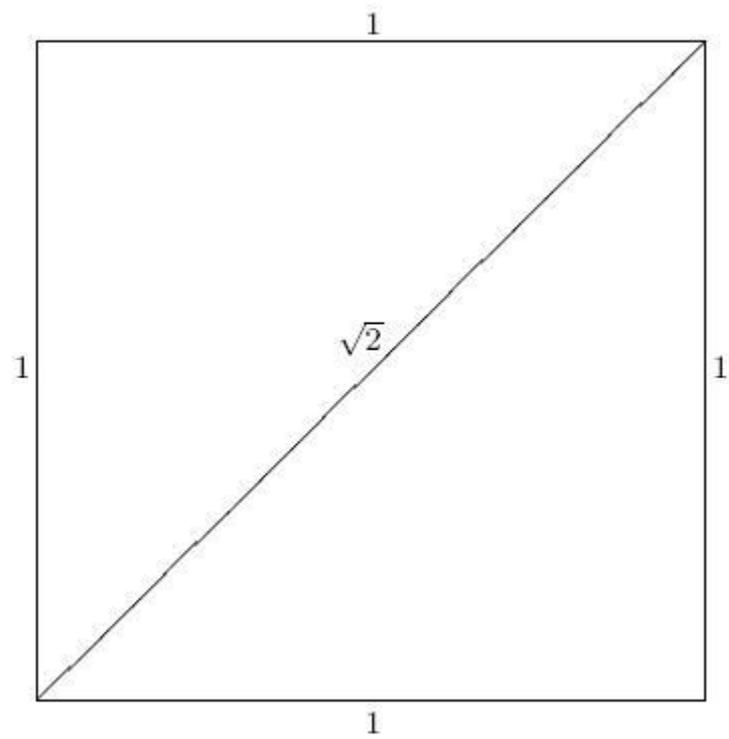


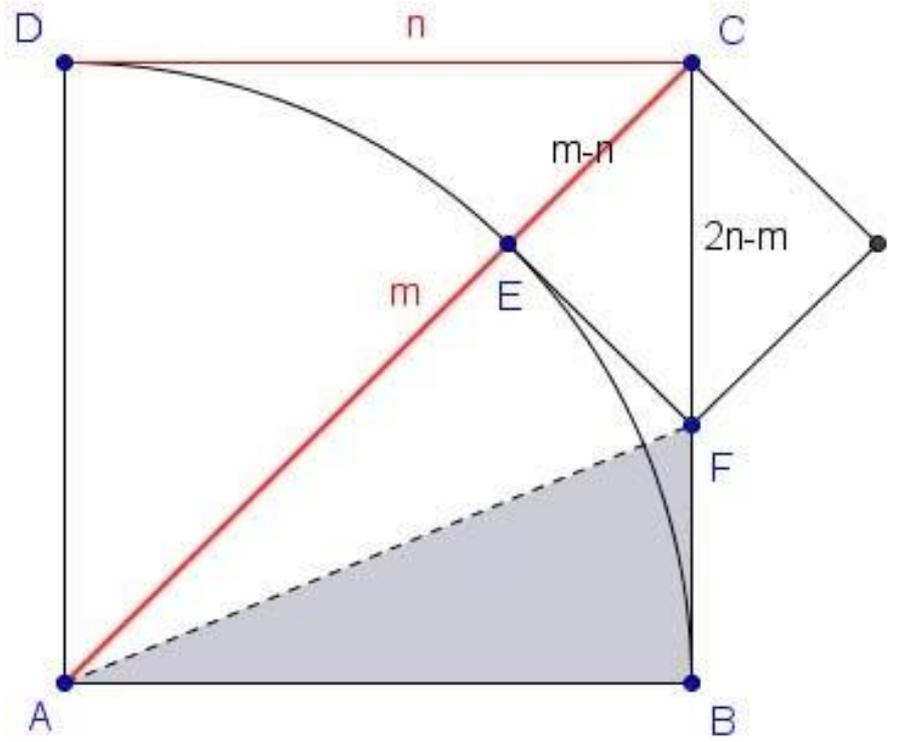
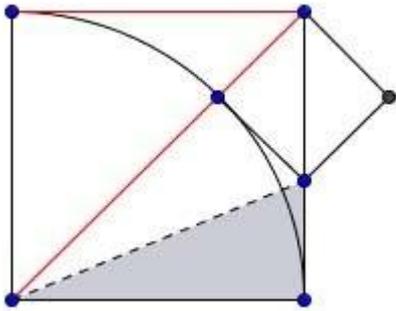
# Os números irracionais

