MAT 1511 - Laboratório de Matemática I - Diurno - 2005
Profa. Martha Salerno Monteiro

Representações decimais de números reais

Um número real pode ser representado de várias maneiras, sendo a representação decimal a mais comum.

Na representação decimal, um *número inteiro positivo* é escrito como uma sucessão de algarismos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ em que a posição de cada algarismo nessa sucessão determina qual potência de 10 é fator daquele algarismo. Por exemplo,

$$1475 = 1000 + 400 + 70 + 5 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Já a representação decimal de um número racional pode apresentar pequenas dificuldades que tentamos esclarecer a seguir. Observemos alguns exemplos.

Os números

$$\frac{7}{10}, \frac{34}{100}, \frac{705}{10.000}$$

são frações cujas representações decimais são, respectivamente, 0,7;   0,34;   0,0705.

Usando a notação

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}\,; \;\; 0,01 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}\,; \;\; \dots\,; \;\; 0,\underbrace{0\dots01}_{n} = \frac{1}{10^n} = 10^{-n}\,; \dots$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} 0,7 &= 7 \times 10^{-1} \\ 0,34 &= 0,3 + 0,04 = 3 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} \\ 0,0705 &= 0,07 + 0,0005 = 7 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Esta forma de escrever é análoga à da representação dos inteiros, só que agora permitimos potências de 10 com expoente negativo.

Um número real positivo está representado em sua forma decimal quando é escrito como

$$x = k, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

onde k é um número inteiro positivo e $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, chamados *dígitos*, são inteiros positivos tais que $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. As posições que esses números a_n ocupam são as *casas decimais*.

Por exemplo, os números $a = 3,750000\dots$, $b = 0,16292929\dots$ e $\sqrt{2} = 1,4142136\dots$ estão representados em sua forma decimal. O dígito 5 do número a ocupa a segunda casa decimal.

Note que em a e em b fica subentendido como devem ser os dígitos que não estão escritos, mas no caso de $\sqrt{2}$, a partir do que está escrito, não podemos inferir uma regra para achar os dígitos que se seguem, embora existam processos de como calculá-los - um deles visto em aula.

Pergunta 1: Qual o significado das reticências?

Para responder a essa questão vamos escrever um número real positivo como

$$x = k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

e definir uma sucessão de números dados por

$$\begin{aligned}
x_1 &= k + \frac{a_1}{10} \\
x_2 &= k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \\
&\vdots \\
x_n &= k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Repare que cada um dos números x_1, x_2, ..., x_n é racional, pois é soma finita de números racionais. Note também que cada x_n é menor ou igual a x (escrevemos $x_n \leq x$). Cada um desses números é uma aproximação de x, pois a diferença $x - x_n$ é pequena e fica cada vez menor quanto maior o índice n:

$$0 \leq x - x_n \leq 10^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Também vale que

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$$

ou seja, a seqüência de números x_n é crescente.

Em uma situação como essa em que a diferença entre x e x_n fica cada vez menor, tendendo a zero, dizemos que a seqüência de números racionais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ *converge* para o número real x ou ainda, que o número real x é o *limite* da seqüência de números racionais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

Isso responde à pergunta 1: as reticências indicam que o número em questão é o limite de uma seqüência de outros números racionais.

Por exemplo, para $a = 3,750000\ldots$, temos

$$x_1 = 3 + \frac{7}{10} = 3,7 < x_2 = 3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{10^2} = 3,75 = x_3 = x_4 = \ldots$$

A seqüência $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ ficou constante a partir do índice 2. Portanto é uma seqüência convergente cujo limite é o número racional 3,75.

Vejamos outro exemplo: se $x = 3,14159265\ldots$ então

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3 + \frac{1}{10} = 3,1 \\
x_2 &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} = 3,14 \\
x_3 &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} = 3,141 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

É claro que $3,1 < 3,14 < 3,141 < \cdots$ e que $x - x_1 = 0,04159265\ldots$ é positivo, menor do que 10^{-1}; $x - x_2 = 0,00159265\ldots$ é positivo, menor do que 10^{-2}, e assim por diante. O número x é o limite da seqüência 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ...

Há algumas situações especiais que merecem destaque:

1. Quando, a partir de certo ponto, todos os dígitos a_n ficam iguais a zero:

$$x = k, a_1 a_2 \dots a_n 0\,0\,0 \dots$$

Neste caso,

$$x = k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \frac{a_n}{10^n} \; (= x_n)$$

é um número racional. Exemplos: 3,75 ; 0,139 ; 9,5

2. Quando, a partir de um certo ponto após a vírgula, os dígitos se repetem indefinidamente na mesma ordem, como por exemplo, em $a = 0,777...$, ou $b = 0,451717171...$ Vamos mostrar que nesses casos, x também é racional.

A igualdade 0,999... = 1

Os valores aproximados de $0,999\dots$ são $x_1 = 0,9$, $x_2 = 0,99$, $x_3 = 0,999$, etc.

