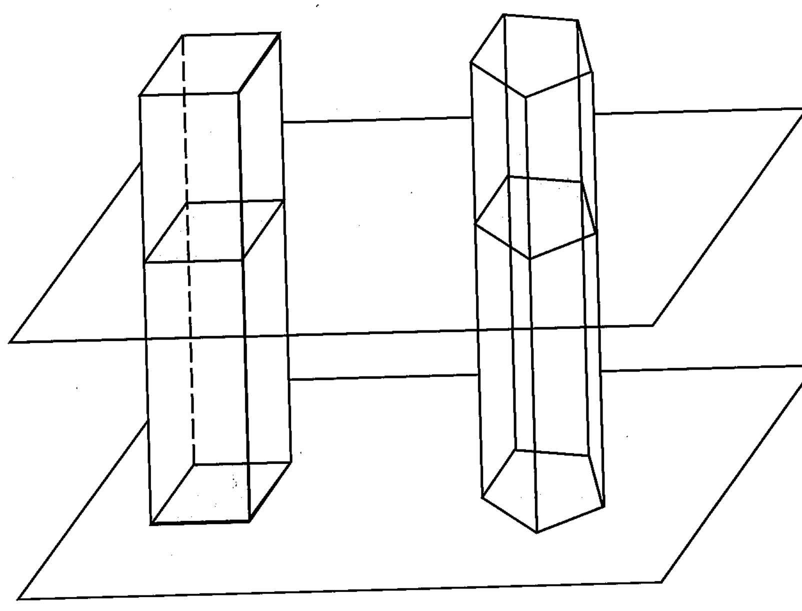
Página da obra de Cavalieri, *Geometria indivisibilis continuorum nova* (1635), mostrando uma ilustração do princípio aplicado às áreas de figuras.

Vamos nos ocupar, aqui, da parte do princípio que se refere aos volumes. O Princípio de Cavalieri aplicado aos volumes é bastante fácil de entender, quando pensamos, por exemplo, no que acontece com pilhas de cartas de baralho. Estando ou não o maço totalmente em pé, ainda assim vemos que, mesmo girando a pilha e obtendo outro formato de maço, a quantidade de cartas não se altera. O Princípio de Cavalieri é mais geral: basta as áreas serem iguais, mesmo que as formas sejam diferentes (o que não acontece com nosso exemplo das cartas de baralho).



ANDRÉ SARMENTO

Assim, para calcular o volume de um sólido, basta verificar se qualquer plano paralelo à sua base, ao cortá-lo, gera uma figura plana com área igual à de outra, obtida pelo mesmo procedimento de outro sólido, cujo volume seja conhecido.



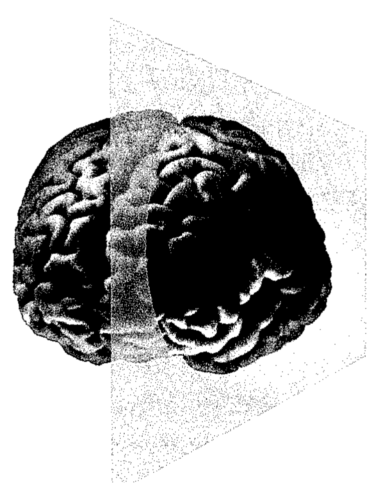
Tomemos um sólido conhecido, como é o caso do nosso bloco retangular – o paralelepípedo reto-retângulo –, cujo volume é calculado como o produto dos comprimentos de três arestas com origem no mesmo vértice. Poliedros com duas faces congruentes e paralelas e faces laterais que sejam paralelogramos são chamados de **prismas**. O paralelepípedo, por exemplo, é um tipo particular de prisma. Mas, e se tivermos prismas cujas faces laterais não sejam retangulares, como poderemos calcular seu volume?

Suponhamos que a base do prisma tenha a mesma área da base do paralelepípedo. Tomando um plano paralelo ao plano da base dos dois sólidos, suas intersecções com dois sólidos serão figuras geométricas congruentes com suas bases, portanto, terão a mesma área. Assim, pelo Princípio de Cavalieri, o volume do prisma é o mesmo do paralelepípedo, que tem a mesma área da base e a mesma altura.

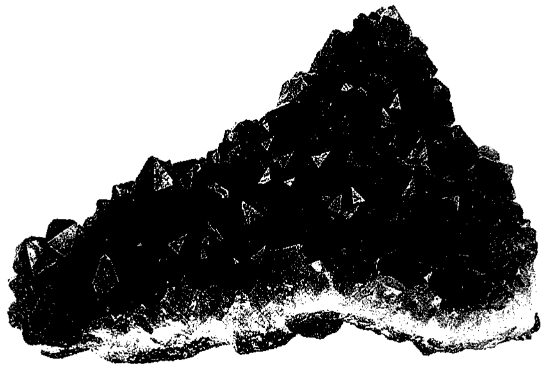
O Princípio de Cavalieri é uma ferramenta matemática importante para a Ciência moderna. A Estereologia, método estatístico para determinar propriedades morfológicas de estruturas tridimensionais, a partir de imagens bidimensionais ou de secções finas de sólidos, é usada nas pesquisas biomédicas, com base no Princípio de Cavalieri e com a utilização de recursos computacionais.