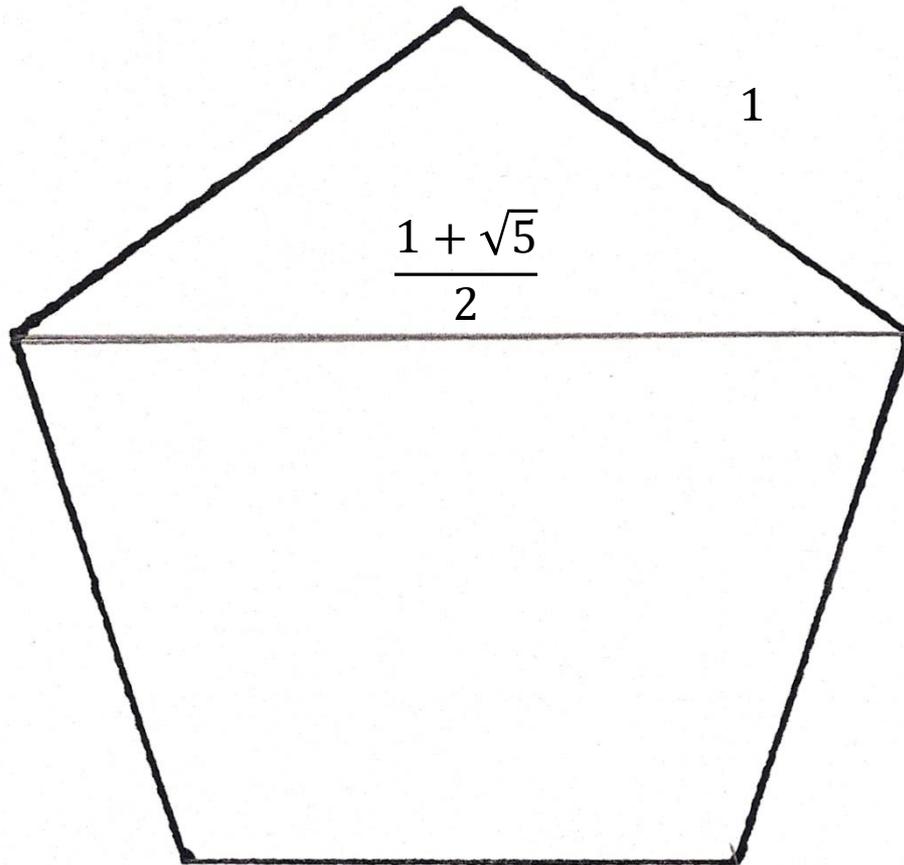
2

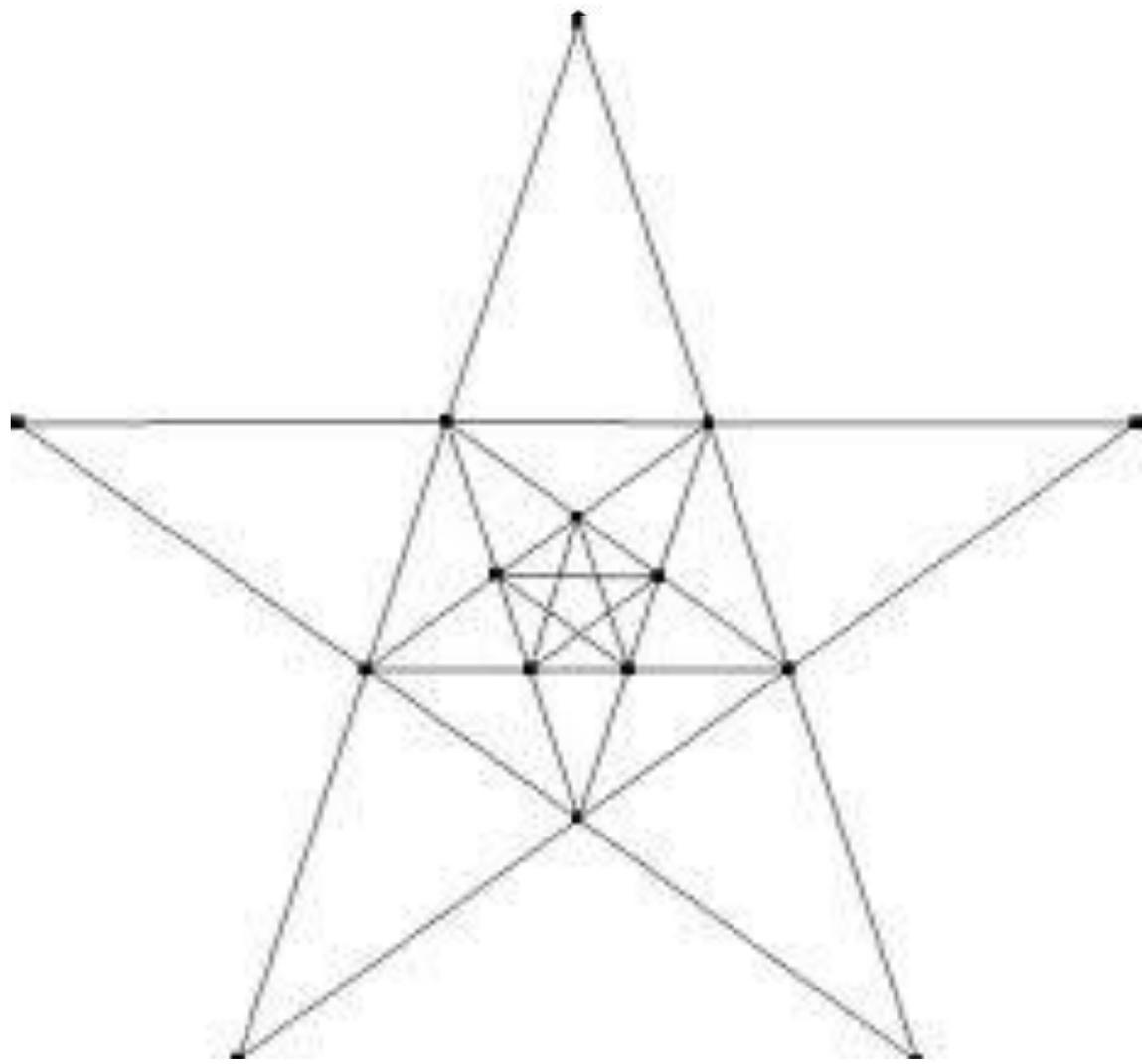
## O método da *antifairese*

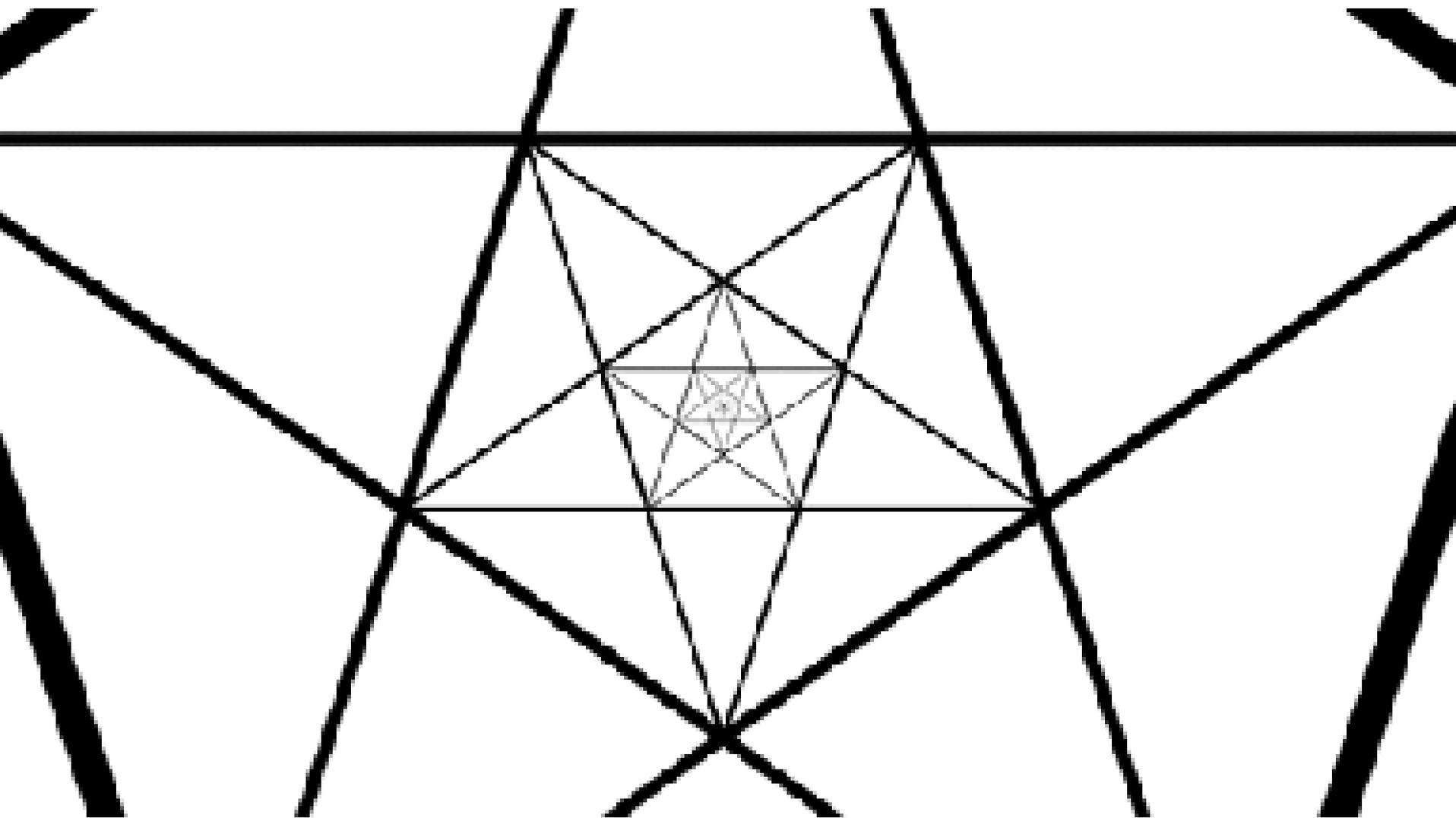
A palavra *antifairese* vem do grego e significa, literalmente, “subtração recíproca” (ROQUE, 2012)











“Não posso falar da nossa história de amor, então vou falar de matemática. Não sou formada em matemática, mas sei de uma coisa: existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. Tem o 0,1 e o 0,12 e o 0,112 e uma infinidade de outros. Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2, ou entre o 0 e o 1 milhão. Alguns infinitos são maiores que outros.

Um escritor de quem costumávamos gostar nos ensinou isso. Há dias, muitos deles, em que fico zangada com o tamanho do meu conjunto ilimitado. Queria mais números do que provavelmente vou ter, e, por Deus, queria mais números para o Augustus Waters do que os que ele teve. Mas, Gus, meu amor, você não imagina o tamanho da minha gratidão pelo nosso pequeno infinito.

Eu não o trocaria por nada nesse mundo. Você me deu uma eternidade dentro dos nossos dias numerados, e sou muito grata por isso”.

GREEN, J. A Culpa é das Estrelas. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2012.

Na matemática, os números naturais são utilizados para contar.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ....

O conjunto dos números naturais é chamado de enumerável, pois seus elementos podem ser contado um a um .... Embora sejam infinitos.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ....

A infinitude dos números naturais é bastante contra-intuitiva. Uma forma bastante doida de pensar nisso é comparar o conjunto dos naturais com o conjunto dos números pares... Eles são equipotentes! Têm a mesma cardinalidade! Há uma bijeção entre os dois conjuntos! Eles são um a um!

1    2    3    4    5    6    7 ....

2    4    6    8    10    12    14 ...

