MAT1514 - A Matemática na Educação Básica

Departamento de Matemática
IME-USP

Sistemas de Numeração

Os sistemas de numeração evoluíram através de séculos, com a criação de símbolos para representarem algumas quantidades. Mas, claro, era impossível ter um símbolo para cada número. Com isso, foram sendo desenvolvidas certas ideias de agrupamentos e convenções específicas para a correta interpretação.

Em nosso sistema de numeração, usamos 10 símbolos para representar todos os números, a saber, 0, 1, 2, . . . , 9. Também nos acostumamos a agrupar de 10 em 10: 10 unidades formam 1 dezena, 10 dezenas formam 1 centena, e assim por diante. Mas isso só não basta. Foi necessário convencionar o significado de símbolos colocados lado a lado. Por exemplo, os símbolos 2, 5 e 8 colocados nessa ordem, da esquerda para a direita, 258, é compreendido como 2 centenas, 5 dezenas e 8 unidades, ou seja,

$$258 = 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8$$

Em um sistema de numeração de base b, são usados b símbolos.

Se precisarmos usar uma base $b \leq 10$, podemos simplesmente tomar os símbolos $0, 1, 2, \ldots, b-1$. Se $b > 10$, precisamos acrescentar outros. Em computação é muito usada a base hexadecimal ($b = 16$), que utiliza os símbolos $0, 1, 2, \ldots 9, A, B, C, D, E, F$, nessa ordem, ou seja, A representa o dez, B representa o onze e assim por diante.

Uma quantidade N é representada em uma base b de modo análogo à representação usual: escrevemos $N = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ se

$$N = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$$

sendo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ os símbolos usados naquela base (logo, $0 \leq a_i < b$).

Quando se usa mais de uma base em um mesmo texto, é comum escrever a base b subscrita para indicar que aquela representação foi feita na base b. Por exemplo, $(2031)_4$ é um número escrito na base 4. Para sabermos sua representação na base 10, basta calcular:

$$\begin{aligned} (2031)_4 &= 2 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 1 \times 4^0 \\ &= 128 + 12 + 1 = 141 \end{aligned}$$

A representação decimal do número $(171B)_{16}$ é

$$\begin{aligned} (171B)_{16} &= 1 \times 16^3 + 7 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 11 \times 16^0 \\ &= 4.096 + 1.792 + 16 + 11 = 5.915 \end{aligned}$$

Como fazemos para converter um número representado na base usual para uma outra base?

Bem, precisamos fazer os agrupamentos de b em b. Por exemplo, para representarmos o número 9 na base 4, podemos ver que $9 = 2 \times 4 + 1$, ou seja, há dois grupos de 4 mais 1 unidade. Assim, $9 = (21)_4$.

Mas como ficaria o número 30 na base 4?

Vemos que $30 = 7 \times 4 + 2$, o que significa que há 7 grupos de 4 mais 2 unidades. Mas na base 4 não há um símbolo para 7. Assim precisamos continuar agrupando: $7 = 1 \times 4 + 3$ e, portanto,

$$30 = 7 \times 4 + 2 = (1 \times 4 + 3) \times 4 + 2 = 1 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 2$$

Portanto, $30 = (132)_4$.

Na prática, para representarmos uma quantidade Q na base b, dividimos esse número por b para saber quantos são os grupos com b elementos. Indicando o quociente por Q_1 e o resto por a_0, podemos escrever $Q = Q_1 \times b + a_0$. Se $Q_1 > b$, dividimos novamente e obtemos quociente Q_2 e resto a_1. Dessa forma, teremos $Q_1 = Q_2 \times b + a_1$ e, portanto,

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 \times b + a_0 = (Q_2 \times b + a_1) \times b + a_0 \\ &= Q_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0 \end{aligned}$$

e assim por diante. O processo irá cessar quando o quociente for menor do que b, em uma n-ésima etapa. Denotando tal quociente por Q_n, o número Q será representado por $(Q_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$.

Exercícios.

1. Em um sistema de numeração de base 12, use os símbolos $0, 1, 2, \ldots, 9, d, n$, sendo d o símbolo que representa *dez* e n o símbolo para *onze*.

   a) Represente o número $(301d3)_{12}$ na base 10.

   b) Represente o número 6.582 na base 12.

2. Faça tabuadas para adição e multiplicação na base 4.

3. Efetue, sem passar para a base 10:

   a) $(3102)_4 + (323)_4 =$

   b) $(3102)_4 \times (323)_4 =$

4. Pode um número par ser representado, em alguma base, por 27?

5. Pode um número ímpar ser representado, em alguma base, por 32?

6. Determine $b > 0$ de modo que $83 = (123)_b$.

7. Verifique que $(144)_b$ é um quadrado perfeito, qualquer que seja a base b.