Essa metodologia serve para estudar a morfologia de órgãos, tecidos e estruturas. Segundo o dr. Carlos Alberto Mandarim-de-Lacerda*, professor titular e chefe do Laboratório de Morfometria e Morfologia Cardiovascular do Centro Biomédico da Universidade do Estado do Rio de Janeiro:

> "A Estereologia determina informação quantitativa, sendo particularmente útil em estudos sobre crescimento (tumores, neovascularização) e para determinar relacionamentos anátomo-funcionais normais ou patológicos (modificações da membrana alvéolo-capilar nas doenças pulmonares obstrutivas crônicas, perda de neurônios na doença de Alzheimer, alterações do tamanho e do número de glomérulos associadas à *diabete mellitus*)".



* Cf. <http://www.ebiomedbrazil.com/specialties/nephr/arti/nephr_arti_003.htm>

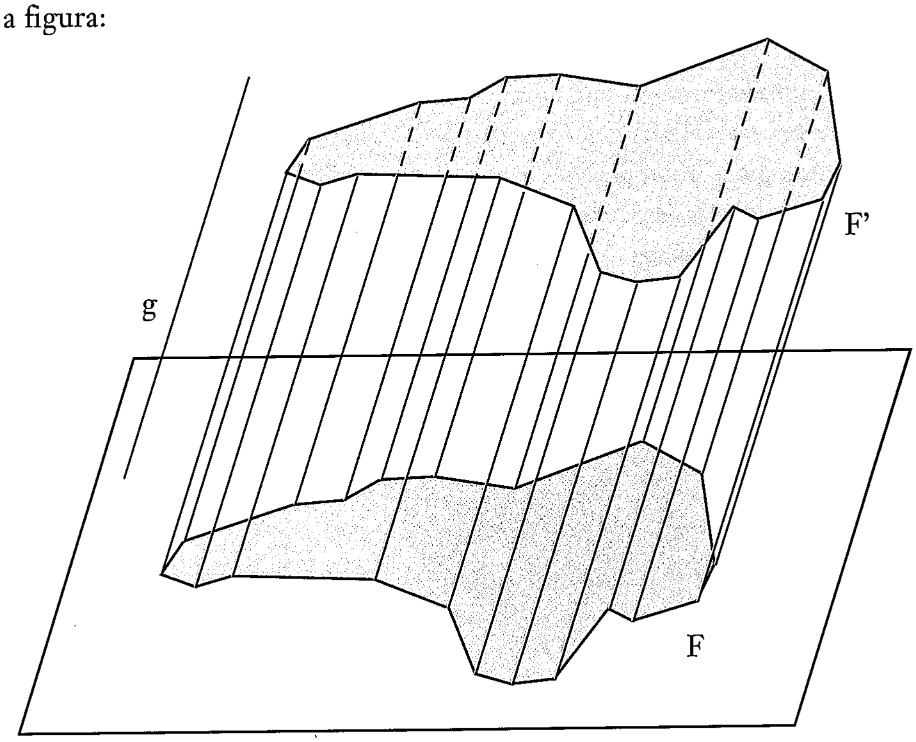


A Estereologia também é utilizada na Geologia, para o estudo de cristais e rochas, através de cortes finos. A Estereologia utiliza resultados da Geometria, da Estatística e recursos computacionais, e tem como metodologia central a idéia de tirar conclusões sobre objetos espaciais a partir da análise de suas seções planas, idéia essa presente no Princípio de Cavalieri. Essa ciência mostra que idéias matemáticas podem encontrar aplicações séculos depois de seu surgimento e podem contribuir para os avanços científico e tecnológico em diversas áreas do conhecimento.

Volume de cilindros

Usando o Princípio de Cavalieri, podemos obter os volumes de outros sólidos, como os cilindros. Para isso, vamos definir um cilindro generalizado como sendo um sólido obtido a partir de uma figura plana F (base do cilindro) e uma geratriz g, um segmento de reta não-paralelo ao plano horizontal que contém F.