Para sentir o infinito natural, vamos olhar a brincadeira inventada por David Hilbert (1862-1943):



*O Hotel de Hilbert*

[https://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy\\_DVU](https://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy_DVU)

Também tem a mesma cardinalidade o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Basta fazer esta correspondência, por exemplos, entre pares e ímpares:

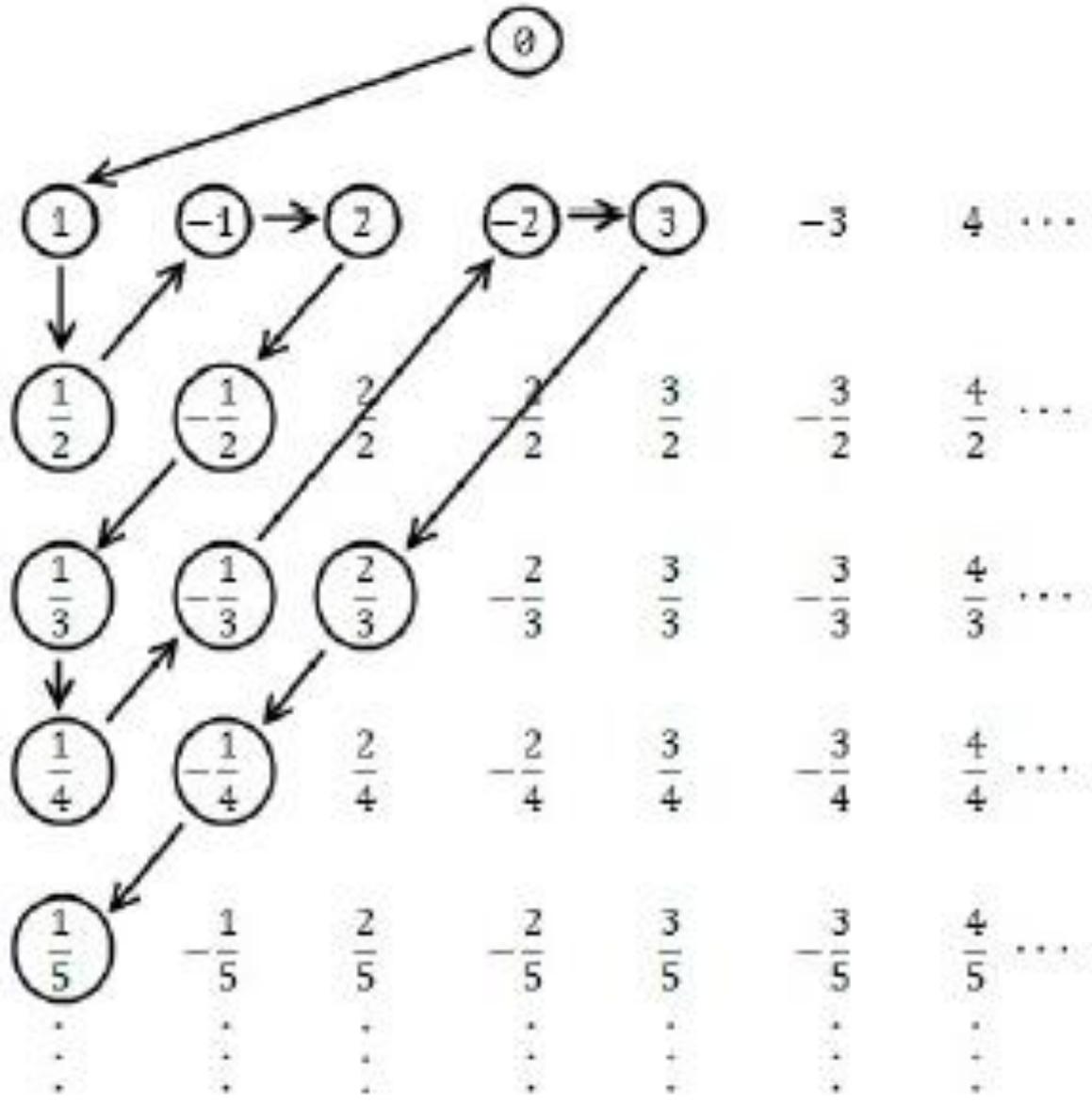
...	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	...
...	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	...
...	5,	3,	1,	0,	2,	4,	6,	...

Agora vem o passo mais estranho. Os racionais também formam um conjunto enumerável.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

**O argumento de Cantor é fácil de seguir...**

Cantor propõe uma ordenação pela diagonal:



Portanto há uma associação um a um entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos racionais.

E o conjunto dos reais?

Vamos supor que seja possível enumerar os números reais entre 0 e 1.

Vamos supor que seja possível associar um a um os números reais entre 0 e 1 com o conjunto dos naturais (não precisam estar em ordem).