Note que

$$1 - x_1 = 0,1\,, \;\; 1 - x_2 = 0,01\,, \;\; 1 - x_3 = 0,001\,, \;\; \dots, 1 - x_n = 10^{-n}$$

ou seja, conforme n cresce, a diferença entre 1 e x_n fica cada vez menor.

Concluímos que os números $x_n = 0,99\dots9$ estão cada vez mais próximos do número 1. Em outras palavras, o número 1 é o limite da seqüência 0,9, 0,99, 0,999, ... Esta última frase é escrita em matemática como $1 = \lim_{n\to\infty} x_n$ ou, mais simplesmente, 1=0,999....

Segundo Lima ([L]), página 61,

> *A igualdade $1 = 0,999\dots$ costuma causar perplexidade aos menos experientes. A única maneira de dirimir o aparente paradoxo é esclarecer que o símbolo 0,999... na realidade significa o número cujos valores aproximados são 0,9, 0,99, 0,999, etc. E, como vimos acima, esse número é 1.*

Vejamos agora algumas conseqüências desse fato:

(i) $0,111\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{9} \cdot (\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots) = \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{9}$

Logo, $0,222\dots = \frac{2}{9}$; $0,333\dots = \frac{3}{9}$; etc...

(ii) Como $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100}$, $\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} = \frac{99}{100^2}$, etc...
temos:

$$1 = (\frac{9}{10} + \frac{9}{100}) + (\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4}) + \cdots = \frac{99}{100} + \frac{99}{100^2} + \cdots = 99 \cdot (\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots)$$

Portanto,

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots = \frac{1}{99}$$

Com esse conhecimento, obteremos resultados como, por exemplo,

$$0,454545\ldots = \frac{45}{100} + \frac{45}{100^2} + \cdots = 45 \cdot (\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots) = 45 \cdot \frac{1}{99} = \frac{45}{99}$$

(iii) Procedendo de forma análoga, podemos concluir que toda *dízima periódica simples*[1] é um número racional que, quando escrito na forma de fração, tem o numerador igual ao período e o denominador é formado por tantos 9 quantos são os algarismos do período. Por exemplo, 0,506506506... é uma dízima de período 506 e $0,506506506\ldots = \dfrac{506}{999}$

- Existem também as *dízimas periódicas compostas*, que são representações decimais que têm, depois da vírgula, alguns algarismos que não se repetem seguidos de uma sucessão de algarismos que se repete indefinidamente. Vejamos como encontrar sua forma fracionária através do exemplo $x = 0,165292929\ldots$. Vamos multiplicar o número x por uma potência de 10 de modo que a vírgula fique colocada na posição em que os algarismos começam a se repetir:

$$\begin{aligned} x &= 0,165292929\ldots \\ 1000x &= 165,292929\ldots = 165 + 0,292929\ldots \end{aligned}$$

Já sabemos representar o número 0,292929... na forma de fração! Logo,

$$1000x = 165 + \frac{29}{99} = \frac{165 \times 99 + 29}{99} = \frac{165 \times (100-1) + 29}{99} = \frac{16500 - 165 + 29}{99} = \frac{16364}{99}$$

Portanto, $x = \dfrac{16364}{99000}$

Conclusão. Toda expressão decimal finita ou infinita periódica representa um número racional.

Observação. Dividindo por 10 os dois lados da igualdade 0,999... = 1 obtemos 0,0999... = 0,1. Dividindo novamente, obtemos 0,00999... = 0,01, e assim por diante. Com isso, conseguimos escrever qualquer representação decimal finita na forma de dízima com infinitos noves. Por exemplo:

$$2,5 = 2,4 + 0,1 = 2,4 + 0,0999\ldots = 2,4999\ldots$$

Pergunta 2. Será que vale a recíproca, isto é, será que todo número racional é representado por uma expressão decimal finita ou por uma dízima periódica?

Se $\dfrac{p}{q}$ é um número racional obtemos sua representação decimal efetuando a divisão de p por q. Como exemplo, vamos escrever $\dfrac{10}{8}$ em sua forma decimal. Faça a divisão num papel enquanto acompanha o raciocício: ao efetuarmos a divisão do número 10 pelo número 8 obtemos quociente 1 e resto 2. Como 2 inteiros é o mesmo que 20 décimos, dividimos 20 por 8, obtendo

[1] Uma expressão da forma $0, a_1a_2\ldots$ é uma dízima periódica simples quando os p primeiros dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. Essa seqüência dos p dígitos que se repete é chamada de período.

2 décimos com resto igual a 4 décimos, ou 40 centésimos. Dividimos agora 40 centésimos por 8 e obtemos 5 centésimos e resto igual a zero. Logo, $\frac{10}{8} = 1,25$ (um inteiro, dois décimos e cinco centésimos).

Vejamos outro exemplo: $\frac{3}{7} = 0,42857142857142\ldots$ Repare que aparecem os seguintes restos, nessa ordem: 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, ... Quando chegamos ao resto 3, o processo começará a se repetir. formando uma dízima.