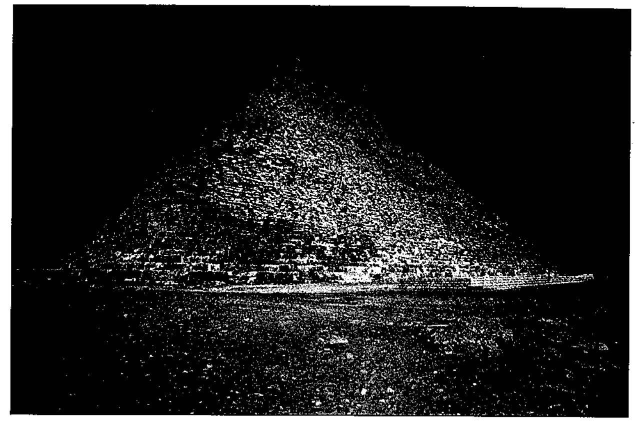
O cilindro generalizado será o sólido delimitado pela reunião dos segmentos de reta a, obtidos a partir de cada ponto de F, paralelos ao segmento g e de mesma medida que g, conforme a figura:



Para mostrar que o volume de um cilindro generalizado é igual à área da base vezes a altura, tomamos um retângulo no plano que contém F, de mesma área que F. Usando esse retângulo como base, construímos um bloco retangular cuja altura seja a mesma do cilindro. Qualquer que seja o plano paralelo ao plano que contém F, a secção do cilindro será congruente à base F, e a secção do bloco será congruente à sua base; pelo Princípio de Cavalieri, ambos os volumes terão a mesma medida.

Volumes de cones e pirâmides

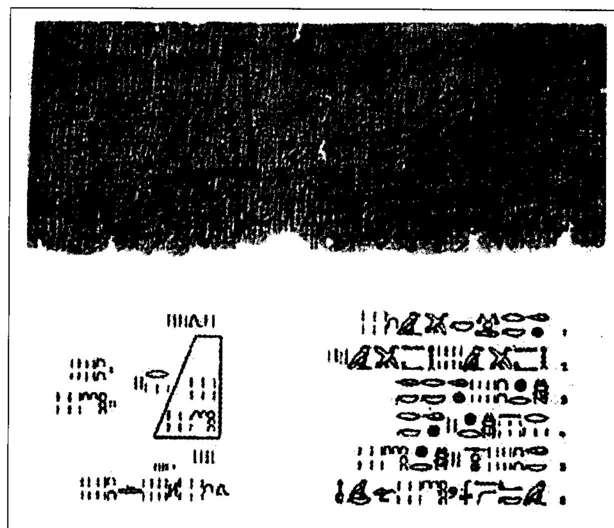
Ao definir o volume dos prismas, podemos obter os volumes de outros sólidos deles derivados, como as pirâmides. Essas figuras já eram admiradas na Antiguidade, sendo uma das formas mais utilizadas para a construção de templos. Os egípcios, por exemplo, que tinham uma preocupação religiosa intensa, construíram mausoléus suntuosos em formato de pirâmides gigantescas. A Matemática necessária ao estudo dessas construções não é trivial, mas não há evidências de que os egípcios tenham chegado a fazer demonstrações dos resultados em que confiavam por sua experiência prática.



STOCK PHOTOS

Quéops, a maior pirâmide de Gisé, foi construída entre 2589 e 2566 a.C., com mais de 2 300 000 blocos de pedra, pesando, em média, 2,5 toneladas cada uma.

Assim, desde o início, o estudo da Geometria parece ter tido essas motivações: as aplicações práticas e os interesses estético e lúdico do estudo das formas.

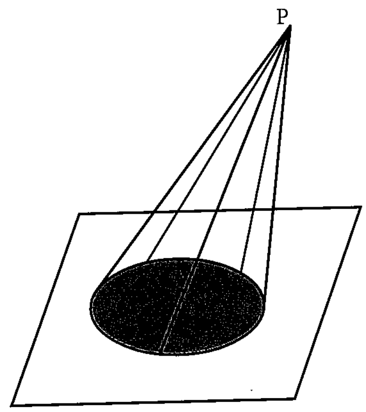


Reprodução de parte do papiro de Moscou.

No papiro de Moscou, vemos um problema resolvido que mostra que os egípcios sabiam calcular o volume de um tronco de pirâmide. O cálculo dos egípcios mostrava as operações necessárias para a obtenção do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada, com altura h e bases de arestas a e b, seguindo uma ordem de operações semelhante ao que hoje denotaríamos pela fórmula $V = h\,(a^2 + ab + b^2)/3$. Em um outro documento, há indicações do cálculo correto do volume da pirâmide, que, no nosso caso, se obteria tornando $b = 0$ na fórmula acima. Contudo, os egípcios não conheciam fórmulas algébricas, nem há indicações de que teriam generalizado esse conhecimento sobre volumes. Supõe-se que teriam decomposto o tronco da pirâmide em paralelepípedos, prismas e pirâmides ou, ainda, utilizado cestos de areia de formatos diversos, a partir dos quais elaborariam avaliações do volume de sólidos.