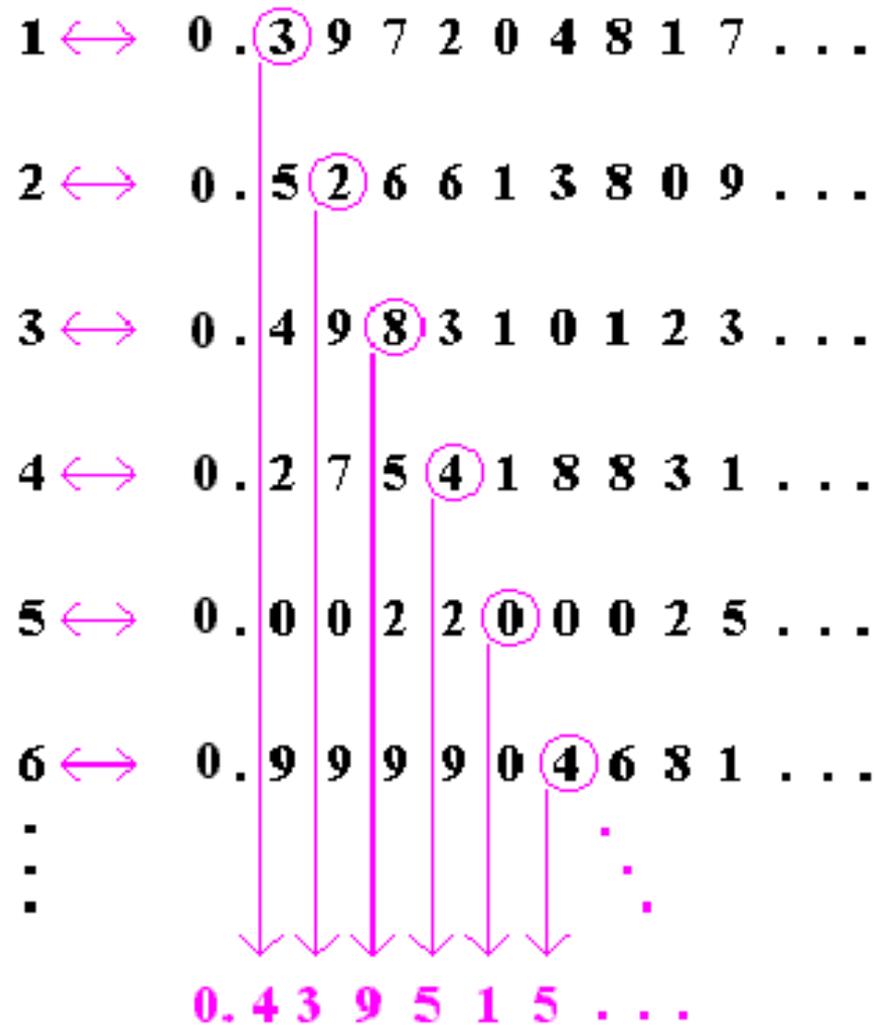
<b>1</b> ↔	<b>0.397204817...</b>
<b>2</b> ↔	<b>0.526613809...</b>
<b>3</b> ↔	<b>0.498310123...</b>
<b>4</b> ↔	<b>0.275418831...</b>
<b>5</b> ↔	<b>0.002200025...</b>
<b>6</b> ↔	<b>0.999904681...</b>
.	
.	
.	

Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um.

1	↔	0.	3	9	7	2	0	4	8	1	7	...
2	↔	0.	5	2	6	6	1	3	8	0	9	...
3	↔	0.	4	9	8	3	1	0	1	2	3	...
4	↔	0.	2	7	5	4	1	8	8	3	1	...
5	↔	0.	0	0	2	2	0	0	0	2	5	...
6	↔	0.	9	9	9	9	0	4	6	8	1	...
⋮												
⋮												

1	↔	0.	3	9	7	2	0	4	8	1	7	...
2	↔	0.	5	2	6	6	1	3	8	0	9	...
3	↔	0.	4	9	8	3	1	0	1	2	3	...
4	↔	0.	2	7	5	4	1	8	8	3	1	...
5	↔	0.	0	0	2	2	0	0	0	2	5	...
6	↔	0.	9	9	9	9	0	4	6	8	1	...
⋮												
⋮												
			0.	4	3	9	5	1	5	...		

Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um.