Os exemplos acima mostram os dois únicos tipos de quocientes entre entre dois inteiros p e q ($q \neq 0$):

1. Em algum momento o resto da divisão fica igual a zero. Nesse caso, obteremos uma representação decimal finita.

2. Se o resto 0 não ocorrer, como há uma quantidade finita de possibilidades para o resto, (os únicos restos possíveis são $0, 1, 2, \ldots, q-1$), em algum momento algum resto terá que se repetir. Nesse caso, obteremos uma dízima periódica.

O argumento acima responde afirmativamente à pergunta 2 acima.

Exercício. Para entender melhor o que foi dito, escreva na forma decimal os números $\frac{53}{55}$ e $\frac{16}{27}$, prestando atenção na divisão e nos restos que aparecem. Perceba em que momento você poderá ter certeza de que se trata de uma dízima.

Foi provado em aula que o número real $\sqrt{2}$ não é racional. Isso significa que sua representação decimal não pode ser finita e nem formar uma dízima periódica. Também encontramos algumas aproximações: usando o fato que, se $0 < a < b$ então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, decobrimos que, como $1^2 < 2 < 2^2$ então $1 < \sqrt{2} < 2$. Com um pouco mais contas, vimos que $1,4^2 < 2 < 1,5^2$ e, portanto, $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Dizemos que 1,4 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ por falta e que 1,5 é uma aproximação por excesso. Note que se trocarmos $\sqrt{2}$ por 1,4 ou por 1,5, estaremos introduzindo um erro. Esse erro é menor do que 10^{-1}.

Como $1,41^2 < 2 < 1,42^2$, vemos que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$. O erro cometido quando aproximamos $\sqrt{2}$ por 1,41 ou por 1,42 é menor do que 10^{-2}.

Sabemos que o processo não irá acabar. Uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro menor do que 10^{-28} é 1,4142135623730950488016887242.

Você irá aprender futuramente que, se n não for um quadrado perfeito, então $\sqrt{n}$ será um número irracional. Assim, os números $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$ e $\sqrt{1000}$ são exemplos de números irracionais.

Outro exemplo conhecido de número irracional é o número que representa a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, denotado pela legra grega π. O fato de que essa razão é constante é sabido há tanto tempo que é impossível datar. O papiro de Rhind, datado de 1650 a.C., apresenta $\pi = 4(\frac{8}{9})^2$. Já Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) obteve a aproximação $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. (Observe que Arquimedes não procurou “o valor de π”, mas encontrou dois números conhecidos que limitam o valor de π!) Acredita-se que a primeira demonstração da irracionalidade de π tenha sido feita em 1761 pelo matemático francês J. H. Lambert. Essa demora é um indício da dificuldade em fazê-lo. Uma aproximação para π com erro menor do que 10^{-8} é 3,14159265. (Escrevemos $\pi \approx 3,14159265$)

Referências

L Elon Lages Lima e outros, *A Matemática do Ensino Médio* Volume I, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

M Iaci Malta e outros, *Cálculo a uma variável* Volume I, Uma introdução ao Cálculo, Rio de Janeiro: Ed. PUC-Rio; São Paulo: Ed. Loyola, 2002.

N Ivan Niven, *Números: racionais e irracionais.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html`

Exercícios

1. Escreva a representação decimal de cada número abaixo:
   (a) $\dfrac{5}{70}$ (b) $\dfrac{16}{90}$ (c) $\dfrac{11}{13}$

2. Dê uma aproximação para o número $\frac{16}{90}$ com erro menor do que 10^{-3}.

3. Escreva cada dízima abaixo na forma de fração:
   (a) 0,12454545... (b) $3,\overline{7}$ (c) $0,54\overline{85}$
   (d) $0,0\overline{01}$ (e) 0,499...

4. O número 0,1234567891011121314151617... é racional ou irracional? Por quê?

5. Suponha que $\dfrac{p}{q}$ seja um número racional e que p e q sejam inteiros primos entre si. É possível saber, sem fazer a conta mas só reparando nos números p e q, se a representação decimal será finita ou será dízima? Se sua resposta for sim, explique.

6. Dê exemplos de três números racionais entre 2,3573 e 2,3574. Há irracionais entre esses números? Se sim, descreva um.

7. Dados dois números quaisquer, distintos, quantos racionais e quantos irracionais é possível encontrar entre eles?

8. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique. Se for falsa, como seria possível corrigir?

   (a) Se um número é racional então sua expansão decimal é finita.
   (b) Se um número tem expansão decimal finita então ele é racional.
   (c) Se um número tem expansão decimal infinita então ele é irracional.
   (d) Entre dois números racionais distintos é sempre possível encontrar outro racional.

9. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.

   (e) Se $x = \sqrt{25}$ então $x = \pm 5$
   (f) $\sqrt{x^2} = 5 \Rightarrow x = 5$
   (g) Se $\sqrt{|x|} = 5$ então $x = 25$ ou $x = -25$