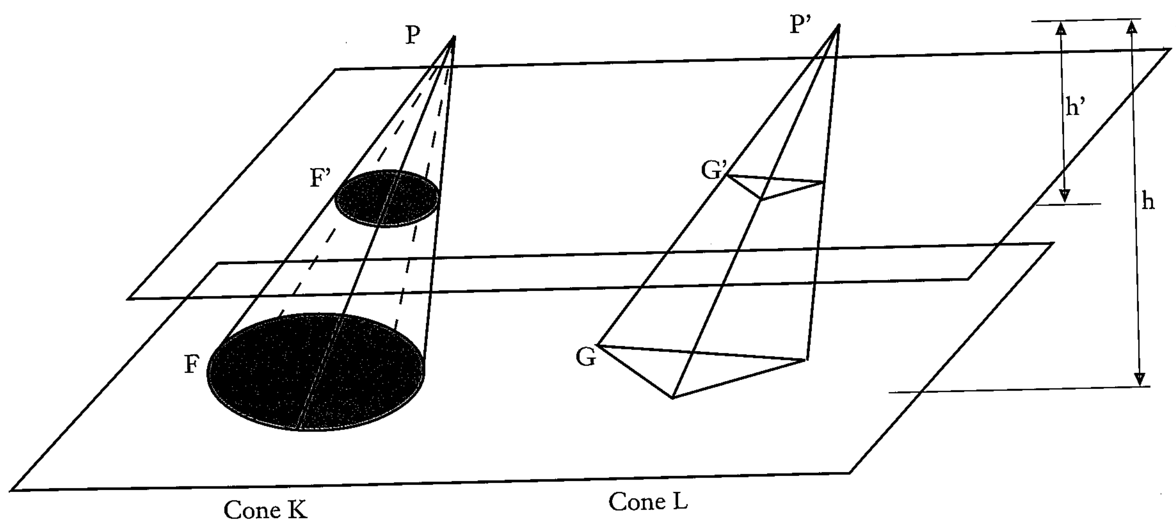
Vamos aplicar o Princípio de Cavalieri e a teoria de semelhanças para obtermos o volume de cones e pirâmides. Para isso, iremos mostrar que dois cones generalizados de mesma altura e bases com áreas iguais têm volumes iguais.

Consideramos um cone generalizado como sendo o sólido delimitado por uma figura plana F e pelos segmentos que unem um ponto P (vértice) fora do plano de F aos pontos do contorno de F.



Observemos que os cones e pirâmides usuais são particulares cones generalizados.

Se K e L forem dois cones com a mesma altura h e bases F e G de mesma área – estando as bases em um mesmo plano e os vértices de um mesmo lado –, para todo plano paralelo a eles, situado entre o vértice e esse plano, temos secções de mesma área. Isso se deve à semelhança, uma vez que temos a seguinte construção para cada um desses cones:

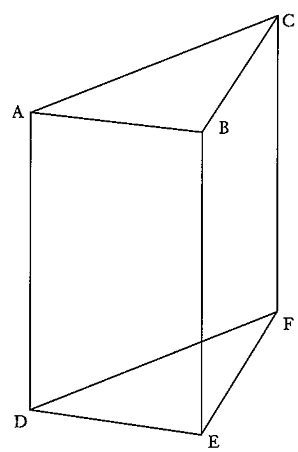


Área (F')/área (F) = Área (G')/área (G) = $(h'/h)^2$.

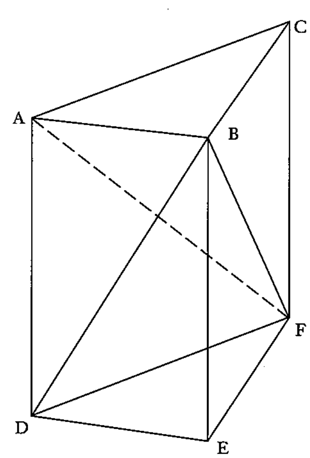
Logo, Vol (K) = Vol (~~G~~).
L

Como são de mesma medida as áreas das secções de K e L por planos paralelos ao plano que contém suas bases, segue do Princípio de Cavalieri que os volumes de K e L são iguais.

Assim, basta conseguir determinar o volume de uma pirâmide com algum formato particular conveniente, que o Princípio de Cavalieri nos permitirá encontrar o volume de todos os cones generalizados com mesma área da base e mesma altura.Podemos obter o volume das pirâmides de base triangular através da decomposição de um prisma de base triangular, atividade que pode ser realizada com um prisma feito de sabão ou de outro material fácil de cortar. Consideremos o prisma de bases triangulares ABC e DEF, como abaixo:



As bases são triângulos congruentes; as faces laterais, paralelogramos. Se dividirmos um paralelogramo por sua diagonal, obteremos triângulos congruentes. Com base nisso, considere as pirâmides BDEF, ABCD e ABCF, obtidas pela secção do prisma, conforme indicado:



Como, duas a duas, essas pirâmides possuem a mesma base e a mesma altura, as três têm volumes iguais. Portanto, vol (Pirâmide) = B.h/3.

Esferas

Selo em homenagem a Arquimedes.