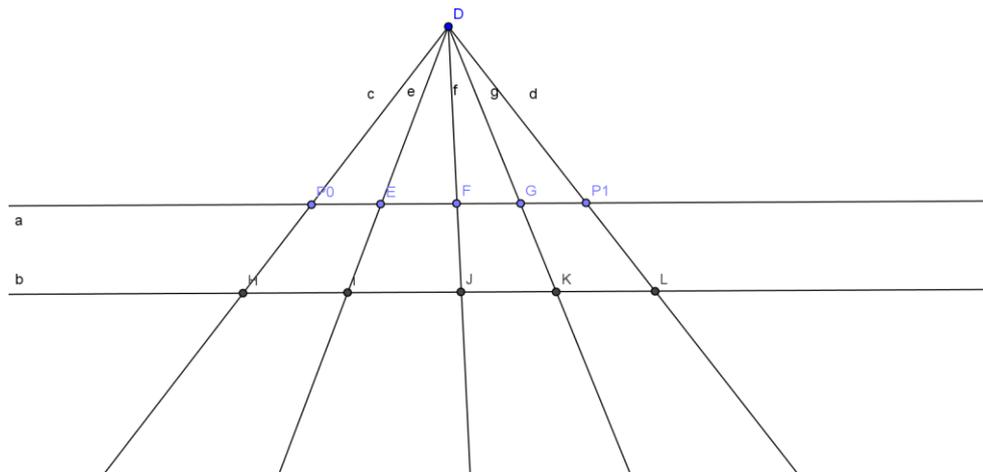




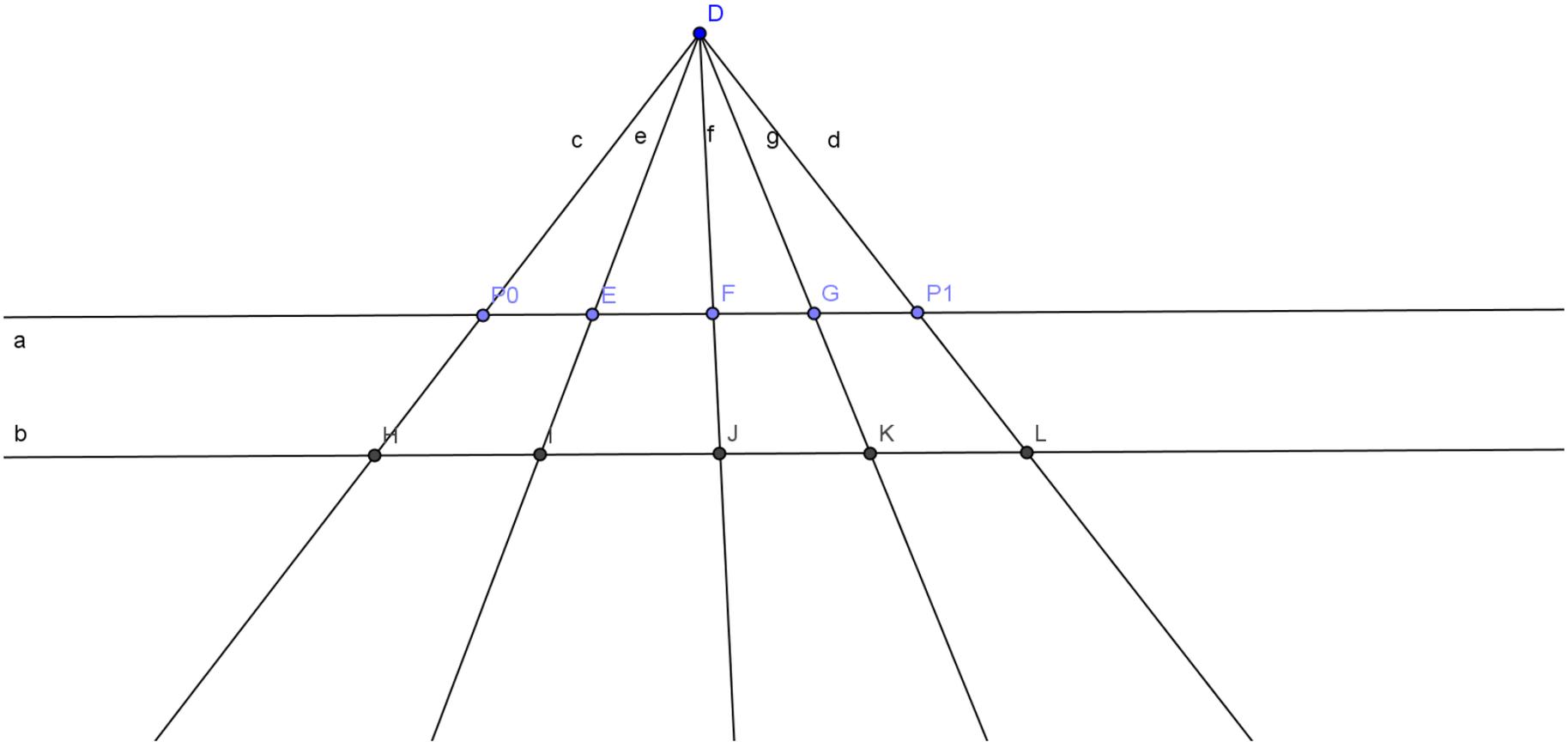
O número resultante não estava no conjunto original, pois tem pelo menos um algarismo diferente de todos os demais!

Assim, o conjunto dos reais entre 0 e 1 é não-enumerável. O infinito real é “maior” que o infinito natural, é de outra natureza!

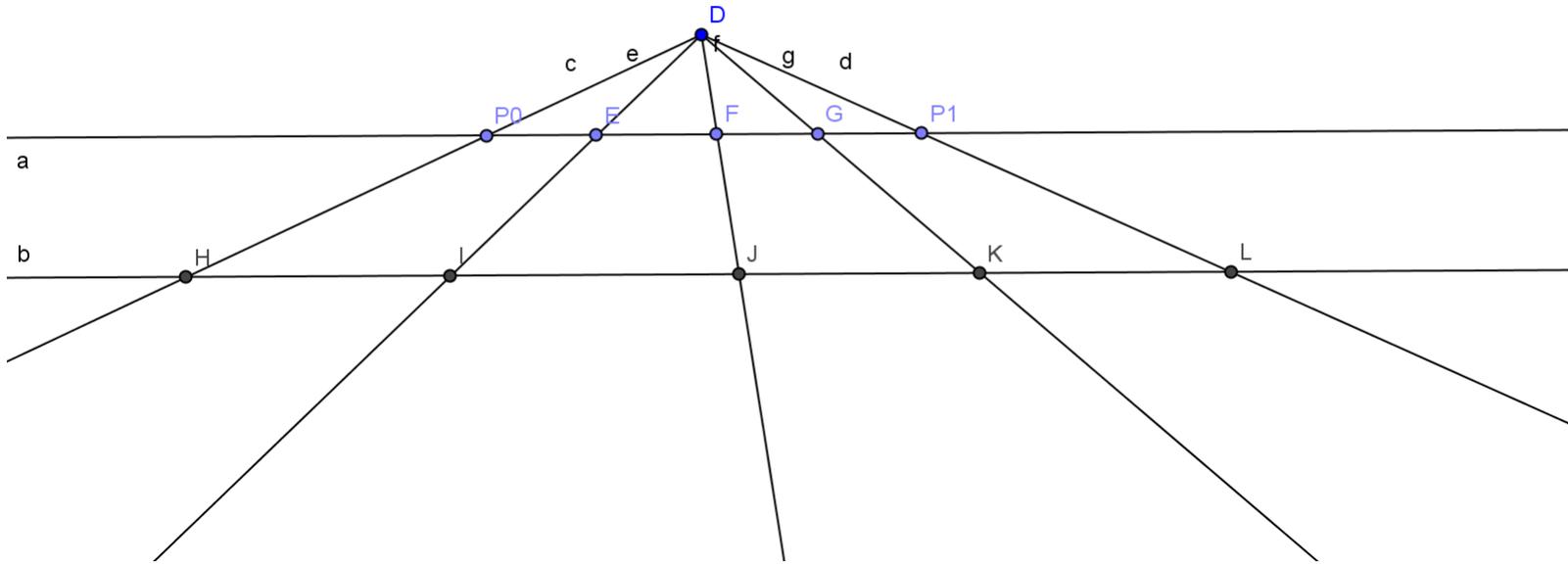
O pior é que qualquer segmento da reta real tem a mesma cardinalidade da reta real inteira...



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



A Hipótese do Contínuo de Cantor, que ainda não foi provada e talvez não possa ser provada, tem como implicação que a reta real é contínua. Não faltam pontos.

Ou seja, os números reais preenchem todo o espaço!

Vamos ver como isso faz sentido.

Tomemos um número real, não racional, bem conhecido. Por exemplo, o número  $\pi$  já foi expresso em até 10 trilhões de dígitos.

3.141592653589793238462643  
3832795028841971693993751  
0582097494459230781640628  
6208998628034825342117067  
9821480865132823066470938  
4460955058223172535940812  
8481117450284102701938521  
1055596446229489549303819  
6442881097566593344612847



# E como isso vale para qualquer número real...

3.415 9265 35 979323 4626433 32795 02 41971693 99375105 209744445 92307 164061 620 99 62 034 25 342110679 24 0 65132 2306647093 4460955 05 2231725 35940 12 4 4 11745 02 410270193 5 210  
555 964462294 95 49303 196442 10975 665 9334462 475 64 2337 67 3165 2712 0190945 64 65 6692346034 8045 432664 213393607260249412 737245 7006606385 174 1520920962 2925 409175 364367 925 9  
0360013305 305 4 204665 213 44695 1945 160943305 7270365 75 95 9195 3029 6173 19326119305 1 5 074462379962 7495 6735 75 72724 9122793 30119492 9 3367336244065 66430 6021394946395 22473719  
0702179 609437027705 3921717629317675 23 4674 4676694051320005 6 12 145 2635 60 277 77134275 77 960917363717 7244 44090122495 3430465 495 5 37105 07922796 925 9235 4201995 61229021960 64  
03444 15 136297747713099605 7072134999999 37297 04995105 9731732 160963 5 95 02445 945 53469 3026425 2230 25 33446 5 03526931 171010003137 3 752 65 75 3320 3 120611717669473035 9  
9 25 349042 75 546 7315 95 62 63 235 37 75 9375 195 77 7 05 32171226 0663001927 7661195 90921642019 93 095 25 7201065 4 6327 65 9365 33 2796 2303095 2035 30 296 995 7736225 99413 91  
249721775 2 34791315 74 5 724245 45 0695 95 0 295 316 6727 5 5 9075 09 3 175 463746493931925 5 06040092770167113900 4 2402 5 386035 63707660104710 194295 5 969 946767 3744944 25 37  
977472 471040475 346462 0466 42 9069492 933367702 9 9 210475 2162 05 696602405 03 05 01935125 33 2430035 5 76402474947326394192726042699227967 235 47 16360093417264219245 635 0302  
6 6 29745 5 706749 3 5 054945 5 692695 6909272107975 0930295 532165 3449 7120275 59602364 0665 49919 3479775 35 66369 074265 425 27 625 5 4175 74672 90977772793 000 64710600164524  
1921732172477235 0414497735 6 5 4 183615 735 25 5 2133475 74 4946 43 5 233239707394433345 47762416 62 5 9 35 694 5 62099219222 42725 025 425 6 76717904946065 3466 049 6272327917 60 5 7 43  
3 279679766 145 410095 3 37 636095 06 0064225 125 205 1173929 4 960 412 4 626945 604241965 2 5 022210661 630674427 622039194945 0471237137 696095 63643719172 7467716465 75 73962413 90 65 3264  
5 995 1339047 2 75 10099465 7640 7 95 126946 3 9 265 95 109 25 226205 224 9 42072671947 2 6 4 26047699070264013639443745 5 305 06 20349625 245 174939965 14342 9 0919065 925 09327226964685 15 709 5  
6 3 7405 97 8 95 997975 49 9306175 392 46 13 2 6 6 3 6 9427745 5 99 15 925 245 95 395 9430499725 246 0 45 9 727364695 4 65 3 367362226260992460 05 1243 4 4390452441365 497627 0797715 6914  
35 99770029606 494684 6 5 5 4 0635 3422072225 4 2 4 4 6 8 4 5 602 5 08016 42 73945 226746767 9 5 25 213 5 225 4995 466672 7 23 9 65 65 16835 4 6 6230 7745 649 035 5 93635 6 174324125 5 076097  
47945 10965 96094025 22 8 7979 9345 669136 6722 74 9405 60105 0330 8 6792 6 0920 74760917 2493 5 9009774909675 9 5 26365 5 497 932 97 4 216 299 94 7226 8 04 5 75 64042 704775 5 13237964  
45 15 237462334645 42 5 444795 265 67 2105 14135 4735 7395 231342 716602135 9695 362344295 24 4937 710145 765 4035 902799344037420073105 7 5 3906219 3 7447 0 47 4 96 3321445 713 6 7519435 0643  
02 45 39104 4 1005 3710646 06749927 1919793995 20649166342 75 4440643745 1237 1921799 3910 9195 6 4675 426923974 940907 649423965 67945 20 095 465 0222 231603 193042093762137 5 95 663 9  
377 70 3039069792077346722 25 625 99665 042 0306 03 4477345 49202605 44665 925 210497442 5 0732 5 6660021324340 1907104 633173464965 145 3905 79626 5 6005 5 0810665 79699 1635 747363 40  
525 745 9102 9706440109712062 043903975 95 5 6775 77020420337 6 699360072305 5 76317635 942 7325 1471205 3292 19 26 62 5 67325 799 44 4 291644706095 75 270695 72209175 671167229109 1690915 2 0  