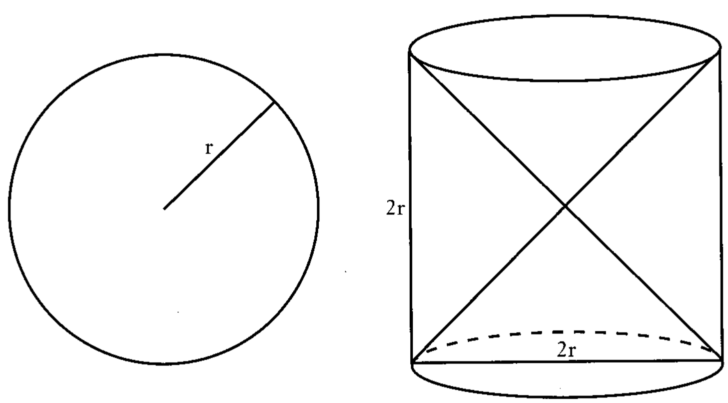
Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) empregou interessantes métodos de descoberta para chegar a resultados sobre esferas, cilindros e cones, construindo idéias originais e sofisticadas, através de raciocínios envolvendo relações entre áreas e volumes de figuras:

1. O volume da esfera é quatro vezes o volume do cone de base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao raio da esfera;
2. A área da superfície da esfera é quatro vezes a área de um círculo máximo da esfera;
3. O volume de um cilindro circunscrito a uma esfera é 3/2 do volume da esfera;
4. A área do cilindro circunscrito também é 3/2 da área da esfera.

Para mostrar esses resultados, Arquimedes utilizou a construção de figuras, cujo detalhamento foge ao objetivo destas páginas. Vejamos como poderemos acompanhá-los, utilizando o Princípio de Cavalieri.

1. O volume da esfera é quatro vezes o volume do cone de base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao raio da esfera.

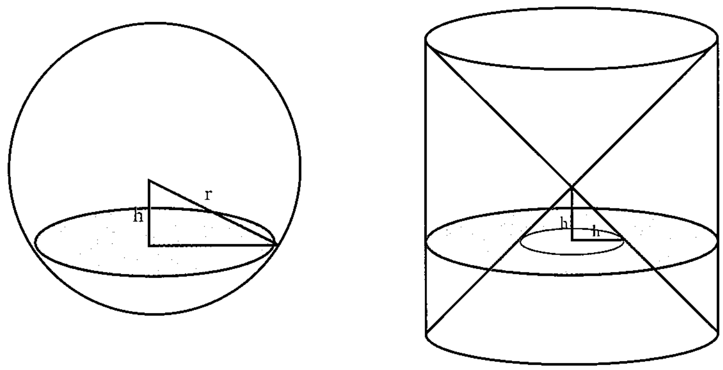
Este enunciado decorre da expressão do volume da esfera. Vamos comparar os volumes de uma esfera e de um sólido formado pela diferença entre um cilindro e um cone duplo, como no esquema abaixo:



Observemos que, cortando a esfera e o espaço entre o cone e o cilindro por um plano que dista h do centro, obtemos, em ambos os casos, uma área que é dada por $p(r^2 - h^2)$. O corte da esfera gera círculos de raio $r^2 - h^2$ (pelo Teorema de Pitágoras) e, portanto, tem área $p(r^2 - h^2)$, enquanto o corte do espaço entre o cilindro e os cones gera anéis circulares, cuja área é a área do círculo maior pr^2 menos a área do círculo menor ph^2, ou seja, $p(r^2 - h^2)$.

Pelo Princípio de Cavalieri, temos que o volume da esfera será igual ao volume do sólido obtido do cilindro após a remoção dos dois cones; ou seja, o volume da esfera é igual a $pr^2 \cdot 2r - 2\,(1/3 \cdot pr^2 \cdot r) = 4/3pr^3$

$p = \pi$

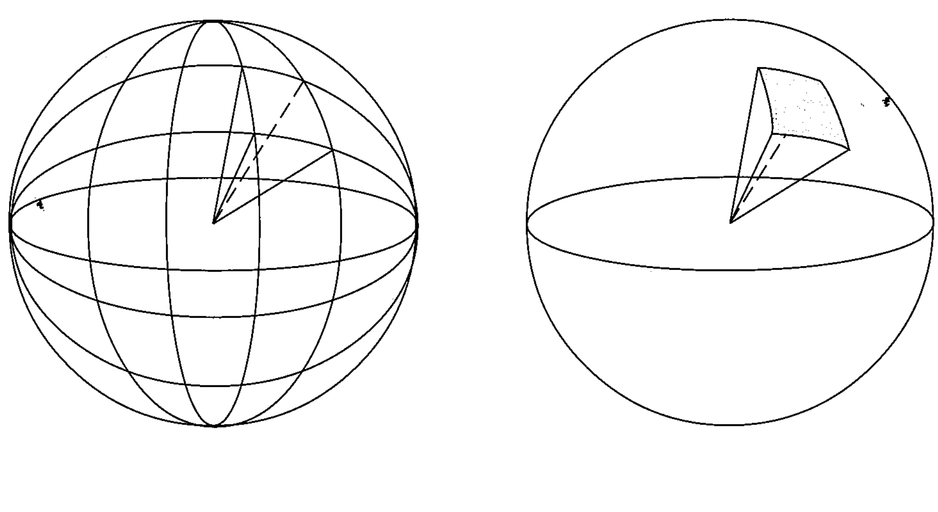


$V = 4pr^3/3$

A compreensão dessa expressão nos fornece o primeiro enunciado de Arquimedes, desde que consideremos que $V = 4pr^3/3 = 4\,r \cdot (pr^2/3)$, que pode representar quatro vezes o volume do cone de base igual a um grande círculo da esfera $(pr^2/3)$ e com altura igual ao raio da esfera $(r \cdot pr^2/3)$.

2. A área da superfície da esfera é quatro vezes a área de um círculo máximo da esfera.

Um raciocínio que conduz este enunciado considera a divisão da esfera por pequenas pirâmides, com altura igual ao raio da esfera e base igual a pequenas regiões da esfera, as quais – se a região considerada for suficientemente pequena – serão aproximadamente planas.



Considerando que cada região determinada desse modo terá como área uma fração da área da esfera de raio r – digamos A_i – e que o volume de cada pirâmide será $A_i r/3$, temos que a soma de todas essas pirâmides será o volume da esfera, ou seja,

$$A_1 r/3 + A_2 r/3 + A_3 r/3 + A_4 r/3 + \ldots = 4pr^3/3$$

$$(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots)\ r/3 = 4pr^3/3$$

$$(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots) = 4pr^2,$$

a área da superfície da esfera é quatro vezes a área do círculo máximo da esfera.

Os resultados 3 e 4 de Arquimedes decorrem das relações, já conhecidas, entre volumes e áreas de esferas e cilindros.

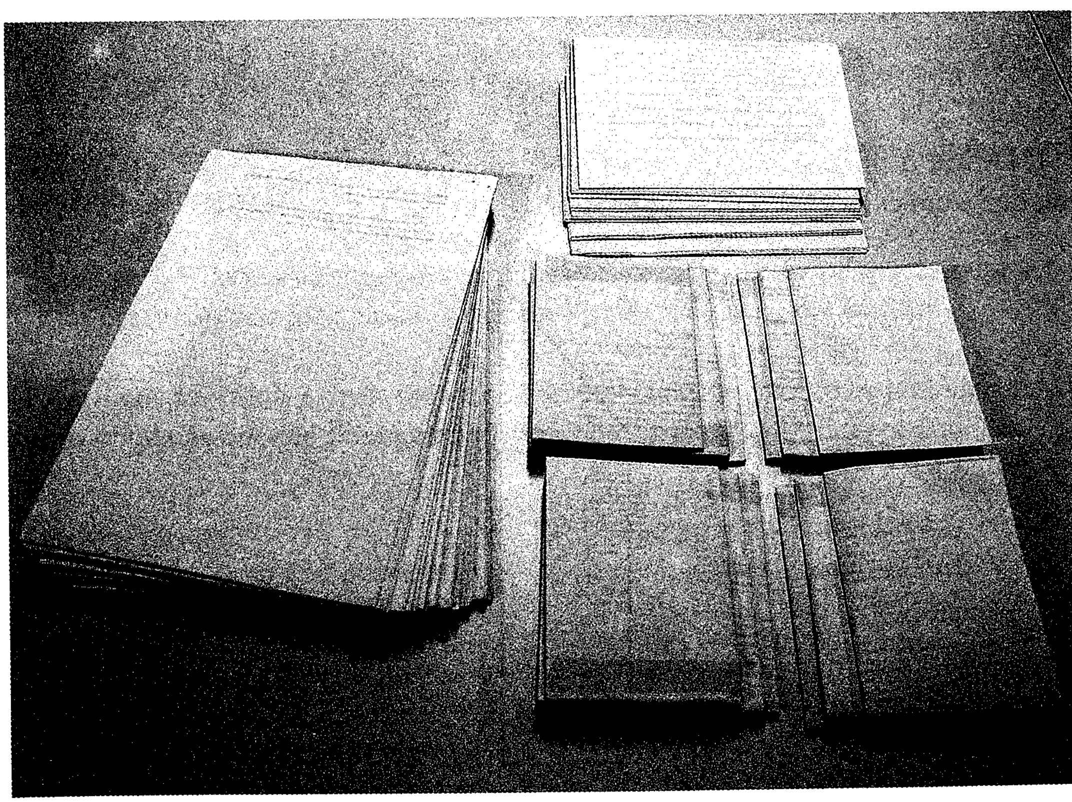
Trabalho monitorado

A. Proponha as dimensões, em centímetros, de uma caixa em formato de paralelepípedo contendo um volume de 100 cm^3. Qual caixa tem maior volume: a de dimensões $10 \times 5 \times 15$ cm ou a que tem dimensões $9 \times 6 \times 14$ cm?

B. Dois prismas de mesma altura, A e B, apresentam a seguinte propriedade: "Qualquer plano paralelo às bases dos prismas e que corte ambos produz figuras planas, de modo que a área das secções de A é o dobro das áreas das secções correspondentes em B."