735 0671274 3 3222 7 35220935 3965 725 120 35 7915 369 2094442100675 103346710342671136990 6 5 51639 35 01970165 176 5 1743765 76 35 5 65 0 49099 9 5 99 23 7345 5 2 331635 5 076479 5 35 932  
26 5 4 96321329330 9 5 7064204675 25 9070915 4 1465 49 5 94663 7 02709 19943099244 9 5 75 712 2 905 92323326097297120 44335 73265 4 93 23911325 97463667305 3604142 13 3 303203 24903 75 5  
9 5 243744710291327165 6 093773444030707467212019130203303 05 0197621010044929325 160 42444 5 9637669 3 95 22 6 47 3235 2265 2134495 76 5 726243344 930396 642614341077322697 02 073 95  
441010446 2325 2716210105 265 27211660396665 5730925471105 7 8 5 3763466 2065 3109 965 269 6205 64769325 705 635 6620 5 5 10072936065 9 764 61791045 334 5 03461365 716 675 32494466 0396265 797 771  
5 5 5 60 45 5 2965 42665 405 3064334443 5 676975 145 664066 00700237 7765 913440171749470205 622305 3 9945 63640112700040 5 47332699390 145 4664645 5 0797270 266 3064332 5 7 5 69 305 23  
5 9 933065 75 7406795 45 7163775 25 42021495 5 785 4 10025 01622 5 941302164715 5 079795 309910 7165 4737625 5 1165 675 135 75 71 2966845 4779719 5 0129964 9030463994713296210730634375 9 5 735 9645 091939  
9713117904297 2 8 5 6475 0320319 6915 1402 70 0 5 9904 0109424722131794764777262244425 4 5 45 4033215 7 35 306422 8 1375 5 043063321715 2979 66223711725 916071766925 474 73 9 665 494945 01465 4062  
43366393790039769265 672463 5 3067360965 71209 0763 3276646274 5 007 6925 6029022 472104031712 60 2049100042296611963719213375 75 1495 5 05 6604963 62947265 4736425 230 17703675 15706  
735 0235 072 35405 670403 67435 13622247715 9 95 0495 309 444 9333096340 7 0769235 99397 05 4913444737744 426329 60 099 8 6 74132604725 6951623965 645 73021635 9 1939516735 3 129741677  
2947 67242292465 4366 009 067692 23 2 0 6 9964004 2435 40370146164965 979409243237 769070697794223625 0 226 9 5 73 379 623005 9377647165 12 935 7 605 5 16975 7 29735 233446042 152  
6272037343465 3197777416031990665 54 763979293344195 25 4134 994 5 4447345 673 316249934913 4 0 9727777103 63 773431772075 45 65 45 322077709210905 1660962 04909263601975 9 5 2 16133231666365 2  
6992366 6336062 735 6763035 4477162 035 045 0777235 5 47105 5 95 4 70279 0 1435 624045 171 06246436267945 6275 3 13407 33033625 4232 7 3944975 3 2437205 3 53147711926063 13346776 79695 97030  
9 33913077109 7040 5 91337464442 227726346 94704745 7 4 47 7 720927715 2 073167910770715 7213444730605 7007334924369313 35 0493632 40425 1925 6 179 0694135 2 01347013047 16437 5 5 1 5  
29092 5 45 20165 39344965 6213494345 95 62 5 65 5 705 5 26904965 209 5 033 5 07224264 293972 5 47 316305 77775 606 8 7644624 246 5 79260395 35 27734 0304 029005 76075 25 1047410916439  
6362676044725 627420420 320 5 66190625 45 4372135 35 95 4 5 06 77246029106 766795 240663425 225 77195 42992919930645 37799613037340432 75 262 4 9 963 99 79475 729174642635 745 25 4071091495 135 774  
3694109139325 191076020 25 202 8 79 5 3 8 7705 4 429725 7677 13496999090126191713 727 4 476 4726 60 49003377024242965 13005 00516 32336435 03 95 75 1102 9 93922302991367935 6270 943 799362016295 12 0 6965 017 4 40 7 74  
5 1960212 2 5 9937162310171444 4640903 9064495 4440089 69075 4 5 1602632 75 05 29 349 740 7 66 0 8 33 5 1022 3345 0 5 04 60 25 039302133219715 5 430635 45 5 00766 2 2949304137765 5 279397517  
546395 3 9 4 6 339363 30474619665 3 5 5 15 3 4205 6 5 33 6 2 67 25 233402 3 0 711 32 27 92 25 077126294632295 63 9 9 935 216745 6270102 35 64622013496715 7 19097303 19 00497340723761036 5 40  
664319395 0799106996395 5 245 3005 04 5 0 06 5 0195 673022921913939 5 6 03449039 2 005 95 5 10022635 35 3619404994745 5 3 5 93 10234395 5 4495 977 377902374216712711723643435 34947 22 1 5 2 6240 5  
95400666043325 5 5 69 6705 435 4706965 74745 5 5 033233342107305 45 9405 165 5 37906 66273337995 5 15 62 7 43229 2 27372319 9 75 7145 95 7 116335 33005 940 7306 12602 764962 674460477464  
910995 0549737425 626910409377 7 19 6 35 93 6 465 74126 04925 64 79 5 645 372347 67333037046 6 3 34363465 537949 64927105 63 3 7293174 723320 37602302991367935 6270 943 799362016295 12 3371  
424 92 30722102690475 466 4765 35 7864773794675 20049075 715 5 27 1965 36213239264066013635 15 5 907422020203 7277605 277219005 5 64 42 5 5 7925 303435 139 4425 322345 76233606425 063904975

<http://eaulas.usp.br/portal/video.action;jsessionid=007D7EC8FCB57CA0DF564894EA51335C?idPlaylist=5216>