Utilizando o Princípio de Cavalieri, o que se pode afirmar sobre a relação entre os volumes desses prismas?

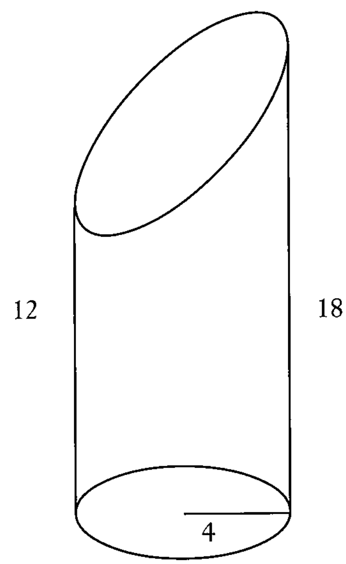
C. Um pacote de folhas de papel retangulares pesa 1,5 kg. Qual a massa de um pacote (mesmo número de folhas e mesma qualidade de papel) contendo folhas com o dobro do comprimento e o dobro da largura das folhas do pacote original?



ALEX ANASTÁCIO

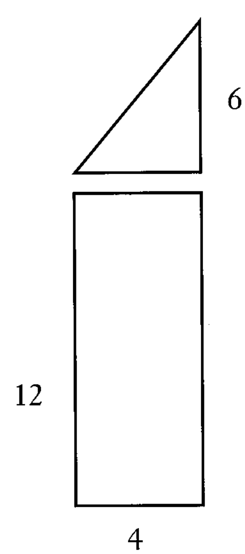
D. O problema a seguir foi proposto para alunos do Ensino Médio:

"Ache o volume de um cilindro seccionado obliquamente, como mostra a figura. A altura vai de 12 cm a 18 cm e o raio da base mede 4 cm."

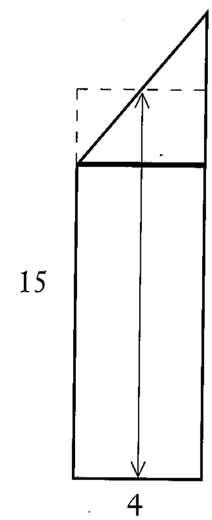


Três esquemas foram propostos pelos alunos. Verifique se todos eles conduzem à solução verdadeira.

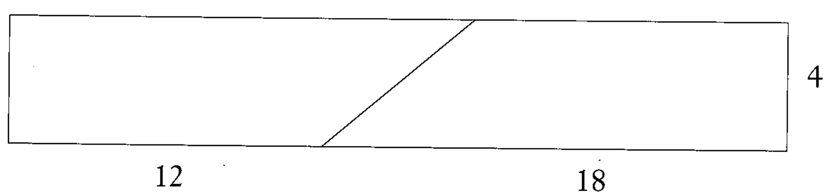
1. Dividir o cilindro em duas partes, uma com um volume igual à metade da metade da outra, que é um cilindro de raio 4 e altura 12.



2. Tomar a altura média e calcular o volume de um cilindro de raio 4 e altura 15.



3. Considerar um cilindro maior, de altura 30 e raio 4, cujo volume é o dobro do desejado:



E. Mostre que as três pirâmides encontradas têm, duas a duas, a mesma altura e área da base, portanto, o mesmo volume.

F. Expresse o volume das pirâmides em função do volume de um prisma de mesma base e altura. Essa expressão vale para pirâmides de base poligonal qualquer? Justifique.

G. Verifique a fórmula egípcia para o cálculo do volume do tronco da pirâmide com base na fórmula obtida na questão B (**sugestão:** considere a subtração de duas pirâmides).

Trabalhando em sala de aula

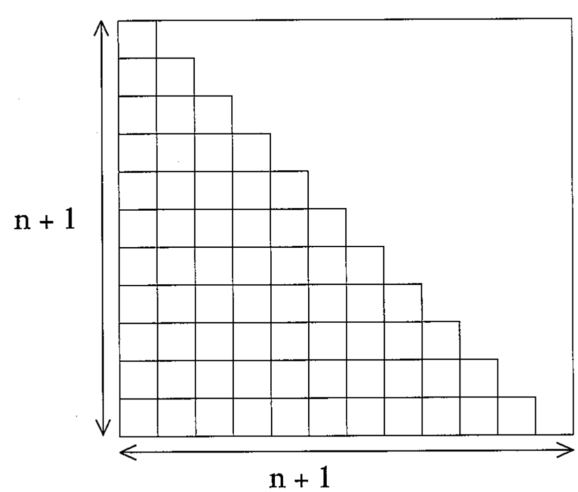
Grandezas relacionadas

A abordagem proposta neste trabalho nos leva a associar **medida** e **forma** em Geometria como uma maneira de resolver problemas envolvendo contagem e a relação entre diversas unidades de medida. Um exemplo histórico mostra como é possível contar pessoas a partir de uma figura geométrica. Diz a lenda que Xerxes, rei da Pérsia, mandou contar seus enormes exércitos da seguinte forma: ordenou que se agrupassem 10 000 soldados em um espaço circular o menor possível e que essa circunferência fosse marcada. Retirados os homens, mandou construir uma mureta sobre essa linha circular, com apenas uma entrada e uma saída, e fez os exércitos entrarem na tal construção, em grupos. Com isso, teria chegado ao mirabolante total de 1 700 000 homens.

É sabido que, em algumas regiões do Brasil, se medem as áreas cultivadas por sacos de café, que se podem produzir naquelas áreas. Do mesmo modo, podemos comparar medidas de áreas com o preço da tinta necessária para pintá-las e diferentes volumes pela massa que representam. Tais associações geram problemas interessantes, que envolvem habilidades de mais de um assunto da Geometria, em diversos contextos.

Você conhece outros exemplos em que grandezas diversas podem ser associadas às medidas de comprimento, áreas e volumes?

Outro tipo de relações entre grandezas é encontrado em problemas que relacionem Geometria e contagem, como, por exemplo, quando usamos um diagrama para mostrar geometricamente que a soma dos n primeiros inteiros positivos é $n(n + 1)/2$.



$$1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$$

O trabalho com volumes e áreas em sala de aula pode ser contextualizado na medida em que utilizamos materiais e construímos objetos geométricos que nos permitam observar as relações entre áreas e volumes. A construção de um Laboratório de Matemática na escola pode ser uma boa forma de trabalhar os conteúdos, as habilidades e as competências ligados à Geometria. Sólidos feitos de argila, sabão, canudinhos de papel e cartolina podem ser suficientes para tornar o ensino de Geometria mais interessante e concreto. Aparentemente, esse era o caminho que Arquimedes seguia em seus estudos. É sabido que ele construía objetos e pesava-os para verificar suas propriedades matemáticas. O estudo do concreto auxiliava-o na abstração da Geometria, como vemos neste selo alemão, em que Arquimedes aparece apoiado sobre uma esfera, em profunda meditação.


Selo em homenagem a Arquimedes.

Demonstre os resultados 3 e 4 de Arquimedes sobre volumes e áreas de esferas e cilindros. Pense em um modo de trabalhá-los concretamente.

Referências adicionais

Bibliografia

ÁVILA, Geraldo. A hipérbole e os telescópios. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, v. 34, p. 22-27, 1997.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. Trad.: Elza Furtado Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996, 496 p.

COOLIDGE, Julian Lowell. **A history of geometrical methods**. Oxford: Clarendon Press, 1940, 415 p.

_______. **A history of the conic sections and quadric surfaces**. Oxford: Clarendon Press, 1945, 214 p.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. 2. ed. Trad.: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

GALVÃO, M. E. L. **Secções cônicas**: parábolas, elipses e hipérboles (notas de curso). São Paulo: CAEM-IME/USP, 1996.

KNORR, Wilbur Richard. **The ancient tradition of geometric problems**. Boston: Birkhäuser, 1986, 411 p.

LIMA, Elon Lajes. **Medida e forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991, 98 p.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. Trad.: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, 308 p.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 2° grau**. 3. ed. 1992, 414 p.

VALADARES, R. J. da C. Elipse, sorrisos e sussurros. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, v. 36, p. 24-28, 1998.

WAERDEN, B. L. van der. **Geometry and Algebra in ancient civilizations**. Berlin: Springer-Verlag, 1983, 223 p.

WAGNER, Eduardo. **Por que as antenas são parabólicas**. São Paulo, v. 33, p. 10-15, 1997.

Vídeo

Secções cônicas. Toronto, Canadá: TV Ontário. 2 v. (cada qual com 3 programas de 10 minutos cada um)

Sites

www.ime.usp/br/~caem/

Indicação de vários cursos e palestras para aperfeiçoamento do ensino de Matemática.

www.matematica.br

Programas gratuitos de Geometria Dinâmica e outros.

www.lendoeaprendendo.sp.gov.br/2002/salaAmb02.asp

Indicações de como fazer uma sala ambiente de Matemática; o Laboratório de Matemática.

www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexem7p.html

Muitas indicações de páginas em português sobre o ensino de Geometria e de outros assuntos da Matemática.

EQUIPE DE PRODUÇÃO EDITORIAL DE MATERIAIS EDUCACIONAIS
Edição
Maristela Lobão de Moraes Sarmento

Assistência de Edição
Elissa Khoury Daher
Ismar Leal
Robinson Sasaki

Assistência de Produção
Beatriz Blay

Preparação de Texto
Andrea Vidal de Miranda

Revisor
Paulo Roberto de Moraes

Fotografia
André Sarmento

Pesquisa
Ana Panzani
Diogo Ruic de Carvalho
Patrícia Cristina Carceres

Assistência de Arte
Renato Sales

Projeto Gráfico, Edição de Arte e Produção Gráfica
Mare Magnum Artes Gráficas

2003